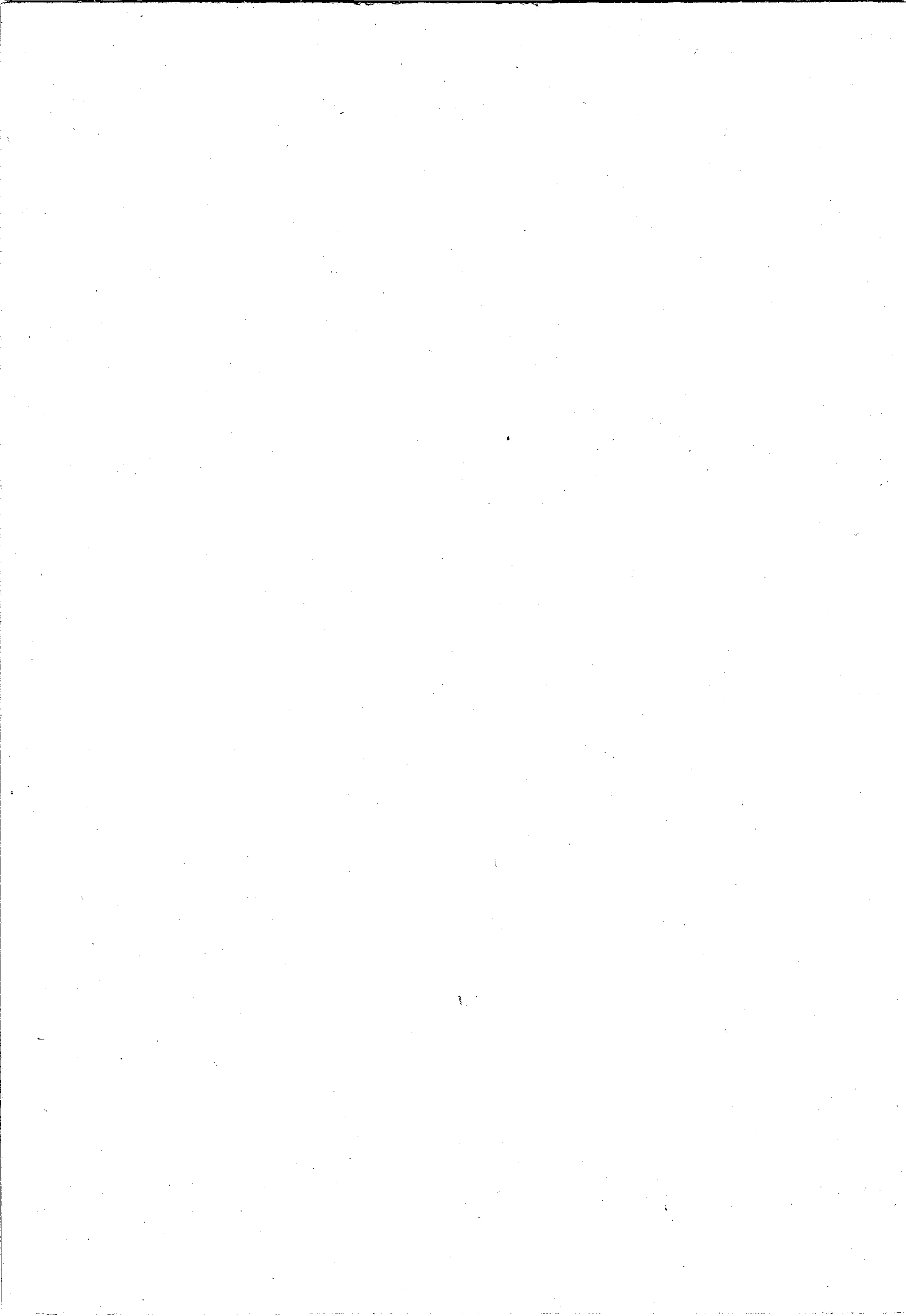
M. A. NEUMARK

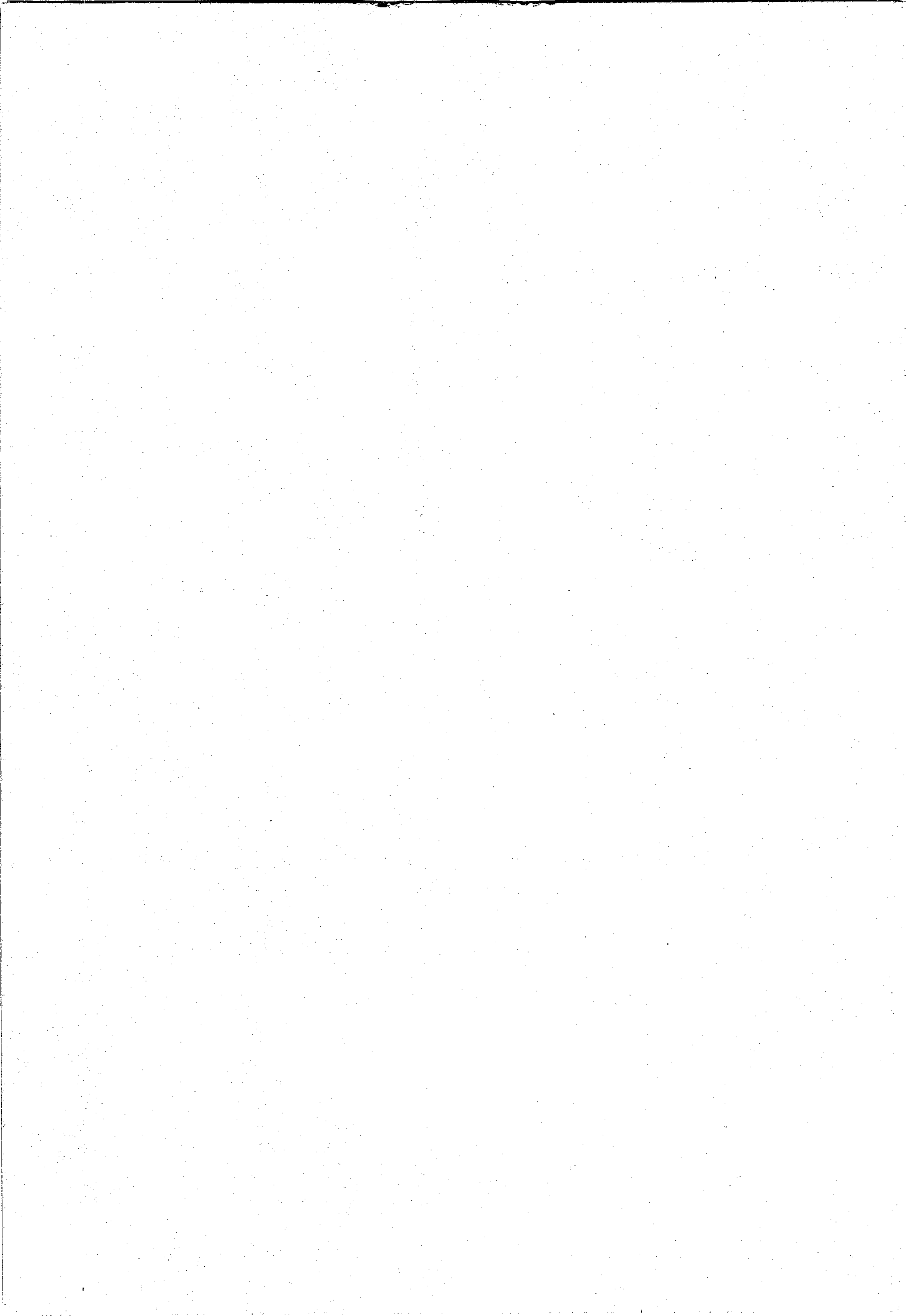
NORMIERTE ALGEBREN



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN



M. A. NEUMARK · NORMIERTE ALGEBREN



HOCHSCHULBÜCHER FÜR MATHEMATIK
HERAUSGEGEBEN VON H. GRELL, K. MARUHN UND W. RINOW
BAND 45

NORMIERTE ALGEBREN

VON

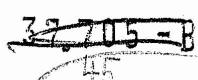
M. A. NEUMARK

Najmark

Normirovannye kol'ca



VEB DEUTSCHER VERLAG DER WISSENSCHAFTEN
BERLIN 1959

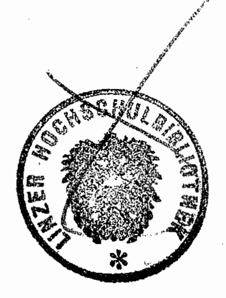


М. А. Наймарк
Нормированные Кольца
Государственное Издательство Технико-теоретической Литературы
Москва 1956

Übersetzung aus dem Russischen:
Dipl.-Math. B. Mai, Dipl.-Math. G. Tesch

Wissenschaftliche Redaktion:
Prof. Dr. G. Köthe, Dr. H.-G. Tillmann

Verantwortliche Verlagsredakteure:
Dipl.-Math. R. Helle, Dipl.-Math. B. Mai



Printed in Germany
Lizenz-Nr. 206 · 435/79/59
Satz und Druck: VEB Leipziger Druckhaus, Leipzig III/18/203

VORWORT ZUR DEUTSCHEN AUSGABE

Seit Erscheinen der russischen Orginalausgabe dieses Buches ist eine Reihe von interessanten Arbeiten zur Theorie der normierten Algebren und ihren Anwendungen erschienen, die wesentlich zum Ausbau dieser Theorie beigetragen haben. Eine Berücksichtigung aller dieser Arbeiten hätte jedoch das Erscheinen der deutschen Ausgabe wesentlich verzögert. Daher mußte ich mich auf die Zusammenstellung eines ergänzenden Literaturverzeichnisses beschränken, das übrigens in keiner Weise, insbesondere in bezug auf die Arbeiten der beiden letzten Jahre, Vollständigkeit beanspruchen kann. Außerdem wurden einige Druckfehler berichtigt und einige Fehler korrigiert.

Für viele dieser Berichtigungen habe ich Herrn ALBRECHT und Herrn SINGER zu danken, in deren Händen die Übersetzung und wissenschaftliche Redaktion der rumänischen Ausgabe lag, sowie Herrn G. KÖTHE und Herrn H.-G. TILLMANN, die die deutsche Übersetzung wissenschaftlich redigiert haben. Ich möchte diesen Herren auch an dieser Stelle meinen Dank aussprechen.

Ich halte es auch für meine angenehme Pflicht, Herrn KÖTHE und Herrn TILLMANN für seine Reihe von Bemerkungen bei der deutschen Übersetzung zu danken. Ferner möchte ich dem VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften für die Herausgabe dieses Buches in deutscher Sprache herzlichst danken.

Moskau, im Juni 1959 M. A. NEUMARK

VORWORT ZUR ORIGINALAUSGABE

Die Theorie der normierten Algebren entwickelte sich ungeachtet ihrer späten Entstehung im umfassenden Rahmen der Funktionalanalysis, die auf den verschiedenen Gebieten der Mathematik mannigfache Anwendungen gefunden hat.

Die ersten Arbeiten, in denen konkrete normierte Algebren, nämlich Algebren beschränkter Operatoren in einem HILBERTschen Raum, untersucht werden, wurden im Jahre 1930 von J. VON NEUMANN [1] und danach von F. J. MURRAY und J. VON NEUMANN [1] veröffentlicht. Bereits in diesen Arbeiten zeigte sich, wie vorteilhaft die Betrachtung von Operatorenalgebren ist. Am fruchtbarsten erwies sich aber der abstrakte Standpunkt; von diesem Standpunkt aus gesehen spielt die Natur der Elemente der Algebra überhaupt keine Rolle, so daß eine normierte Algebra einfach eine Gesamtheit von Elementen ist, die einmal im üblichen Sinne eine Algebra bildet und zum anderen mit einer Norm versehen ist, die einfachen Forderungen genügt.

Dieser Standpunkt wurde von I. M. GELFAND [1—7] in seiner Theorie der kommutativen normierten Algebren systematisch weiterentwickelt. Von entscheidender Bedeutung sind hierbei die von I. M. GELFAND entdeckte Rolle der maximalen Ideale, die Konstruktion des bikompakten Raumes der maximalen Ideale und die Darstellung der Elemente einer halbeinfachen Algebra in Gestalt einer Algebra stetiger Funktionen über diesem Raum. Bereits die ersten Anwendungen zeigten die Kraft der Theorie der normierten Algebren. So gelangte man mit Hilfe dieser Theorie zu einem überraschend einfachen Beweis des WIENERschen Satzes (N. WIENER [1]) über trigonometrische Reihen. Ferner ergaben sich einfache Beweise sowie Verallgemeinerungen einer ganzen Reihe von Sätzen vom TAUBERschen Typ usw.

Eine wesentliche Rolle in der Ausarbeitung dieser Anwendungen spielte ein umfangreicher Zyklus von Arbeiten G. E. SCHILOWS [1—18], in denen verschiedene Klassen kommutativer normierter Algebren und die Struktur der in ihnen vorhandenen Ideale untersucht werden.

Von besonderer Wichtigkeit erwies sich die Anwendung der Theorie der kommutativen normierten Algebren auf die Theorie der lokal bikompakten kommutativen Gruppen. Dies führte zu der Konstruktion einer harmonischen Analyse auf solchen Gruppen durch I. M. GELFAND, M. G. KREIN [6] und D. A. RAIKOW [2—5] (auch GELFAND und RAIKOW [1]) und insbesondere zu einem einfachen analytischen Beweis des PONTRJAGINschen Dualitätssatzes durch RAIKOW.

Eine wichtige Klasse nichtkommutativer Algebren, nämlich Algebren mit Involution (vgl. § 10), wurde in einer von I. M. GELFAND und M. A. NEUMARK [1] verfaßten Arbeit behandelt. In dieser Arbeit wird bewiesen, daß jede solche Algebra, die gewissen naturgemäßen Bedingungen genügt, derart auf eine Algebra beschränkter Operatoren in einem HILBERTschen Raum abgebildet werden kann, daß die Involutionsoperation in die Operation $A \to A^*$ (A^* bezeichnet den zu A adjungierten Operator) und die Norm in die Operatornorm übergeht.

Eine wichtige Rolle spielt hierbei der Begriff des positiven Funktionals, d. h. eines linearen Funktionals f über einer Algebra, das der Bedingung $f(x^* x) \geqq 0$ genügt. Die in dieser Arbeit entwickelten Methoden, insbesondere der Begriff des positiven Funktionals, wurden danach in Arbeiten von GELFAND und NEUMARK [1—8] sowie in zahlreichen Arbeiten anderer Mathematiker in der Theorie der Algebren mit Involution und in der Theorie der Darstellungen solcher Algebren benutzt; im Spezialfall der Gruppenalgebren wurde von diesen Methoden bei der Untersuchung unitärer Darstellungen topologischer Gruppen Gebrauch gemacht.

Eine Konstruktion der Darstellungen lokal bikompakter Gruppen mit Hilfe positiv definiter Funktionen wurde zuerst von I. M. GELFAND und D. A. RAIKOW [2] angegeben. Insbesondere bewiesen GELFAND und RAIKOW die Vollständigkeit des Systems aller irreduziblen unitären Darstellungen einer lokal bikompakten Gruppe.

Später wurden diese Ergebnisse GELFANDS und RAIKOWS zum Teil unabhängig von R. GODEMENT [3] wiedergefunden und weiterentwickelt.

Trotz der vielen bereits erzielten Resultate ist die Theorie der normierten Algebren, insbesondere die der nichtkommutativen, noch keinesfalls abgeschlossen. Viele interessante Fragen dieser Theorie sind bis heute unbeantwortet geblieben.

Von besonderem Interesse wäre die weitere Entwicklung der Theorie der Charaktere und der harmonischen Analyse auf lokal bikompakten Gruppen, die von I. M. GELFAND und M. A. NEUMARK [1—8] für die komplexen klassischen Gruppen ausgearbeitet und in einer ganzen Reihe von Arbeiten anderer Mathematiker auf andere Klassen lokal bikompakter Gruppen übertragen wurde. Außerdem blieb eine Reihe von Fragen offen, die mit der Zerlegung einer gegebenen Darstellung einer Gruppe oder Algebra in irreduzible Darstellungen zusammenhängen.

Für viele Anwendungen ist noch ein anderes Problem wichtig: die Übertragung der Theorie der normierten Algebren auf verschiedene Klassen topologischer (nicht normierter) Algebren, wobei die von L. SCHWARTZ [1] begründete Theorie der Distributionen anscheinend eine wesentliche Rolle spielen wird. Für den Fall kommutativer topologischer Algebren haben die Untersuchungen in dieser Richtung mit Arbeiten von R. ARENS [5] und L. WAELBROECK [1] begonnen.

Trotz ihrer Wichtigkeit für die Anwendungen und trotz der Reichhaltigkeit ihrer Ergebnisse ist die Theorie der normierten Algebren bisher nur in sehr wenigen Büchern dargestellt worden. In der ausländischen Literatur gibt es

das Buch von L. H. Loomis [1], in dem allerdings in erster Linie die Theorie der kommutativen und der Hilbertschen Algebren sowie deren Anwendung auf die harmonische Analyse auf lokal bikompakten kommutativen Gruppen und auf bikompakten nichtkommutativen Gruppen betrachtet wird. Außerdem werden einige Fragen der Theorie der normierten Algebren in dem Buch von E. Hille, Functional analysis and semi-groups, behandelt.

Meinen tiefempfundenen Dank möchte ich Herrn Raikow aussprechen, der das Manuskript gelesen und eine ganze Reihe wertvoller Bemerkungen gemacht hat. Dank schulde ich auch den Herren Gelfand und Schilow für nützliche Ratschläge.

Moskau, August 1955 M. A. Neumark

INHALT

I. Elemente der Topologie und der Funktionalanalysis

II. Grundbegriffe und Sätze aus der Theorie der normierten Algebren

§ 7. Algebraische Grundbegriffe

§ 8. Topologische Algebren

§ 9. Normierte Algebren

§ 10. Symmetrische Algebren

III. Kommutative normierte Algebren

§ 11. Realisierung einer kommutativen Algebra als Funktionenalgebra

§ 12. Homomorphismen und Isomorphismen von kommutativen Algebren

KAPITEL I

ELEMENTE DER TOPOLOGIE UND DER FUNKTIONALANALYSIS

§1. Lineare Räume

1. Definition des linearen Raumes. Eine Menge R von Elementen $x, y, z, \ldots$ heißt ein *linearer Raum* oder auch *Vektorraum*, wenn folgendes gilt:

a) Für je zwei Elemente x und y aus R ist ein Element $s = x + y \in R$ definiert, das wir *Summe* von x und y nennen;

b) für jede reelle bzw. komplexe Zahl α und jedes Element x aus R ist ein Element $t = \alpha x$ aus R definiert, das wir *Produkt* von x mit α nennen;

c) für die Addition der Elemente von R und die Multiplikation der Elemente von R mit Zahlen gelten die folgenden Regeln:

a_1) $x + y = y + x$;

a_2) $(x + y) + z = x + (y + z)$;

a_3) es gibt in R ein Element 0 mit der Eigenschaft, daß $x + 0 = x$ für jedes Element x aus R ist;

a_4) es gibt zu jedem Element x aus R ein Element $-x$ aus R, für das $x + (-x) = 0$ ist;

b_1) $1 \cdot x = x$;

b_2) $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$;

b_3) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$;

b_4) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$.

Ist in R die Multiplikation nur mit reellen Zahlen definiert, so wird R ein *reeller* linearer Raum genannt, während man von einem *komplexen* linearen Raum spricht, wenn die Multiplikation mit beliebigen komplexen Zahlen definiert ist.

Offenbar kann jeder komplexe lineare Raum R auch als reeller linearer Raum aufgefaßt werden.

Die Elemente $x, y, z, \ldots$ eines linearen Raumes R werden gewöhnlich *Vektoren* genannt.

Die Natur der Elemente sowie die Art der Addition der Elemente und Multiplikation der Elemente mit Zahlen sind völlig willkürlich, wichtig ist nur, daß die Bedingungen a_1) bis a_4) und b_1) bis b_4) erfüllt sind.

Beispiele. 1. Es bezeichne C^n die Gesamtheit aller Systeme $x = (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$, wobei $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ komplexe Zahlen bedeuten. Wir definieren durch die Formeln

$$(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) + (\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n) = (\xi_1 + \eta_1, \xi_2 + \eta_2, \ldots, \xi_n + \eta_n),$$
$$\alpha(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\alpha\xi_1, \alpha\xi_2, \ldots, \alpha\xi_n)$$

eine Addition und eine Multiplikation mit komplexen Zahlen. Dann sind die Bedingungen a_1) bis a_4) und b_1) bis b_4) erfüllt; C^n ist also ein komplexer linearer Raum.

Insbesondere stellt C^1 einfach die Gesamtheit aller komplexen Zahlen mit der üblichen Addition und Multiplikation dar.

2. Es bezeichne P_n die Gesamtheit aller Polynome $p(x) = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ mit komplexen Koeffizienten, deren Grad höchstens n ist. Wird in P_n auf die übliche Weise die Addition und die Multiplikation mit einer komplexen Zahl definiert, so wird P_n zu einem komplexen linearen Raum.

3. Es bezeichne $C(a, b)$ die Gesamtheit aller stetigen komplexen Funktionen $x = x(t)$, die über einem festen Intervall $[a, b]$ definiert sind. Addition und Multiplikation mit einer komplexen Zahl definieren wir auf die übliche Weise. Dann wird $C(a, b)$, wie leicht zu sehen ist, zu einem komplexen linearen Raum.

2. Lineare Abhängigkeit und Unabhängigkeit von Vektoren. Unter einer *Linearkombination* der Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$ versteht man eine Summe der Gestalt $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k$. Die Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_k$ heißen *linear unabhängig*, wenn aus der Beziehung $\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \cdots + \alpha_k x_k = 0$ stets folgt, daß $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_k = 0$ ist. Anderenfalls heißen sie *linear abhängig*.

Ein Raum R heißt *von endlicher Dimension* (endlichdimensional), wenn es in ihm höchstens endlich viele linear unabhängige Vektoren gibt. Genauer spricht man von einem n-dimensionalen Raum R, wenn es in R wohl n, aber nicht $n + 1$ linear unabhängige Vektoren gibt. Sonst heißt der Raum *unendlichdimensional*. Im Fall eines endlichdimensionalen Raumes R wird jedes aus n linear unabhängigen Vektoren bestehende System eine *Basis* in R genannt.

Der Raum C^n von Beispiel 1 aus Nr. 1 ist n-dimensional. Eine Basis in ihm bilden beispielsweise die n Vektoren $x_1 = (1, 0, 0, \ldots, 0)$, $x_2 = (0, 1, 0, \ldots, 0)$, $\ldots$, $x_n = (0, 0, \ldots, 1)$.

Der Raum $C(a, b)$ von Beispiel 3 aus Nr. 1 ist von unendlicher Dimension, weil es in ihm beliebig viele linear unabhängige Funktionen gibt, z. B. die Potenzen

$$1, t, \ldots, t^N \qquad (N = 1, 2, 3, \ldots).$$

Hat R die Dimension n und bilden $x_1, x_2, \ldots, x_n$ eine Basis in R, so läßt sich jeder Vektor x aus R eindeutig in der Form

$$x = \xi_1 x_1 + \cdots + \xi_n x_n \tag{1}$$

darstellen.

Da R die Dimension n hat, sind die $n + 1$ Vektoren $x, x_1, x_2, \ldots, x_n$ linear abhängig, d. h., es gibt Zahlen $c, c_1, c_2, \ldots, c_n$, die nicht sämtlich gleich Null sind und für die

$$cx + c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0 \tag{2}$$

ist. Hierbei ist $c \neq 0$, weil aus $c = 0$ die Beziehung $c_1 x_1 + \cdots + c_n x_n = 0$ folgen würde, so daß wegen der linearen Unabhängigkeit der Vektoren

$x_1, \ldots, x_n$ auch $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ wäre. Aus (2) folgt nun

$$x = -\frac{c_1}{c} x_1 - \cdots - \frac{c_n}{c} x_n,$$

d. h. die Darstellung (1) mit den Koeffizienten $\xi_i = -\frac{c_i}{c}$. Wäre auch $x = \xi_1' x_1 + \xi_2' x_2 + \cdots + \xi_n' x_n$, so würde durch Subtraktion von (1)

$$0 = (\xi_1 - \xi_1') x_1 + (\xi_2 - \xi_2') x_2 + \cdots + (\xi_n - \xi_n') x_n$$

folgen. Auf Grund der linearen Unabhängigkeit der $x_1, x_2, \ldots, x_n$ ist dies jedoch nur für $\xi_1 - \xi_1' = \xi_2 - \xi_2' = \cdots = \xi_n - \xi_n' = 0$, also nur für $\xi_1 = \xi_1', \xi_2 = \xi_2', \ldots, \xi_n = \xi_n'$ möglich. Damit ist die Eindeutigkeit der Darstellung (1) gezeigt.

Die Zahlen $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ heißen die *Koordinaten* des Vektors x in bezug auf die Basis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Die linearen Räume R und R' heißen *isomorph*, wenn es zwischen den Mengen ihrer Vektoren eine umkehrbar eindeutige Zuordnung $x \leftrightarrow x'$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

1. Aus $x \leftrightarrow x'$ folgt $\alpha x \leftrightarrow \alpha x'$;
2. aus $x \leftrightarrow x'$ und $y \leftrightarrow y'$ folgt $x + y \leftrightarrow x' + y'$.

Die Zuordnung $x \leftrightarrow x'$ selbst heißt *Isomorphismus* der Räume R und R'.

Aufgaben. 1. Man zeige, daß die Zuordnung $x \leftrightarrow (\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ zwischen den Vektoren eines n-dimensionalen Raumes R und deren Koordinaten $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ in bezug auf eine feste Basis ein Isomorphismus der Räume R und C^n ist.

2. Man zeige, daß k Vektoren

$$\begin{aligned} y_1 &= \xi_{11} x_1 + \xi_{12} x_2 + \cdots + \xi_{1n} x_n, \\ y_2 &= \xi_{21} x_1 + \xi_{22} x_2 + \cdots + \xi_{2n} x_n, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k &= \xi_{k1} x_1 + \xi_{k2} x_2 + \cdots + \xi_{kn} x_n \end{aligned}$$

eines n-dimensionalen Raumes R mit der Basis $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ genau dann linear unabhängig sind, wenn der Rang der Matrix

$$\begin{bmatrix} \xi_{11} & \xi_{12} & \cdots & \xi_{1n} \\ \xi_{21} & \xi_{22} & \cdots & \xi_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \xi_{k1} & \xi_{k2} & \cdots & \xi_{kn} \end{bmatrix}$$

gleich k ist.

3. Teilräume. Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines linearen Raumes R wird *Teilraum* (oder auch *Unterraum*) von R genannt, wenn a) die Summe je zweier Elemente aus $\mathfrak{M}$ ebenfalls zu $\mathfrak{M}$ gehört; b) das Produkt eines beliebigen Elements aus $\mathfrak{M}$ mit einer beliebigen Zahl ebenfalls zu $\mathfrak{M}$ gehört. Offenbar ist $\mathfrak{M}$ selbst ein linearer Raum bezüglich der in R definierten Addition und Multiplikation mit einer Zahl.

Beispiele. 1. Die Gesamtheit aller Systeme $x=(0, \xi_2, \ldots, \xi_n)$ aus C^n ist ein Teilraum in C^n.

2. Die Gesamtheit aller Funktionen $x(t)$ aus $C(a, b)$, die in einem gegebenen Punkt $t_0 \in [a, b]$ gleich Null sind, ist ein Teilraum von $C(a, b)$.

Offenbar ist sowohl R selbst als auch die Menge (0), die nur aus dem Nullelement 0 besteht, Teilraum von R. Wir sprechen hier von den beiden *trivialen Teilräumen.*

Der Durchschnitt beliebig vieler Teilräume von R ist, wie man leicht erkennt, wieder ein Teilraum von R. Insbesondere ergibt der Durchschnitt aller Teilräume, die eine gegebene Menge $\mathfrak{S} \subset R$ enthalten, den *minimalen, die Menge* $\mathfrak{S}$ *enthaltenden Teilraum.* Dieser minimale Teilraum heißt die *lineare Hülle von* $\mathfrak{S}$ oder der *von* $\mathfrak{S}$ *aufgespannte Teilraum.*

I. *Die lineare Hülle einer Menge* $\mathfrak{S}$ *stimmt mit der Gesamtheit aller endlichen Linearkombinationen* $\alpha_1 x_1 + \cdots + \alpha_k x_k$ *von Elementen* x_i *dieser Menge überein.*

In der Tat bildet die Gesamtheit aller dieser Linearkombinationen einen Teilraum, der $\mathfrak{S}$ enthält, während andererseits jeder Teilraum, der $\mathfrak{S}$ umfaßt, auch alle diese Linearkombinationen enthält.

Ein Spezialfall der linearen Hülle ist die *lineare Summe* von endlich vielen Teilräumen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$. Darunter versteht man die Gesamtheit aller Summen der Form $x_1 + x_2 + \cdots + x_k$, $x_i \in \mathfrak{S}_i$. Offenbar fällt diese Gesamtheit mit dem minimalen Teilraum, der die sämtlichen Vektoren der Räume $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2, \ldots, k)$ enthält, zusammen, d. h., sie bildet die lineare Hülle der aus allen Vektoren dieser Räume bestehenden Gesamtheit.

Die lineare Summe der Räume $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ werde im folgenden mit $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_k$ bezeichnet.

Die Teilräume $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ sollen *linear unabhängig* heißen, wenn aus $x_1 + x_2 + \cdots + x_k = 0$, $x_i \in \mathfrak{M}_i$, folgt, daß $x_1 = x_2 = \cdots = x_k = 0$ ist.

II. *Sind die Teilräume* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ *linear unabhängig, so läßt sich jeder Vektor* x *aus der linearen Summe* $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \cdots + \mathfrak{M}_k$ *auf eindeutige Weise in der Form*

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_k, \quad x_i \in \mathfrak{M}_i,$$

darstellen.

Aus $x = x_1' + x_2' + \cdots + x_k'$, $x_i' \in \mathfrak{M}_i$, folgt nämlich

$$(x_1 - x_1') + (x_2 - x_2') + \cdots + (x_k - x_k') = 0, \quad x_i - x_i' \in \mathfrak{M}_i,$$

woraus auf Grund der linearen Unabhängigkeit der $\mathfrak{M}_i$

$$x_1 - x_1' = x_2 - x_2' = \cdots = x_k - x_k' = 0,$$
$$x_1 = x_1', \; x_2 = x_2', \; \ldots, \; x_k = x_k'$$

folgt.

4. Der Quotientenraum. Es sei $\mathfrak{M}$ ein fester Teilraum in R. Die Vektoren x_1 und x_2 sollen *äquivalent modulo* $\mathfrak{M}$ heißen, in Zeichen

$$x_1 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{M}}, \tag{1}$$

wenn $x_1 - x_2 \in \mathfrak{M}$ ist. Der Begriff der Äquivalenz modulo $\mathfrak{M}$ hat die sämtlichen Eigenschaften einer Äquivalenzrelation, nämlich:

1. $x \equiv x \pmod{\mathfrak{M}}$;
2. aus $x_1 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{M}}$ folgt $x_2 \equiv x_1 \pmod{\mathfrak{M}}$;
3. aus $x_1 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{M}}$ und $x_2 \equiv x_3 \pmod{\mathfrak{M}}$ folgt $x_1 \equiv x_3 \pmod{\mathfrak{M}}$.

Wegen $x - x = 0 \in \mathfrak{M}$ gilt zunächst 1. Ist ferner $x_1 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{M}}$, so gilt $x_1 - x_2 \in \mathfrak{M}$ und damit auch $x_2 - x_1 = -(x_1 - x_2) \in \mathfrak{M}$, d. h., es ist $x_2 \equiv x_1 \pmod{\mathfrak{M}}$, so daß auch 2 erfüllt ist. Ist schließlich $x_1 \equiv x_2 \pmod{\mathfrak{M}}$ und $x_2 \equiv x_3 \pmod{\mathfrak{M}}$, so gilt $x_1 - x_2 \in \mathfrak{M}$ und $x_2 - x_3 \in \mathfrak{M}$. Dann ist aber auch $x_1 - x_3 = (x_1 - x_2) + (x_2 - x_3) \in \mathfrak{M}$, also $x_1 \equiv x_3 \pmod{\mathfrak{M}}$, so daß 3 ebenfalls gilt.

Es sei ξ_x die Gesamtheit aller Vektoren x', die zu einem festen Vektor x äquivalent modulo $\mathfrak{M}$ sind. Auf Grund der Eigenschaften 2 und 3 sind alle Vektoren aus ξ_x auch untereinander äquivalent. Aus diesem Grund wird ξ_x eine *Klasse äquivalenter Vektoren* genannt. Jeder Vektor aus ξ_x heißt *Repräsentant der Klasse* ξ_x. Offenbar wird jede Klasse eindeutig durch einen ihrer Repräsentanten bestimmt. Anders ausgedrückt, aus $y \in \xi_x$ folgt $\xi_y = \xi_x$. Demzufolge haben zwei Klassen ξ_x und ξ_y entweder überhaupt keinen Vektor gemeinsam (für $y \notin \xi_x$), oder sie stimmen überein (für $y \in \xi_x$). Daher läßt sich der ganze Raum R in Klassen ξ_x untereinander äquivalenter Vektoren einteilen.[1])

Wir betrachten diese Klassen als Elemente eines neuen linearen Raumes. Hierbei definieren wir durch die Formeln

$$\xi_x + \xi_y = \xi_{x+y}, \quad \alpha \xi_x = \xi_{\alpha x} \tag{2}$$

die Addition von Klassen und die Multiplikation einer Klasse mit einer Zahl. Diese Definitionen hängen nicht von der Wahl der Repräsentanten x und y der Klassen ξ_x und ξ_y ab. Einmal folgt nämlich aus $\xi_{x_1} = \xi_x$ und $\xi_{y_1} = \xi_y$, daß $x_1 - x \in \mathfrak{M}$ und $y_1 - y \in \mathfrak{M}$ ist, so daß auch $(x_1 + y_1) - (x + y) = (x_1 - x) + (y_1 - y) \in \mathfrak{M}$ und folglich $\xi_{x_1 + y_1} = \xi_{x+y}$ ist. Zum anderen gilt $\alpha x_1 - \alpha x = \alpha(x_1 - x) \in \mathfrak{M}$ und somit $\xi_{\alpha x_1} = \xi_{\alpha x}$. Wie man nun leicht nachprüft, sind die Bedingungen a_1) bis a_4) und b_1) bis b_4) aus Nr. 1 erfüllt. Das Nullelement ist hierbei die den Nullvektor enthaltenden Klasse ξ_0, d. h. die Menge $\mathfrak{M}$ selbst. Die Gesamtheit aller Klassen bildet also mit den Operationen (2) einen linearen Raum, den sogenannten *Quotientenraum von* R *nach* $\mathfrak{M}$. Man bezeichnet ihn mit $R/\mathfrak{M}$.

Beispiel. Es sei R die Gesamtheit der Vektoren des reellen dreidimensionalen Raumes, die vom Koordinatenursprung ausgehen, und $\mathfrak{M}$ die Teilmenge derjenigen Vektoren, die auf einer gegebenen Geraden l durch den Ursprung liegen (Abb. 1). Dann besteht die Klasse ξ_x aus den Vektoren, deren Endpunkte auf einer Geraden l' liegen,

---

[1]) Die hier durchgeführte Überlegung ist allgemeiner Natur und auf jede abstrakte Menge $\mathfrak{A}$ anwendbar, in der eine Äquivalenzrelation definiert ist, die den Bedingungen 1 bis 3 genügt. Die Menge $\mathfrak{A}$ zerfällt dann in Klassen von untereinander äquivalenten Elementen.

die durch den Endpunkt des Vektors x parallel zu l gelegt ist. Die Klassen der untereinander äquivalenten Vektoren entsprechen hier also den zu l parallelen Geraden.

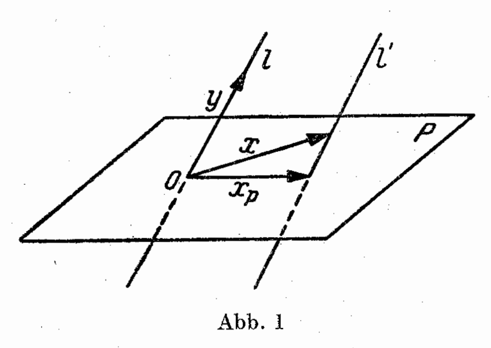


Abb. 1

Wir legen nun durch den Koordinatenursprung eine Ebene P, die l nicht ganz enthält. Wird dann jeder Klasse ξ_x ihr auf P liegender Repräsentant x_P zugeordnet, so erhalten wir eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Klassen ξ_x und den Vektoren x_P. Hierbei entspricht einer Summe $\xi_x + \xi_y$ die Summe $x_P + y_P$ und einem Produkt $\alpha \xi_x$ das Produkt αx_P, so daß die Zuordnung $\xi_x \to x_P$ ein Isomorphismus ist. Deshalb ist es gleichgültig, ob man den Quotientenraum $R/\mathfrak{M}$ oder die Gesamtheit aller in der Ebene P liegenden Vektoren betrachtet. Bei dieser Deutung des Quotientenraumes ergibt sich der Übergang von R zu $R/\mathfrak{M}$ einfach dadurch, daß man parallel zur Geraden l auf die Ebene P projiziert.

5. Lineare Operatoren. Es seien R und R' lineare Räume, $\mathfrak{D} \subset R$ und $\mathfrak{R} \subset R'$ gewisse Teilmengen. Ist jedem x aus $\mathfrak{D}$ ein y aus $\mathfrak{R}$ zugeordnet und ist jedes y aus $\mathfrak{R}$ das Bild wenigstens eines Vektors x aus $\mathfrak{D}$, so wollen wir sagen, daß *ein Operator $y = A(x)$ von R in R' mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}$ und dem Wertebereich $\mathfrak{R}$ gegeben sei.*

Ist insbesondere $R' = R$, so heiße A ein *Operator in R.*

Somit ist der Begriff des Operators die naturgemäße Verallgemeinerung des Funktionsbegriffes für den Fall, daß Argument und Wert der Funktion Elemente von Vektorräumen sind. Wir werden im folgenden die Klammern fortlassen, also einfach $y = Ax$ schreiben. Der Buchstabe A bezeichnet hierbei den Operator, d. h. die Vorschrift, nach der den Vektoren x aus $\mathfrak{D}$ die Vektoren y aus $\mathfrak{R}$ zugeordnet sind. Soll hervorgehoben werden, daß $\mathfrak{D}$ und $\mathfrak{R}$ Definitionsbereich bzw. Wertebereich des Operators A sind, so soll $\mathfrak{D}_A$ und $\mathfrak{R}_A$ geschrieben werden. Zwei Operatoren A und B von R in R' werden als gleich angesehen, wenn $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_B$ und $Ax = Bx$ für alle x aus $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_B$ ist.

Wird für R' insbesondere der Raum C^1 genommen, so daß die Werte des betrachteten Operators komplexe Zahlen sind, so soll der Operator ein *Funktional* genannt werden. Für Funktionale behalten wir die übliche Schreibweise einer Funktion bei, schreiben also $f(x)$ statt Ax.

Ein Operator B heiße *Erweiterung* oder *Fortsetzung* eines Operators A, wenn $\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{D}_B$ und $Ax = Bx$ für alle $x \in \mathfrak{D}_A$ ist. Der Operator A wird dann *Einschränkung* von B genannt. Ist B eine Erweiterung von A (und dementsprechend A eine Einschränkung von B), so schreiben wir

$$B \supset A \quad \text{oder} \quad A \subset B.$$

Beispiele. 1. Es sei $R = \mathfrak{D}_A = C^n$, $R' = \mathfrak{R}_A = C^m$ (vgl. Beispiel 1 aus Nr. 1) und

$$A(\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n) = (\xi_1', \xi_2', \ldots, \xi_m') \tag{1}$$

mit

$$\xi'_j = \sum_{k=1}^{n} a_{jk} \xi_k \quad (j = 1, 2, \ldots, m) \tag{2}$$

(die a_{jk} bezeichnen irgendwelche festen Zahlen). Dann ist A ein Operator von C^n in C^m. Für $m = n$ ist A ein Operator in C^n. Die Matrix

$$a = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \ldots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \ldots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

heiße die *Matrix des Operators* A.

2. Es sei $R = R' = C(a, b)$, $\mathfrak{D}_B = C'(a, b)$ und $Bx = \frac{dx}{dt}$, wobei $C(a, b)$ die Gesamtheit aller im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen (vgl. Beispiel 3 aus Nr. 1) und $C'(a, b)$ die Gesamtheit aller in diesem Intervall stetig differenzierbaren Funktionen bezeichnet. Offenbar ist hierbei $\mathfrak{R}_B = C(a, b)$. B ist ein Operator in $C(a, b)$.

3. Es sei $R = R' = C(a, b)$ und $\mathfrak{D}_A$ die Gesamtheit aller Funktionen $x(t)$ aus $C'(a, b)$, die den Bedingungen $x(a) = x(b) = 0$ genügen. Ferner sei $Ax = \frac{dx}{dt}$. Dann ist A ein Operator in R. Offenbar stellt A eine Einschränkung des Operators B aus Beispiel 2 dar. Dementsprechend ist B eine Erweiterung von A.

4. Ist $R = R' = C(a, b)$, $\mathfrak{D}_B = C'(a, b)$ und $Bx = x\frac{dx}{dt}$, so ist B ein Operator in $C(a, b)$.

5. Ist $R = C(a, b)$, $\mathfrak{D}_f = C'(a, b)$ und $f(x) = \int_a^b \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 dt$, so ist $f(x)$ ein Funktional in $C(a, b)$.

6. Ist $R = C(a, b)$, $\mathfrak{D}_f = C(a, b)$ und $f(x) = \int_a^b x(t)\,dt$, so ist $f(x)$ ein Funktional in $C(a, b)$.

7. Es sei $R = R' = \mathfrak{D}_A = C(a, b)$ und $Ax(t) = \int_a^b K(t, s)x(s)\,ds$, wobei $K(t, s)$ eine im Quadrat $a \leqq s$, $t \leqq b$ stetige Funktion der beiden Veränderlichen s und t bedeute. Dann ist A ein Operator in $C(a, b)$. A wird als *Integraloperator* mit der Funktion $K(t, s)$ als *Kern* bezeichnet.

Ein Operator A heißt *linear*, wenn $\mathfrak{D}_A$ ein Teilraum von R ist (der mit dem ganzen Raum zusammenfallen kann) und die Beziehungen

$$A(\alpha x) = \alpha A x, \quad A(x + y) = Ax + Ay \tag{3}$$

für alle $x, y \in \mathfrak{D}_A$ und alle Zahlen α gelten. Insbesondere wird ein Funktional $f(x)$ *linear* genannt, wenn $\mathfrak{D}_f$ ein Teilraum ist und

$$f(\alpha x) = \alpha f(x), \quad f(x + y) = f(x) + f(y) \tag{4}$$

für alle $x, y \in \mathfrak{D}_f$ und alle Zahlen α gilt.

Möchte man betonen, daß $f(x)$ ein lineares Funktional in einem reellen Raum R ist, daß also $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ für alle reellen α ist, so spricht man von einem *reellen linearen* Funktional $f(x)$. Entsprechend wird man von einem *komplexen linearen* Funktional sprechen, wenn $f(\alpha x) = \alpha f(x)$ für alle komplexen α ist.

Im folgenden werden wir hauptsächlich lineare Operatoren und lineare Funktionale betrachten.

Der Operator A aus den Beispielen 1, 2, 3 und 7 ist linear, während im Beispiel 4 ein nichtlinearer Operator angegeben ist. Das Funktional aus Beispiel 6 ist linear, das aus 5 dagegen nichtlinear.

Wir betrachten nun als Beispiel ein lineares Funktional $f(x)$ im n-dimensionalen Raum C^n, das in ganz C^n definiert ist. Es sei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ eine Basis in C^n. Für $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$ und $c_k = f(e_k)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, gilt dann

$$f(x) = \xi_1 f(e_1) + \cdots + \xi_n f(e_n) = c_1 \xi_1 + \cdots + c_n \xi_n.$$

Jedes lineare Funktional in C^n wird demnach durch eine Formel

$$f(x) = c_1 \xi_1 + \cdots + c_n \xi_n \tag{5}$$

gegeben, in der $\xi_1, \ldots, \xi_n$ die Koordinaten von x in bezug auf eine feste Basis und $c_1, \ldots, c_n$ irgendwelche Zahlen bezeichnen.

Offenbar ist umgekehrt auch jedes durch (5) definierte Funktional linear.

Insbesondere wird jedes lineare Funktional im dreidimensionalen reellen Raum R^3, dessen Definitionsbereich mit dem ganzen Raum übereinstimmt, durch die Formel $f(x) = c_1 \xi_1 + c_2 \xi_2 + c_3 \xi_3$ gegeben. Durch die Gleichung $f(x) = c$ wird für festes c eine Ebene im R^3 definiert.

Es sei jetzt $f(x)$ ein beliebiges lineares Funktional in einem beliebigen linearen Raum X und $\mathfrak{D}_f = X$. In Analogie zum Fall des Raumes R^3 wird die Gesamtheit aller Vektoren x aus X, die der Gleichung $f(x) = c$ für ein festes c genügen, eine *Hyperebene* in X genannt.

Jede Hyperebene $f(x) = c$ eines reellen Raumes R teilt den gesamten Raum in zwei Teile (Halbräume), für die die Ungleichungen $f(x) \leqq c$ und $f(x) \geqq c$ gelten und welche die Hyperebene $f(x) = c$ gemeinsam haben.

Liegt eine Menge M ganz in einem dieser Halbräume, so sagt man, daß sich M *auf einer Seite* der Hyperebene $f(x) = c$ befindet.

Durch die Formel $T_a x = x + a$, in der a einen festen Vektor bezeichnet, wird ein *Verschiebungsoperator* definiert. Offenbar *geht bei der Verschiebung jede Hyperebene* $f(x) = c$ *in die Hyperebene* $f(x) = f(a) + c$ *über.*

Aufgabe. Man zeige, daß jeder lineare Operator von C^n in C^m mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A = C^n$ die in Beispiel 1 angegebene Gestalt hat.

6. Das Rechnen mit Operatoren. a) *Addition von Operatoren.* Unter der *Summe* $A + B$ zweier Operatoren A und B von R in R' verstehen wir den durch die Bedingungen

$$\mathfrak{D}_{A+B} = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B, \tag{1}$$

$$(A + B)x = Ax + Bx \quad \text{für} \quad x \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B \tag{2}$$

definierten Operator. Wie man leicht nachprüft, ist

$$A + B = B + A \quad \text{und} \quad A + (B + C) = (A + B) + C. \tag{3}$$

Mit 0 werde der durch die Bedingungen $\mathfrak{D}_0 = R$ und $0x = 0$ definierte Operator von R in R' bezeichnet (das Symbol 0 auf der rechten Seite der Gleichung

$0x = 0$ bedeutet den Nullvektor in R'!). Wir nennen ihn den *Nulloperator*. Offenbar ist

$$A + 0 = A. \tag{4}$$

b) *Multiplikation eines Operators mit einer Zahl.* Unter dem *Produkt* αA eines Operators A von R in R' mit einer Zahl α wird der durch die Bedingungen

$$\mathfrak{D}_{\alpha A} = \mathfrak{D}_A, \tag{5}$$

$$(\alpha A)x = \alpha(Ax) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{D}_A \tag{6}$$

definierte Operator von R in R' verstanden. Hierbei gelten die Beziehungen

$$\alpha(\beta A) = (\alpha\beta)A, \tag{7}$$

$$(\alpha + \beta)A = \alpha A + \beta A, \tag{8}$$

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B, \tag{9}$$

$$1 \cdot A = A, \tag{10}$$

$$0 \cdot A \subset 0 \tag{11}$$

(in der letzten Beziehung steht links die Zahl Null, rechts der Nulloperator).

Wir wollen z. B. die Richtigkeit von (9) nachprüfen. Der Nachweis der Richtigkeit der übrigen Beziehungen werde dem Leser überlassen. Zunächst gilt

$$\mathfrak{D}_{\alpha(A+B)} = \mathfrak{D}_{A+B} = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B,$$

$$\mathfrak{D}_{\alpha A + \alpha B} = \mathfrak{D}_{\alpha A} \cap \mathfrak{D}_{\alpha B} = \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B,$$

so daß

$$\mathfrak{D}_{\alpha(A+B)} = \mathfrak{D}_{\alpha A + \alpha B} \tag{12}$$

ist. Für $x \in \mathfrak{D}_{\alpha(A+B)}$ gilt außerdem

$$\alpha(A + B)x = \alpha(Ax + Bx) = \alpha Ax + \alpha Bx = (\alpha A + \alpha B)x. \tag{13}$$

Auf Grund der Definition der Gleichheit von Operatoren folgt nun aber aus (12) und (13)

$$\alpha(A + B) = \alpha A + \alpha B.$$

c) *Produkt von Operatoren.* Es sei B ein Operator von R in R' und A ein Operator von R' in R''. Dann wird unter dem *Produkt* AB der Operatoren A und B derjenige Operator von R in R'' verstanden, dessen Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{AB}$ genau aus denjenigen Vektoren $x \in \mathfrak{D}_B$ besteht, für die $Bx \in \mathfrak{D}_A$ ist, und der durch die Gleichung

$$(AB)x = A(Bx) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{D}_{AB}$$

definiert ist. Wie man leicht sieht, ist

$$A(BC) = (AB)C, \tag{14}$$

$$(A_1 + A_2)B = A_1B + A_2B. \tag{15}$$

Ist A linear, so gilt auch noch

$$A(B_1 + B_2) \supset A B_1 + A B_2. \tag{16}$$

Der Beweis dieser drei Beziehungen bleibe dem Leser überlassen.

Mit 1_R bezeichnen wir jetzt den durch die Bedingung

$$1_R x = x \quad \text{für alle} \quad x \in R \tag{17}$$

definierten Operator in R. Der Definitionsbereich des sogenannten *Einsoperators* 1_R in R ist der ganze Raum R. Der Index R wird gewöhnlich fortgelassen, jedenfalls dann, wenn hierdurch keine Mißverständnisse entstehen können. Ist A ein Operator von R in R', so gilt offenbar

$$1_{R'} \cdot A = A\, 1_R = A. \tag{18}$$

d) *Potenzen eines Operators. Operatorpolynome.* Es sei A ein Operator in R. Das Produkt $A \cdot A$ wird *Quadrat* des Operators A genannt und mit A^2 bezeichnet. Entsprechend wird man das Produkt $A^2 \cdot A$ mit A^3 bezeichnen und A^n für beliebiges n induktiv definieren, indem man

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \tag{19}$$

setzt. Außerdem wird

$$A^0 = 1_R \tag{20}$$

gesetzt.

Es ist dann

$$A^n A^m = A^{n+m}. \tag{21}$$

Für $m = 1$ stimmt diese Beziehung mit (19) überein. Durch Induktion bestätigt man nun leicht unter Berücksichtigung der Assoziativität (14) die Richtigkeit von (21) für jedes natürliche m.

Jetzt sei

$$p(\lambda) = c_0 + c_1\lambda + \cdots + c_n\lambda^n \tag{22}$$

ein beliebiges Polynom. Unter dem *Polynom* $p(A)$ des Operators A in R wird dann der Operator

$$p(A) = c_0 1 + c_1 A + \cdots + c_n A^n \tag{23}$$

verstanden. Unter Berücksichtigung der Grundeigenschaften der Addition, der Multiplikation mit einer Zahl und der Multiplikation von Operatoren [insbesondere wegen (21)] schließen wir:

Für einen festen linearen Operator A hat die Zuordnung $p(\lambda) \to p(A)$ folgende Eigenschaften:

1. *Aus* $p(\lambda) = \alpha_1 p_1(\lambda) + \alpha_2 p_2(\lambda)$ *folgt* $p(A) = \alpha_1 p_1(A) + \alpha_2 p_2(A)$;
2. *aus* $p(\lambda) = p_1(\lambda)\, p_2(\lambda)$ *folgt* $p(A) = p_1(A)\, p_2(A)$.

e) *Der inverse Operator.* Ein Operator B von R' in R heißt *inverser Operator* eines Operators A von R in R', wenn $\mathfrak{D}_B = \mathfrak{R}_A$ und

$$B A y = y \quad \text{für alle} \quad y \in \mathfrak{D}_A \quad \text{ist.} \tag{24}$$

Wie wir sogleich beweisen werden, ist dann auch $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{R}_B$ und

$$A B x = x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{D}_B. \tag{25}$$

Durchläuft y die Menge $\mathfrak{D}_A$, so durchläuft Ay ganz $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{D}_B$, also $y = BAy$ genau die Menge $\mathfrak{R}_B$. Demnach ist $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{R}_B$. Wenden wir ferner A auf beide Seiten von (24) an und setzen $x = Ay$, so erhalten wir $ABx = x$, wobei $x = Ay$ dann die ganze Menge $\mathfrak{D}_B = \mathfrak{R}_A$ durchläuft.

Der zu A inverse Operator wird mit A^{-1} bezeichnet. Aus seiner Definition folgen dann unmittelbar die Beziehungen

$$\mathfrak{D}_{A^{-1}} = \mathfrak{R}_A \quad \text{und} \quad \mathfrak{R}_{A^{-1}} = \mathfrak{D}_A \tag{26}$$

sowie

$$A^{-1}Ax = x, \quad AA^{-1}y = y \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{D}_A,\ y \in \mathfrak{D}_{A^{-1}}. \tag{27}$$

Die Operatoren A und A^{-1} treten in diesen Beziehungen symmetrisch auf. Daher ist A (wie schon oben bemerkt wurde) inverser Operator von A^{-1},

$$(A^{-1})^{-1} = A. \tag{28}$$

Die Beziehungen (27) bedeuten offenbar, daß

$$A^{-1}A \subset 1_R, \quad AA^{-1} \subset 1_{R'} \tag{29}$$

ist. Ist A ein invertierbarer Operator in R, so kann man auch ganze negative Potenzen von A definieren; man setzt hierzu für $n = 1, 2, 3, \ldots$ einfach

$$A^{-n} = (A^{-1})^n. \tag{30}$$

Es sei bemerkt, daß es nicht zu jedem Operator A einen inversen gibt, so daß keinesfalls von jedem Operator A in R ganze negative Potenzen A^{-n} gebildet werden können.

Ein linearer Operator A hat genau dann einen inversen Operator, wenn die Gleichung

$$Ax = 0, \quad x \in \mathfrak{D}_A, \tag{31}$$

nur für $x = 0$ gilt.

Beweis. Existiert ein inverser Operator A^{-1}, so erhalten wir durch Anwenden von A^{-1} auf beide Seiten von (31) wegen (27) die Gleichung $x = A^{-1}Ax = 0$. Folglich ist unsere Bedingung notwendig. Nun sei die Bedingung erfüllt. Wir definieren einen Operator B, indem wir $\mathfrak{D}_B = \mathfrak{R}_A$ und

$$By = x \quad \text{für} \quad y = Ax,\ x \in \mathfrak{D}_A, \tag{32}$$

setzen. Durch diese Bedingung ist B eindeutig definiert. Wäre nämlich $y = Ax_1 = Ax_2$, so müßte $A(x_1 - x_2) = 0$, auf Grund unserer Bedingungen also $x_1 - x_2 = 0$ und $x_1 = x_2$ sein, d. h. aber, durch die Formel $y = Ax$ wird jedem y genau ein x zugeordnet. Aus (32) folgt schließlich, daß $x = By = BAx$ für alle $x \in \mathfrak{D}_A$ ist, d. h., B ist ein zu A inverser Operator.

Aufgaben. Man beweise: a) Der Addition von zwei linearen Operatoren von C^n in C^m mit dem Definitionsbereich C^n entspricht die Addition ihrer Matrizen (vgl. die Aufgabe zu Nr. 5); b) der Multiplikation eines derartigen Operators mit einer Zahl entspricht die Multiplikation der zugehörigen Matrix mit dieser Zahl; c) der Multiplikation von zwei Operatoren von C^n in C^m bzw. C^m in C^p entspricht die Multiplikation ihrer Matrizen (genauer, ist B ein Operator von C^n in C^m und A ein Operator von C^m in C^p, so ist die Matrix des Produktoperators AB das Produkt der zu A und B gehörigen Matrizen, wobei diese in derselben Reihenfolge zu multiplizieren sind); d) ein linearer Operator von C^n

in C^m mit dem Definitionsbereich C^n besitzt genau dann einen inversen Operator mit dem Definitionsbereich C^m, wenn $n = m$ und die Determinante der zu A gehörigen Matrix von Null verschieden ist; e) das Produkt $A_1 A_2$ von zwei Integraloperatoren in $C(a, b)$ mit den Kernen $K_1(t_1, t_2)$ und $K_2(t_1, t_2)$ (vgl. Beispiel 7 aus Nr. 5) ist ein Integraloperator mit dem Kern

$$K(t_1, t_2) = \int_a^b K_1(t_1, t) K_2(t, t_2)\, dt. \tag{33}$$

Die Bildung des Kerns $K(t_1, t_2)$ nach (33) heißt *Komposition* der Kerne K_1 und K_2.

7. Invariante Teilräume. Es sei A ein linearer Operator in R mit $\mathfrak{D}_A = R$. Ein Teilraum $\mathfrak{M} \subset R$ heißt *invariant* in bezug auf A, wenn A jedem Vektor aus $\mathfrak{M}$ einen Vektor aus $\mathfrak{M}$ zuordnet, d. h., wenn

$$\text{aus } \xi \in \mathfrak{M} \text{ stets } A\xi \in \mathfrak{M} \text{ folgt.} \tag{1}$$

Ist $\mathfrak{M}$ invariant in bezug auf A, so kann A auch als Operator in $\mathfrak{M}$ angesehen werden. Wird nämlich $A_{\mathfrak{M}}\xi = A\xi$ für $\xi \in \mathfrak{M}$ gesetzt, so ist $A_{\mathfrak{M}}$ ein Operator in $\mathfrak{M}$.

Wir betrachten nun den Quotientenraum $R/\mathfrak{M}$ (vgl. Nr. 4). Ist $\mathfrak{M}$ invariant in bezug auf A, so wird durch die Beziehung

$$A^\wedge \xi_x = \xi_y \quad \text{für} \quad Ax = y$$

in $R/\mathfrak{M}$ ein Operator $A^\wedge$ definiert. Diese Definition ist von der Wahl des Repräsentanten $x \in \xi_x$ unabhängig. Aus $\xi_{x_1} = \xi_x$ folgt nämlich $x_1 - x \in \mathfrak{M}$ und hieraus $Ax_1 - Ax = A(x_1 - x) \in \mathfrak{M}$, weil $\mathfrak{M}$ invariant ist. Die Vektoren $y_1 = Ax_1$ und $y = Ax$ bestimmen demzufolge ein und dieselbe Klasse ξ_y.

8. Konvexe Mengen und konvexe Funktionale. Unter der *Verbindungsstrecke* $[x_1, x_2]$ von zwei Vektoren x_1 und x_2 wird die Gesamtheit aller Vektoren $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $0 \leqq t \leqq 1$, verstanden. Die Vektoren x_1 und x_2 selbst heißen *Endpunkte* der Strecke $[x_1, x_2]$, während die übrigen Punkte dieser Strecke ihre *inneren Punkte* genannt werden sollen.

Eine Menge aus R heißt *konvex*, wenn sie mit je zwei Vektoren x_1 und x_2 stets auch deren Verbindungsstrecke enthält.

Aus dieser Definition folgt sofort, daß der nichtleere Durchschnitt konvexer Mengen ebenfalls eine konvexe Menge ist.

I. *Gehören $x_1, x_2, \ldots, x_n$ zu einer konvexen Menge K, so gehört auch $t_1x_1 + t_2x_2 + \cdots + t_nx_n$ für $t_1 \geqq 0, \ldots, t_n \geqq 0$ und $t_1 + t_2 + \cdots + t_n = 1$ zu K.*

Für $n = 2$ stimmt diese Behauptung mit der Definition der konvexen Menge überein (weil $t_1x_1 + t_2x_2$ zur Strecke $[x_1, x_2]$ gehört). Für beliebiges n zeigt man die Richtigkeit durch Induktion. Ist beispielsweise $t_1 + t_2 > 0$ und $t_1 + t_2 + t_3 = 1$, so gehört $\frac{t_1}{t_1+t_2}x_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}x_2$ und damit auch

$$t_1x_1 + t_2x_2 + t_3x_3 = (t_1 + t_2)\left(\frac{t_1}{t_1+t_2}x_1 + \frac{t_2}{t_1+t_2}x_2\right) + t_3x_3$$

zu K.

Ein Punkt x_0 heißt *Randpunkt* einer konvexen Menge K, wenn es zwei Strecken $[x_1, x_0]$, $[x_0, x_2]$ mit dem gemeinsamen Endpunkt x_0 gibt derart, daß alle inneren Punkte von $[x_1, x_0]$ zur Menge K gehören, von $[x_0, x_2]$ aber kein innerer Punkt zu K gehört. Der Randpunkt x_0 kann selbst zur Menge K gehören, braucht es aber nicht. Die Gesamtheit aller Randpunkte einer konvexen Menge wird ihr *Rand* genannt.

II. *Bei einer Verschiebung $T_a x = x + a$ geht eine konvexe Menge K in die konvexe Menge $K + a$ über, und der Rand von K wird zum Rand von $K + a$.*[1]

Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Tatsache, daß bei der Verschiebung eine Strecke $[x_1, x_2]$ in die Strecke $[x_1 + a, x_2 + a]$ übergeht.

Ein Funktional $p(x)$, das in ganz R definiert ist, heißt *konvex*, wenn folgendes gilt:

1. $p(x) \geqq 0$ für alle $x \in R$;
2. $p(x + y) \leqq p(x) + p(y)$ für alle $x, y \in R$;
3. $p(\alpha x) = \alpha p(x)$ für alle $\alpha \geqq 0$ und alle $x \in R$.

III. *Ist $p(x)$ ein konvexes Funktional, so ist die Menge K aller Vektoren, die der Bedingung*

$$p(x - a) \leqq c, \quad c > 0 \text{ beliebig}, \quad a \in R \text{ beliebig},$$

genügen, konvex, und ihr Rand besteht genau aus denjenigen Vektoren x, für die $p(x - a) = c$ ist.

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß $a = 0$ ist; wegen Satz II läßt sich nämlich der allgemeine Fall mit Hilfe der Verschiebung $T_a x = x + a$ auf diesen Sonderfall zurückführen. Es sei nun $x_1, x_2 \in K$, d. h. $p(x_1) \leqq c$, $p(x_2) \leqq c$. Dann gilt wegen der Bedingungen 2 und 3 für $0 \leqq t \leqq 1$

$$p\big((1-t)x_1 + t x_2\big) \leqq p\big((1-t)x_1\big) + p(t x_2)$$
$$= (1-t)\, p(x_1) + t p(x_2) \leqq (1-t)c + tc = c.$$

Folglich liegt die ganze Strecke $[x_1, x_2]$ in K, d. h. aber, K ist konvex.

Wir haben noch die zweite Behauptung zu beweisen. Es sei $p(x_0) = c$. Wir setzen $x_1 = \alpha x_0$ und $x_2 = \beta x_0$ mit $0 < \alpha < 1$ und $\beta > 1$. Für $0 < t < 1$ gilt dann

$$p\big((1-t)x_0 + t x_1\big) = p\big((1 - t + \alpha t)x_0\big)$$
$$= [1 - (1-\alpha)t]c < c,$$
$$p\big((1-t)x_0 + t x_2\big) = p\big((1 - t + \beta t)x_0\big)$$
$$= [1 + (\beta - 1)t]c > c.$$

[1] Mit $M_1 + M_2$ bezeichnen wir, wenn M_1 und M_2 Teilmengen des linearen Raumes sind, die Gesamtheit aller Vektoren $x + y$, $x \in M_1$ und $y \in M_2$; insbesondere bezeichnet $M_1 + a$ die Gesamtheit aller Vektoren $x + a$, $x \in M$. Entsprechend bezeichnet αM die Gesamtheit der Vektoren αx, $x \in M$. Ist schießlich $\mathfrak{A}$ eine Menge von Zahlen, so bezeichnet $\mathfrak{A} M$ die Gesamtheit der Vektoren αx, $\alpha \in \mathfrak{A}$ und $x \in M$.

Demzufolge gehören alle inneren Punkte von $[x_1, x_0]$ zu K, während von $[x_0, x_2]$ kein innerer Punkt zu K gehört, d. h., x_0 ist Randpunkt von K.

Nun sei x_0 als Randpunkt von K vorausgesetzt. Die inneren Punkte von $[x_1, x_0]$ sollen zu K gehören, die inneren Punkte von $[x_0, x_2]$ dagegen nicht. Für $0 < t < 1$ soll also

$$p\big((1-t)x_0 + tx_1\big) \leqq c \quad \text{und} \quad p\big((1-t)x_0 + tx_2\big) > c$$

sein. Dann ist aber

$$\begin{aligned}(1-t)\,p(x_0) = p\big((1-t)x_0\big) &= p\big((1-t)x_0 + tx_1 - tx_1\big)\\ &\leqq p\big((1-t)x_0 + tx_1\big) + tp(-x_1) \leqq c + tp(-x_1)\end{aligned}$$

und

$$c < p\big((1-t)x_0\big) + p(tx_2) = (1-t)\,p(x_0) + tp(x_2),$$

also

$$(1-t)\,p(x_0) \leqq c + tp(-x_1) \quad \text{und} \quad c < (1-t)\,p(x_0) + tp(x_2).$$

Führt man nun in diesen Ungleichungen den Grenzübergang $t \to 0$ aus, so ergibt sich

$$p(x_0) \leqq c \quad \text{und} \quad c \leqq p(x_0),$$

woraus $p(x_0) = c$ folgt.

Bemerkung. Die Behauptung des Satzes III gilt auch dann noch, wenn die Vektoren x der Menge K einer Bedingung der Gestalt $p(x - a) < c$ genügen.

Beispiele. 1. Im dreidimensionalen reellen Raum R^3 liegen die Endpunkte der Vektoren $x = (1-t)x_1 + tx_2$, $0 \leqq t \leqq 1$, auf der Verbindungsstrecke der Endpunkte der Vektoren x_1 und x_2 (Abb. 2).

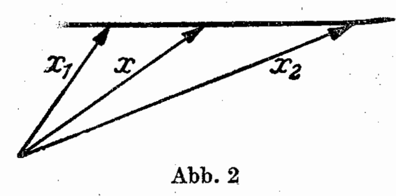


Abb. 2

2. Setzen wir im zweidimensionalen Raum R^2 für $x = (\xi_1, \xi_2)$

$$p(x) = \sqrt{a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2}, \quad a_1 > 0, \quad a_2 > 0,$$

so ist $p(x)$, wie man leicht nachprüft, ein konvexes Funktional. Die Endpunkte aller Vektoren x, für die $p(x) < c$ ist, füllen das Innere der Ellipse

$$a_1\xi_1^2 + a_2\xi_2^2 = c^2$$

aus.

9. Sätze über die Fortsetzung eines linearen Funktionals.

Hilfssatz. *Gegeben sei ein Teilraum $\mathfrak{M}$ eines reellen linearen Raumes R. Mit $\mathfrak{M}'$ werde der von $\mathfrak{M}$ und einem Vektor $x_0 \notin \mathfrak{M}$ aufgespannte Teilraum bezeichnet. Ferner sei $p(x)$ ein konvexes Funktional über $\mathfrak{M}'$ und $f(x)$ ein lineares Funktional über $\mathfrak{M}$, das der Bedingung*

$$f(x) \leqq p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{M} \tag{1}$$

genügt. Dann kann $f(x)$ zu einem linearen Funktional $f'(x)$ fortgesetzt werden, das in ganz $\mathfrak{M}'$ definiert ist und der Bedingung

$$f'(x) \leqq p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{M}' \tag{2}$$

genügt.

Beweis. Wegen (1) gilt für $y', y'' \in \mathfrak{M}$

$$f(y') - f(y'') = f(y' - y'') \leqq p(y' - y'') = p\big((y' + x_0) - (y'' + x_0)\big)$$
$$\leqq p(y' + x_0) + p(-y'' - x_0).$$

Hieraus folgt

$$-p(-y'' - x_0) - f(y'') \leqq p(y' + x_0) - f(y').$$

Daher sind

$$m = \sup_{y \in \mathfrak{M}} \{-p(-y - x_0) - f(y)\}$$

und

$$M = \inf_{y \in \mathfrak{M}} \{p(y + x_0) - f(y)\}$$

endliche Zahlen, und es ist

$$m \leqq M.$$

Nun sei c_0 irgendeine zwischen m und M liegende Zahl,

$$m \leqq c_0 \leqq M.$$

Für alle $y \in \mathfrak{M}$ ist dann

$$-p(-y - x_0) - f(y) \leqq c_0 \leqq p(y + x_0) - f(y). \tag{3}$$

Nach Definition ist $\mathfrak{M}'$ die Gesamtheit aller Vektoren x der Gestalt

$$x = y + \alpha x_0, \tag{4}$$

wobei $y \in \mathfrak{M}$ und α eine reelle Zahl ist. Wir definieren nun über $\mathfrak{M}'$ ein Funktional $f'(x)$, indem wir

$$f'(x) = f(y) + \alpha c_0$$

setzen, wenn x die Darstellung $x = y + \alpha x_0$ hat. Für jedes x aus $\mathfrak{M}'$ ist diese Darstellung sicher eindeutig, so daß $f'(x)$ durch den Vektor $x \in \mathfrak{M}'$ eindeutig definiert ist. Um dies einzusehen, schließen wir so: Aus $x = y_1 + \alpha_1 x_0$ und $x = y_2 + \alpha_2 x_0$ folgt

$$y_1 - y_2 = (\alpha_2 - \alpha_1) x_0. \tag{5}$$

Nun ist $y_1 - y_2 \in \mathfrak{M}$, aber $(\alpha_2 - \alpha_1) x_0 \notin \mathfrak{M}$ für $\alpha_2 - \alpha_1 \neq 0$. Die Gleichung (5) kann demnach tatsächlich nur für $\alpha_2 - \alpha_1 = 0$ und $y_1 - y_2 = 0$ bestehen. Wie man leicht nachprüft, ist das Funktional $f'(x)$ linear. Es bleibt also nur noch nachzuweisen, daß die Bedingung (2) erfüllt ist, d. h., daß

$$f(y) + \alpha c_0 \leqq p(y + \alpha x_0) \tag{2'}$$

für alle $y \in \mathfrak{M}$ und alle reellen α gilt. Für $\alpha = 0$ fällt diese Ungleichung mit der Voraussetzung (1) zusammen. Es genügt daher, den Fall $\alpha \neq 0$ zu betrachten.

Es sei zuerst $\alpha > 0$. Auf der rechten Seite von (3) ersetzen wir y durch $\frac{1}{\alpha} y$. Dies ergibt

$$c_0 \leqq p\left(\frac{y}{\alpha} + x_0\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

woraus

$$\alpha f\left(\frac{y}{\alpha}\right) + \alpha c_0 \leqq \alpha p\left(\frac{y}{\alpha} + x_0\right)$$

folgt, d. h., es ist

$$f(y) + \alpha c_0 \leqq p(y + \alpha x_0).$$

Nun sei $\alpha < 0$. Auf der linken Seite von (3) nehmen wir $\frac{1}{\alpha} y$ für y. Dann haben wir

$$-p\left(-\frac{y}{\alpha} - x_0\right) - f\left(\frac{y}{\alpha}\right) \leqq c_0.$$

Hieraus folgt

$$(-\alpha)\, p\left(-\frac{y}{\alpha} - x_0\right) \geqq \alpha c_0 + \alpha f\left(\frac{y}{\alpha}\right),$$

d. h., es ist

$$p(y + \alpha x_0) \geqq f(y) + \alpha c_0.$$

Damit ist in beiden Fällen gezeigt, daß die Bedingung (2) erfüllt ist, und der Hilfssatz ist bewiesen.

Theorem 1 (HAHN [1], BANACH [1]). *Es sei $p(x)$ ein konvexes Funktional, das über einem reellen linearen Raum R definiert ist, und $f(x)$ ein lineares Funktional, das über einem Teilraum $\mathfrak{M} \subset R$ definiert ist und der Bedingung*

$$f(x) \leqq p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{M} \tag{6}$$

genügt. Dann läßt sich $f(x)$ zu einem linearen Funktional $F(x)$ fortsetzen, dessen Definitionsbereich der ganze Raum ist und das der Bedingung

$$F(x) \leqq p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in R \tag{7}$$

genügt.

Beweis. Es bezeichne F_p die Gesamtheit aller linearen Funktionale $f'(x)$, welche Fortsetzungen des Funktionals $f(x)$ sind und der Ungleichung $f'(x) \leqq p(x)$ für alle $x \in \mathfrak{D}_{f'}$ genügen. Für zwei Funktionale f_1', f_2' wollen wir $f_1' \prec f_2'$ schreiben, wenn f_2' eine Fortsetzung von f_1' ist. Dadurch wird F_p zu einer halbgeordneten Menge, die der Voraussetzung des ZORNschen Lemmas genügt (vgl. Anhang I), und zwar tritt als obere Grenze einer linear geordneten Menge $F_p' \subset F_p$ das in $\bigcup_{f' \in F_p'} \mathfrak{D}_{f'}$ durch die Gleichung $f^\wedge(x) = f'(x)$ für $x \in \mathfrak{D}_{f'}$ und $f' \in F_p'$ definierte Funktional $f^\wedge(x)$ auf. Demzufolge hat F_p ein maximales Element $F(x)$, das auf Grund des obigen Hilfssatzes im ganzen Raum R definiert sein muß.

Folgerung 1. *Ist $p(x)$ ein konvexes Funktional über einem reellen linearen Raum R, so gibt es zu jedem Vektor $x_0 \in R$ ein in ganz R definiertes lineares Funktional, das den Bedingungen*

$$F(x_0) = p(x_0), \tag{8}$$

$$F(x) \leqq p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in R$$

genügt.

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit aller Vektoren αx_0 mit reellem α. Offenbar ist $\mathfrak{M}$ ein Teilraum von R. Wir definieren nun über $\mathfrak{M}$ ein lineares Funktional $f(x)$ durch die Formel

$$f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0). \tag{9}$$

Es ist dann

$$f(x_0) = p(x_0). \tag{10}$$

Wir behaupten, daß $f(x)$ der Bedingung (6) genügt. Nehmen wir diese Behauptung als bewiesen an, so kann $f(x)$ nach Theorem 1 zu einem linearen Funktional $F(x)$ fortgesetzt werden, das über ganz R definiert ist und der Bedingung (7) genügt. Wegen (10) ist dann aber auch die Bedingung (8) erfüllt, womit die Folgerung bewiesen ist.

Die Bedingung (6) reduziert sich für $f(x)$ darauf, daß die Ungleichung

$$f(\alpha x_0) \leqq p(\alpha x_0) \tag{11}$$

für alle reellen α gilt. Für $\alpha \geqq 0$ ist sie erfüllt, weil wegen (9)

$$f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) = p(\alpha x_0)$$

ist, also in (6) das Gleichheitszeichen steht. Um zu zeigen, daß (11) für $\alpha < 0$ gilt, berücksichtigen wir, daß $0 = p(0) \leqq p(x_0) + p(-x_0)$ und daher

$$-p(x_0) \leqq p(-x_0)$$

ist. Für $\alpha < 0$ gilt demnach

$$f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0) \leqq -\alpha p(-x_0) = p(\alpha x_0),$$

was zu beweisen war.

Ein konvexes Funktional $p(x)$ (über einem reellen oder komplexen linearen Raum R) wird *symmetrisch* genannt, wenn $p(\alpha x) = |\alpha| p(x)$ für alle (reellen bzw. komplexen) Zahlen α und alle $x \in R$ ist.[1]) Eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines (reellen oder komplexen) Raumes R wird *symmetrisch* genannt, wenn für $|\alpha| = 1$ mit $x \in \mathfrak{M}$ auch $\alpha x \in \mathfrak{M}$ gilt.

Für ein symmetrisches konvexes Funktional $p(x)$ gelten folgende Aussagen:

1. *Die Gesamtheit $\mathfrak{M}$ aller Vektoren x aus R, die der Bedingung $p(x) = 0$ genügen, ist ein Teilraum in R.*

2. *Für festes $c > 0$ ist die Gesamtheit K aller Vektoren x aus R, die der Ungleichung $p(x) \leqq c$ genügen, eine symmetrische konvexe Menge in R.*

Für $x, y \in \mathfrak{M}$ gilt $p(x) = 0$, $p(y) = 0$. Es ist also $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = 0$ und $0 \leqq p(x + y) \leqq p(x) + p(y) = 0$. Folglich gehören auch αx und $x + y$ zu $\mathfrak{M}$, so daß $\mathfrak{M}$ tatsächlich ein Teilraum ist.

Jetzt sei $x \in K$ und $|\alpha| = 1$. Dann ist $p(\alpha x) = |\alpha| p(x) = p(x) \leqq c$ und daher $\alpha x \in K$. Folglich ist K symmetrisch. Die Konvexität von K wurde bereits in Nr. 8 nachgewiesen.

Theorem 2 (Suchomlinow[2]) [1]). *Es sei $p(x)$ ein symmetrisches konvexes Funktional über einem komplexen linearen Raum R und $f(x)$ ein lineares Funktional, das über einem Teilraum $\mathfrak{M} \subset R$ definiert ist und der Bedingung*

$$|f(x)| \leqq p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{M} \tag{12}$$

genügt. Dann kann $f(x)$ zu einem linearen Funktional $F(x)$ fortgesetzt werden, dessen Definitionsbereich der ganze Raum R ist und das der Bedingung

$$|F(x)| \leqq p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in R \tag{13}$$

genügt.

[1]) Ein symmetrisches konvexes Funktional $p(x)$ heißt auch *Halbnorm*. — *Anm. d. Red.*

[2]) Bohnenblust und Sobczyk [1] erhielten dieses Ergebnis unabhängig von Suchomlinow.

Beweis. Wir betrachten R als reellen Raum und setzen

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x), \tag{14}$$

wobei $f_1(x)$ und $f_2(x)$ reell seien. Offenbar sind dann $f_1(x)$ und $f_2(x)$ reelle lineare Funktionale über dem Teilraum $\mathfrak{M}$, wenn dieser als reeller Raum angesehen wird. Da

$$i[f_1(x) + i f_2(x)] = i f(x) = f(ix) = f_1(ix) + i f_2(ix)$$

ist, gilt

$$f_1(ix) = -f_2(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{M}. \tag{15}$$

Aus (12) folgt $f_1(x) \leqq p(x)$ für alle $x \in \mathfrak{M}$. Daher kann $f_1(x)$ nach Theorem 1 zu einem reellen Funktional $F_1(x)$ fortgesetzt werden, das über ganz R definiert ist und der Bedingung

$$F_1(x) \leqq p(x) \quad \text{für alle} \quad x \in R \tag{16}$$

genügt. Wir setzen nun

$$F(x) = F_1(x) - i F_1(ix). \tag{17}$$

Wegen (14) und (15) ist dann $F(x) = f(x)$ über $\mathfrak{M}$.

Aus (17) folgt nun aber $F(ix) = i F(x)$, so daß $F(x)$ ein komplexes lineares Funktional über dem komplexen Raum R ist. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß $F(x)$ die Bedingung (13) erfüllt. Für $F(x) = 0$ ist dies klar. Es sei also $F(x) \neq 0$. Wird $\theta = \arg F(x)$ gesetzt, so gilt wegen (16)

$$|F(x)| = F(e^{-i\theta} x) = F_1(e^{-i\theta} x) \leqq p(e^{-i\theta} x) = p(x),$$

womit Theorem 2 vollständig bewiesen ist.

Folgerung 2. *Ist $p(x)$ ein symmetrisches konvexes Funktional über einem komplexen linearen Raum R, so gibt es zu jedem $x_0 \in R$ ein lineares Funktional $F(x)$, das über ganz R definiert ist und den Bedingungen*

$$F(x_0) = p(x_0), \tag{18}$$

$$|F(x)| \leqq p(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in R \tag{13}$$

genügt.

Beweis. Es bezeichne $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit aller Vektoren αx_0, wenn α sämtliche komplexen Zahlen durchläuft. Über $\mathfrak{M}$ definiert man ein Funktional $f(x)$ durch die Formel

$$f(\alpha x_0) = \alpha p(x_0). \tag{19}$$

Dann ist für $f(x)$ die Bedingung (12) erfüllt, weil $|f(\alpha x_0)| = |\alpha| p(x_0) = p(\alpha x_0)$ ist. Nach Theorem 2 kann das Funktional $f(x)$ zu einem linearen Funktional $F(x)$ fortgesetzt werden, das der Bedingung (13) genügt. Wegen (19) ist auch die Bedingung (18) erfüllt.

Diese Aussagen haben eine einfache geometrische Bedeutung. Um beispielsweise die geometrische Bedeutung der Folgerung 1 zu erkennen, nehmen wir K als konvexe Menge, die durch die Ungleichung $p(x) < c$ für festes $c > 0$ definiert ist, x_0 als Randpunkt von K und P als die durch die Gleichung $F(x) = c$ definierte Hyperebene. Da $F(x_0) = p(x_0) = c$ ist, geht diese Hyperebene durch den Punkt x_0. Andererseits ist $F(x) \leqq p(x) < c$ für $x \in K$, so daß K auf einer Seite der Hyperebene $F(x) = c$ liegt. Eine Hyperebene, die durch einen Rand-

punkt einer konvexen Menge K geht, werde *Stützhyperebene* von K genannt, wenn K auf einer Seite dieser Ebene liegt.[1] Unsere Überlegungen zeigen: *Ist $p(x)$ ein konvexes Funktional über einem reellen linearen Raum R und K die Gesamtheit aller x, die einer Ungleichung $p(x-a) < c$ (oder $p(x-a) \leqq c$) genügen, so kann man durch jeden Randpunkt von K eine Stützhyperebene von K legen.*

Dem Leser sei empfohlen, Theorem 1 auf entsprechende Weise geometrisch zu deuten.

Wir nehmen nun an, daß der Vektor x_1 weder der Menge K noch deren Rand angehöre. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $a = 0$ angenommen werden. Dann ist $p(x_1) > c$. Wird $t = \frac{c}{p(x_1)}$ und $x_2 = tx_1$ gesetzt, so ist $p(x_2) = c$. Folglich gehört x_2 zum Rand von K. Nun sei $f(x) = c$ die durch x_2 gehende Stützhyperebene von K. Es sei also $f(x_2) = c$. Dann gilt

$$f(x_1) = f\left(\frac{1}{t}\, x_2\right) = \frac{1}{t}\, f(x_2) = \frac{c}{t} = p(x_1) > c.$$

Demnach befinden sich K und x_1 auf verschiedenen Seiten der Hyperebene $f(x) = c$. Wir sagen in diesem Fall, die Hyperebene $f(x) = c$ *trennt x_1 von K*. Es gilt also: *Ist $p(x)$ ein konvexes Funktional und x_1 ein Vektor, der weder zu der durch eine Ungleichung $p(x-a) < c$ definierten Menge K noch zu deren Rand gehört, so gibt es eine Stützhyperebene von K, die x_1 von K trennt.*

§ 2. Topologische Räume

1. Definition des topologischen Raumes. Eine Menge X von Elementen $x, y, z, \ldots$ wird *topologischer Raum* genannt, wenn in X ein System $\mathfrak{U}$ von Teilmengen U ausgezeichnet ist, das folgende Eigenschaften hat[2]:

1. $\emptyset \in \mathfrak{U}$, $X \in \mathfrak{U}$;
2. die Vereinigung beliebig vieler Mengen aus $\mathfrak{U}$ gehört zu $\mathfrak{U}$;
3. der Durchschnitt endlich vieler Mengen aus $\mathfrak{U}$ gehört zu $\mathfrak{U}$.

Die Mengen $U \in \mathfrak{U}$ sollen die *offenen Mengen* des topologischen Raumes X genannt werden. Die Elemente $x, y, z, \ldots$ heißen *Punkte* dieses Raumes. Man sagt auch, daß das Mengensystem $\mathfrak{U}$ in der Menge X *eine Topologie T definiert.*

In ein und derselben Menge X können verschiedene derartige Systeme $\mathfrak{U}$ gegeben sein. Diese definieren dann in X verschiedene Topologien. Es seien T_1

[1]) Allgemein wird eine durch eine Gleichung $F(x) = c$ definierte Hyperebene eine Stützhyperebene von K genannt, wenn $F(x) \leqq c$ (oder $F(x) \geqq c$) für alle $x \in K$ ist und c die kleinste (bzw. größte) Zahl bezeichnet, für die eine solche Ungleichung gilt. Für das Folgende werden jedoch nur solche Stützhyperebenen benötigt, die durch Randpunkte gehen.

[2]) $\emptyset$ bezeichnet hier und im folgenden stets die leere Menge.

und T_2 Topologien, die durch die Mengensysteme $\mathfrak{U}_1$ bzw. $\mathfrak{U}_2$ definiert sind. Wir sagen, die Topologie T_1 sei *schwächer* als die Topologie T_2, in Zeichen $T_1 < T_2$ oder $T_2 > T_1$, wenn $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2$ und $\mathfrak{U}_1 \neq \mathfrak{U}_2$ ist. In diesem Fall sagen wir auch, T_2 sei *stärker* als T_1. Ist jedoch nur bekannt, daß $\mathfrak{U}_1 \subset \mathfrak{U}_2$ ist, so soll $T_1 \leqq T_2$ oder $T_2 \geqq T_1$ geschrieben werden. Ein System $\mathfrak{B}$ von offenen Mengen heißt *Basis* des topologischen Raumes X, wenn jede offene Menge in X als Vereinigung von Mengen $U \in \mathfrak{B}$ darstellbar ist.

Beispiele. 1. Es sei $X = R^1$ die Gesamtheit aller reellen Zahlen. Als offene Mengen in X nehmen wir alle möglichen Vereinigungen von offenen Intervallen. Offenbar sind dann die Bedingungen 1 bis 3 erfüllt, und R^1 ist ein topologischer Raum. Die offenen Intervalle selbst bilden hierbei eine Basis des Raumes.

2. Es sei $X = C^1$ die Gesamtheit aller komplexen Zahlen. Die aus allen Mengen $|z - z_0| < \varepsilon$ ($z_0 \in C^1$ beliebig und $\varepsilon > 0$ beliebig) bestehende Gesamtheit wählen wir als Basis von C^1. Hierdurch wird C^1 zu einem topologischen Raum.

2. Das Innere einer Menge. Umgebungen. Es sei M eine beliebige Teilmenge des Raumes X. Unter dem *Inneren* von M werde die Vereinigung aller in M enthaltenen offenen Mengen verstanden. Wir bezeichnen es mit $\operatorname{int} M$. Offenbar ist $\operatorname{int} M$ die maximale in M enthaltene offene Menge.

Ist x ein Punkt aus X und $U(x)$ eine offene Menge, die x enthält, so soll $U(x)$ eine *Umgebung* des Punktes x genannt werden. Der Durchschnitt von zwei Umgebungen eines Punktes x ist ebenfalls eine Umgebung von x. Ein System von Umgebungen $W(x)$ eines Punktes x heißt *Umgebungsbasis* dieses Punktes, wenn jede Umgebung $U(x)$ eine der in diesem System enthaltenen Umgebungen $W(x)$ umfaßt.

Wie aus dieser Definition unmittelbar folgt, hat eine Umgebungsbasis folgende Eigenschaften:

1. $x \in W(x)$;

2. der Durchschnitt $W_1(x) \cap W_2(x)$ von zwei beliebigen Umgebungen aus der Basis enthält eine Umgebung, die ebenfalls zur Basis gehört;

3. ist $y \in W(x)$, so gibt es in der Basis des Punktes y eine Umgebung $W(y) \subset W(x)$.

Ist umgekehrt jedem Punkt $x \in X$ ein System von Mengen $W(x)$ zugeordnet, das den Bedingungen 1 bis 3 genügt, so läßt sich in X eine Topologie definieren, indem als offene Mengen alle möglichen Vereinigungen der $W(x)$ genommen werden. Das System der Mengen $W(x)$ selbst bildet dann eine Basis des so entstandenen topologischen Raumes. Aus diesem Grund kann auch dadurch in X eine Topologie definiert sein, daß für jeden Punkt $x \in X$ eine Umgebungsbasis angegeben ist.

In dem Beispiel 1 aus Nr. 1 kann als Umgebungsbasis einer Zahl x_0 das System aller offenen Intervalle $(x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon)$, $\varepsilon > 0$, genommen werden.

Offenbar definieren zwei Umgebungssysteme $\{W'\}$ und $\{W''\}$ genau dann ein und denselben topologischen Raum, wenn jede Umgebung W' eine Umgebung W'' und jede Umgebung W'' eine Umgebung W' enthält.

Ferner ist die Topologie, die durch das System W' definiert ist, genau dann schwächer als die Topologie, die durch das System W'' definiert ist, wenn diese Topologien verschieden sind und jede Umgebung W' eine Umgebung W'' enthält.

Beispiele. 1. Wir definieren im n-dimensionalen Raum R^n eine Topologie, indem wir als Umgebungsbasis eines Punktes $x_0 = \{\xi_1^0, \xi_2^0, \ldots, \xi_n^0\}$ das System aller Mengen $W_\varepsilon(x)$ nehmen, die durch Ungleichungen

$$|\xi_k - \xi_k^0| < \varepsilon \quad (\varepsilon > 0;\ k = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert sind. Man prüft in der Tat leicht nach, daß dann die Bedingungen 1 bis 3 erfüllt sind, also R^n zu einem topologischen Raum wird.

2. Ganz entsprechend läßt sich im komplexen Raum C^n eine Topologie einführen.

3. Abgeschlossene Mengen. Abgeschlossene Hülle einer Menge. Die Komplementärmengen der offenen Mengen sollen *abgeschlossene Mengen* genannt werden. Auf Grund der Eigenschaften der offenen Mengen (vgl. Nr. 1) gilt dann folgendes:

1. *Der Durchschnitt von beliebig vielen abgeschlossenen Mengen ist abgeschlossen*;
2. *die Vereinigung endlich vieler abgeschlossener Mengen ist abgeschlossen*;
3. *die leere Menge und der ganze Raum sind abgeschlossen.*

Der Durchschnitt aller abgeschlossenen Mengen, die eine gegebene Menge $M \subset X$ enthalten, wird *abgeschlossene Hülle* von M genannt und mit $\bar{M}$ bezeichnet. Offenbar ist $\bar{M}$ die minimale abgeschlossene Menge, die M enthält. Es gilt genau dann $\bar{M} = M$, wenn M abgeschlossen ist. Ferner gelten, wie man sofort sieht, die Bedingungen[1]):

1. $M \subset \bar{M}$;
2. $\bar{\bar{M}} = \bar{M}$ (weil $\bar{M}$ abgeschlossen ist);
3. $\overline{M_1 \cup M_2 \cup \ldots \cup M_n} = \bar{M}_1 \cup \bar{M}_2 \cup \ldots \cup \bar{M}_n$;
4. $\bar{\emptyset} = \emptyset$.

Ein Punkt x gehört dann und nur dann zur abgeschlossenen Hülle $\bar{M}$, wenn $x \notin \operatorname{int}(X - M)$ ist, d. h., wenn jede Umgebung $U(x)$ wenigstens einen Punkt der Menge M enthält. Jeder Punkt $x \in \bar{M}$ wird *Berührungspunkt* der Menge M genannt. Mit diesem Begriff hängt der Begriff des Häufungspunktes eng zusammen. Ein Punkt x heißt *Häufungspunkt* einer Menge M, wenn

[1]) Man kann den topologischen Raum auch als eine Menge definieren, auf der eine Abschließungsoperation definiert ist, die den Bedingungen 1 bis 4 genügt. Diese Definition ist der oben gegebenen äquivalent. Um dies einzusehen, genügt es, die offenen Mengen als Komplemente der ageschlossenen Mengen zu definieren, wobei die abgeschlossenen Mengen M durch das Erfülltsein der Beziehung $M = \bar{M}$ charakterisiert sind. Dann sind die Bedingungen 1 bis 3 aus Nr. 1 erfüllt, und die durch diese offenen Mengen festgelegte Topologie definiert eine Abschließungsoperation, die mit der ursprünglichen übereinstimmt. Wir überlassen dem Leser den Nachweis dieser Behauptungen.

in jeder Umgebung $U(x)$ ein von x verschiedener Punkt von M liegt. Offenbar ist jeder Berührungspunkt einer Menge M, der selbst nicht zu M gehört, Häufungspunkt von M.

Eine Menge M heißt *perfekt*, wenn sie mit der Menge aller ihrer Häufungspunkte übereinstimmt. Die Menge $\overline{M} - \operatorname{int} M$ wird *Rand* von M genannt.

Der Begriff des Häufungspunktes steht in engem Zusammenhang mit dem Begriff des Limes einer Folge. Ein Punkt x heißt *Limes einer Folge* $x_1, x_2, x_3, \ldots$, in Zeichen $\lim\limits_{n \to \infty} x_n = x$, wenn jede Umgebung $U(x)$ fast alle Glieder dieser Folge enthält, d. h., wenn höchstens endlich viele Glieder der Folge nicht in $U(x)$ liegen. Eine Folge, die einen Limes hat, heißt *konvergent*.

Offenbar sind bei Konvergenz nur die folgenden Fälle möglich[1]:

1. Von einem gewissen Glied ab stimmen alle weiteren Glieder der Folge $x_1, x_2, x_3, \ldots$ überein. Dieses Element $x_n = x_{n+p}$ ist dann Limes der Folge.

2. Es gibt unendlich viele verschiedene Glieder der Folge. Dann ist der Limes der Folge Häufungspunkt der Menge der Glieder.

Eine Menge M eines topologischen Raumes X heißt *in X dicht*, wenn $\overline{M} = X$ ist. Ein Raum X heißt *separabel*, wenn es in ihm eine abzählbare Menge M gibt, die in X dicht ist.

Sind auf einer Menge X zwei verschiedene Topologien T_1 und T_2 gegeben, so ist T_1 genau dann schwächer als T_2, wenn die abgeschlossene Hülle jeder Menge M in der Topologie T_1 die abgeschlossene Hülle von M in der Topologie T_2 enthält. Dies folgt unmittelbar aus der in Nr. 1 gegebenen Definition.

4. Teilräume. Jede Teilmenge Y eines topologischen Raumes X kann selbst zu einem topologischen Raum gemacht werden, wenn man als offene Mengen in Y die Durchschnitte der offenen Mengen in X mit der Menge Y nimmt. Der Raum Y mit der so definierten Topologie heißt dann *Teilraum* des topologischen Raumes X. Aus dieser Definition folgen unmittelbar die folgenden Aussagen:

1. *Ist $\{U\}$ eine Basis in X, so ist $\{U \cap Y\}$ eine Basis in Y;*

2. *ist $\{W\}$ eine Umgebungsbasis in X, so ist $\{W \cap Y\}$ eine Umgebungsbasis in Y;*

3. *die abgeschlossene Hülle einer Menge $M \subset Y$ in Y ergibt sich, wenn man den Durchschnitt der abgeschlossenen Hülle von M in X mit Y bildet.*

5. Abbildungen topologischer Räume. Es seien X und Y zwei beliebige Mengen. Wir sagen, daß eine *Abbildung f der Menge X in die Menge Y* gegeben sei, wenn jedem Punkt $x \in X$ ein Punkt $y \in Y$ zugeordnet ist. Der Punkt x heißt *Urbild*, der Punkt y *Bild* bei der Abbildung f, in Zeichen

$$y = f(x).$$

---

[1]) Hierbei wird vorausgesetzt, daß der Raum einem Trennungsaxiom (vgl. Nr. 7) genügt, so daß der Limes einer konvergenten Folge eindeutig bestimmt ist. — *Anm. d. Red.*

Allgemein wird die Gesamtheit aller Bilder von Punkten $x \in M$, wobei M irgendeine Teilmenge von X ist, das *Bild der Menge* M bei der Abbildung f genannt und mit $f(M)$ bezeichnet. Entsprechend heißt die Gesamtheit aller Urbilder von Punkten $x \in N$, wobei N eine Teilmenge aus Y ist, *Urbild der Menge* N, in Zeichen $f^{-1}(N)$. Tritt als Bild $f(X)$ der Menge X die gesamte Menge Y auf, so heißt f eine Abbildung von X *auf* Y.

Eine Abbildung von X auf Y wird *umkehrbar eindeutig* (oder *eineindeutig*) genannt, wenn das Urbild jedes $y \in Y$ aus einem einzigen Punkt besteht. Diejenige Abbildung von X auf X, bei der jedes Bild mit seinem Urbild übereinstimmt, heißt *identische Abbildung*.

Es sei f eine Abbildung von X auf Y und φ eine Abbildung von Y auf Z. Unter dem Produkt $\varphi \cdot f$ der Abbildung φ mit der Abbildung f versteht man die Abbildung, die dadurch entsteht, daß erst f und dann φ angewandt wird.[1])

Ist $\varphi \cdot f$ die identische Abbildung, so heißt φ die zu f *inverse Abbildung*, in Zeichen $\varphi = f^{-1}$. Wie man sofort einsieht, ist dann auch f invers zu f^{-1}, so daß f und f^{-1} zueinander invers sind.

I. *Die inverse Abbildung f^{-1} existiert genau dann, wenn die Abbildung f umkehrbar eindeutig ist.*

Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist offensichtlich; ist aber f umkehrbar eindeutig, so ergibt sich die inverse Abbildung f^{-1}, indem man jedem $y \in Y$ sein Urbild bei der Abbildung f zuordnet.

Wir haben bis jetzt Abbildungen von beliebigen Mengen betrachtet. Nun werde angenommen, daß f eine Abbildung eines topologischen Raumes X in einen topologischen Raum Y vermittelt. Entsprechend der üblichen Definition der Stetigkeit einer Funktion heißt eine Abbildung f *stetig in einem Punkt* $x_0 \in X$, wenn das Urbild jeder Umgebung $V(y_0)$ des Punktes $y_0 = f(x_0)$ eine Umgebung $U(x_0)$ von x_0 enthält. Wir sprechen von einer *stetigen Abbildung f von X in Y, wenn f in jedem Punkt x des Raumes X* stetig ist. Aus dieser Definition folgt unmittelbar der Satz

II. *Eine Abbildung f eines Raumes X auf einen Raum Y ist genau dann stetig, wenn das Urbild jeder offenen Menge aus Y ebenfalls eine offene Menge ist (oder wenn das Urbild jeder abgeschlossenen Menge ebenfalls eine abgeschlossene Menge ist).*

Ferner gilt der Satz

III. *Bildet eine stetige Abbildung $y = f(x)$ eines Raumes X in einen Raum Y eine Menge $M \subset X$ in eine Menge $N \subset Y$ ab, so bildet sie auch $\overline{M}$ in $\overline{N}$ ab.*

Das Urbild der Menge $\overline{N} \cap f(X)$ ist nämlich abgeschlossen und enthält M. Folglich enthält das Urbild von $\overline{N} \cap f(X)$ auch $\overline{M}$.

Eine Abbildung f eines topologischen Raumes X auf einen topologischen Raum Y heißt *topologische Abbildung* (oder *Homöomorphie*), wenn

1. f umkehrbar eindeutig ist;
2. f und f^{-1} stetig sind.

---

[1]) Hierin ist als Spezialfall die Definition des Produkts von Operatoren enthalten (vgl. § 1, Nr. 6).

Zwei topologische Räume X und Y werden *homöomorph* genannt, wenn es eine topologische Abbildung von X auf Y gibt.

Aus Satz II folgt sofort der Satz

IV. *Bei einer topologischen Abbildung gehen offene Mengen in offene Mengen, abgeschlossene Mengen in abgeschlossene Mengen und die abgeschlossene Hülle einer beliebigen Menge M in die abgeschlossene Hülle des Bildes von M über.*

Die Eigenschaften einer Menge, offen, abgeschlossen oder abgeschlossene Hülle einer anderen Menge zu sein, bleiben also bei einer topologischen Abbildung erhalten.

Eigenschaften, die bei topologischen Abbildungen erhalten bleiben, werden *topologische Eigenschaften* genannt. Die *Topologie* ist das Teilgebiet der Mathematik, in dem topologische Eigenschaften untersucht werden.

Vom Standpunkt der Topologie aus sind homöomorphe Räume nicht als wesentlich verschieden anzusehen.

6. Bikompakte Mengen. Ein Mengensystem $\{G\}$ heißt *Überdeckung* einer Menge M, wenn die Vereinigung aller Mengen G die Menge M enthält.

Ein topologischer Raum X heißt *bikompakt*, wenn jede aus lauter offenen Mengen G bestehende Überdeckung $\{G\}$ von X eine endliche Anzahl von Mengen $G_1, G_2, \ldots, G_n$ enthält, die ebenfalls eine Überdeckung von X bilden.

Eine Menge $M \subset X$ heißt *bikompakt*, wenn sie, als Teilraum von X betrachtet, bikompakt ist.

Wir gehen nun zu den Komplementärmengen über und erkennen die Richtigkeit des Satzes

I. *Ein Raum X ist dann und nur dann bikompakt, wenn in ihm jedes System $\{F\}$ von abgeschlossenen Mengen mit leerem Durchschnitt endlich viele Mengen $F_1, F_2, \ldots, F_n$ enthält, deren Durchschnitt ebenfalls leer ist.*

Aus Satz I folgt der Satz

II. *Jede abgeschlossene Teilmenge eines bikompakten Raumes ist bikompakt.*

Ein Mengensystem $\{M\}$ heiße *zentriert*, wenn jeweils endlich viele Mengen M dieses Systems einen nichtleeren Durchschnitt haben. Auf Grund von Satz I läßt sich hiermit die folgende äquivalente Definition des bikompakten Raumes aussprechen.

Ein Raum X ist dann und nur dann bikompakt, wenn in ihm jedes zentrierte System von abgeschlossenen Mengen einen nichtleeren Durchschnitt hat.

Man kann diese Aussage auch noch folgendermaßen formulieren.

III. *Ein Raum X ist dann und nur dann bikompakt, wenn die Mengen jedes zentrierten Systems mindestens einen gemeinsamen Berührungspunkt in X haben.*

Beweis. Es sei X ein bikompakter Raum und $\{M\}$ ein zentriertes Mengensystem aus X. Dann ist $\{\overline{M}\}$ ein zentriertes System von Mengen, die in X abgeschlossen sind. Folglich haben die Mengen $\overline{M}$ einen nichtleeren Durchschnitt. Ein beliebiger Punkt dieses Durchschnitts ist aber gemeinsamer Berührungspunkt der Mengen M.

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß die Mengen eines jeden zentrierten Systems einen gemeinsamen Berührungspunkt haben. Insbesondere gibt es dann in jedem zentrierten System von abgeschlossenen Mengen einen gemeinsamen Berührungspunkt. Wegen der Abgeschlossenheit dieser Mengen gehört dieser Berührungspunkt auch zu ihrem Durchschnitt. Folglich ist X bikompakt.

IV. *Ein stetiges Bild eines bikompakten Raumes ist ebenfalls bikompakt.*

Beweis. Es bezeichne f eine stetige Abbildung eines bikompakten Raumes X auf einen Raum Y. Ferner sei $\{G'\}$ eine aus den offenen Mengen G' bestehende Überdeckung von Y. Die Urbilder G der Mengen G' sind dann ebenfalls offen und bilden zusammen die Überdeckung $\{G\}$ des Raumes X. Wegen der Bikompaktheit von X enthält $\{G\}$ eine endliche Überdeckung $\{G_1, \ldots, G_n\}$. Dann ist aber $\{G_1', \ldots, G_n'\}$ eine in $\{G'\}$ enthaltene endliche Überdeckung des Raumes Y. Jede aus offenen Mengen bestehende Überdeckung $\{G'\}$ von Y enthält also eine endliche Überdeckung von Y, d. h. aber, Y ist bikompakt.

7. Hausdorffsche Räume. Ein topologischer Raum X heißt Hausdorff*scher Raum,* wenn er folgendem *Trennungsaxiom* genügt: Zu je zwei verschiedenen Punkten von X gibt es disjunkte Umgebungen.

Die in den Beispielen aus Nr. 2 definierten Räume R^n und C^n sind Hausdorffsche Räume.

I. *Ist F eine bikompakte Menge in einem* Hausdorff*schen Raum X und $x \notin F$, so gibt es disjunkte offene Mengen U und V derart, daß $x \in U$ und $F \subset V$ ist.*

Beweis. Zu jedem $y \in F$ gibt es disjunkte offene Mengen U_y und V_y mit $x \in U_y$ und $y \in V_y$. Wegen der Bikompaktheit von F existieren unter den V_y endlich viele Mengen $V_{y_1}, \ldots, V_{y_n}$, die eine Überdeckung von F bilden. Die Mengen $U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k}$ und $V = \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$ leisten dann das Gewünschte.

II. *Jede bikompakte Menge eines* Hausdorff*schen Raumes ist abgeschlossen.*

Beweis. F sei bikompakt und $x \notin F$. Nach Satz I ist auch $x \notin \bar{F}$. Folglich gilt $\bar{F} \subset F$, und daher ist $\bar{F} = F$.

Wir betrachten als Beispiel die bikompakten Mengen des Raumes R^n (Beispiel 1 aus Nr. 2). Auf Grund des bekannten Heine-Borelschen Überdeckungssatzes ist jede beschränkte abgeschlossene Menge im R^n bikompakt. Wie man leicht nachprüft, gilt auch die umgekehrte Behauptung.

Zunächst ist wegen Satz II jedes bikompakte M im R^n abgeschlossen. Wäre M nicht beschränkt, so ließe sich aus M eine unendliche Folge $M_1 = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ herausgreifen, die keinen endlichen Häufungspunkt hat und daher eine abgeschlossene Menge im R^n darstellt. Wegen Satz II aus Nr. 6 wäre M_1 demnach bikompakt. Dies ist aber unmöglich, weil es paarweise disjunkte Umgebungen $U(x_i)$ der Punkte $x_i\,(i = 1, 2, \ldots)$ von M_1 gibt und

diese Umgebungen eine Überdeckung der Menge M_1 bilden, die offenbar keine endliche Überdeckung enthält. Es gilt also der Satz

III. *Ein Teilraum von R^n ist genau dann bikompakt, wenn er beschränkt und abgeschlossen in R^n ist.*

Ferner gilt:

IV. *Bei einer stetigen Abbildung eines bikompakten Raumes in einen* HAUSDORFF*schen Raum sind die Bilder abgeschlossener Mengen ebenfalls abgeschlossen.*

Beweis. Da eine abgeschlossene Teilmenge M eines bikompakten Raumes X bikompakt ist (vgl. Nr. 6, Satz II), ist das stetige Bild von M ebenfalls bikompakt (vgl. Nr. 6, Satz IV) und daher abgeschlossen im umfassenden HAUSDORFFschen Raum (vgl. Satz II).

V. *Eine umkehrbar eindeutige stetige Abbildung f eines bikompakten Raumes X in einen* HAUSDORFF*schen Raum ist eine topologische Abbildung.*

Beweis. Nach Satz I aus Nr. 5 existiert die inverse Abbildung f^{-1}. Daher bleibt nur noch die Stetigkeit von f^{-1} nachzuweisen, d. h., es muß nachgewiesen werden, daß das Urbild jeder abgeschlossenen Menge in $f(X)$ bei der Abbildung f^{-1} eine abgeschlossene Menge ist (vgl. Nr. 5, Satz II). Diese Behauptung fällt aber mit Satz IV zusammen, weil sie bedeutet, daß das Bild einer abgeschlossenen Menge bei der Abbildung f in einem HAUSDORFFschen Raum eine abgeschlossene Menge ist.

VI. *Ist eine Menge X bezüglich einer Topologie T_1 ein* HAUSDORFF*scher Raum und bezüglich einer Topologie T_2 bikompakt, gilt ferner $T_1 \leqq T_2$, so ist $T_1 = T_2$.*

Beweis. Es bezeichne X_1 bzw. X_2 die mit der Topologie T_1 bzw. T_2 ausgestattete Menge X. Wegen der Voraussetzung $T_1 \leqq T_2$ ist die identische Abbildung $f(x) = x$ des bikompakten Raumes X_2 auf den HAUSDORFFschen Raum X_1 stetig und daher (vgl. Satz V) eine topologische Abbildung. Dies bedeutet aber, daß $T_1 = T_2$ ist.

Wir wenden nun den Satz IV aus Nr. 6 auf den Fall an, daß f eine stetige Abbildung eines Raumes X in den Raum R^1 aller reellen Zahlen ist (Nr. 1, Beispiel 1). In diesem Fall wird f eine über dem Raum X definierte *reelle stetige Funktion* genannt. Ist X bikompakt, so ist sein Bild in R^1 nach Satz IV aus Nr. 6 ein bikompakter Raum und daher (vgl. Satz III) eine beschränkte abgeschlossene Menge. Nun hat aber jede derartige Menge in R^1 ein größtes und ein kleinstes Element. Folglich nimmt die Funktion $f(x)$, $x \in X$, die obere und die untere Grenze ihrer Werte an, und es gilt der Satz

VII. *Eine reelle stetige Funktion über einem bikompakten Raum nimmt in diesem Raum ihr Supremum und ihr Infimum an.*

Ferner gilt der Satz

VIII. *Sind $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ zwei stetige Abbildungen eines Raumes X in einen* HAUSDORFF*schen Raum Y, so ist die Menge M aller Punkte x, in denen $f(x) = \varphi(x)$ ist, abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $x_0 \in \overline{M}$. Wäre $f(x_0) \neq \varphi(x_0)$, so gäbe es disjunkte Umgebungen $U(f(x_0))$ und $V(\varphi(x_0))$. Sicher existiert nun eine Umgebung $W(x_0)$, deren Bilder bei den Abbildungen $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ in $U(f(x_0))$ bzw. $V(\varphi(x_0))$ liegen. Da $x_0 \in \overline{M}$ ist, gibt es in $W(x_0)$ einen Punkt $x \in M$. Diesem entsprechen die Punkte $f(x) \in U(f(x_0))$ und $\varphi(x) \in V(\varphi(x_0))$. Da diese Umgebungen nach unserer Annahme disjunkt sein sollten, müßte $f(x) \neq \varphi(x)$ sein, was aber im Widerspruch zu $x \in M$ steht. Demzufolge ist $\overline{M} = M$ und M abgeschlossen.

IX. *Stimmen zwei stetige Abbildungen $y = f(x)$ und $y = \varphi(x)$ eines Raumes X in einen* HAUSDORFF*schen Raum Y auf einer Menge $N \subset X$ überein, so stimmen sie auch auf der abgeschlossenen Hülle $\overline{N}$ dieser Menge überein.*

Beweis. M habe dieselbe Bedeutung wie in Satz VIII. Dann ist $N \subset M$ und daher $\overline{N} \subset \overline{M} = M$. Folglich gilt $f(x) = \varphi(x)$ auf $\overline{N}$.

8. Normale Räume. Ein topologischer Raum X heißt *normal*, wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $F_1, F_2 \subset X$ disjunkte offene Mengen U_1 und U_2 gibt, so daß $U_1 \supset F_1$ und $U_2 \supset F_2$ gilt. Diese Bedingung ist mit der folgenden äquivalent: Zu jeder abgeschlossenen Menge F und jeder offenen Menge $U \supset F$ gibt es eine offene Menge V derart, daß $F \subset V$ und $\overline{V} \subset U$ ist. Um dies einzusehen, braucht man nur die abgeschlossene Menge $X - U$ zu betrachten, die zu F disjunkt ist.

I. *Ein bikompakter* HAUSDORFF*scher Raum ist normal.*

Beweis. Es seien F_1 und F_2 abgeschlossene (und daher bikompakte) disjunkte Mengen aus X. Nach Satz I aus Nr. 7 gibt es zu einem beliebigen Punkt $y \in F_2$ offene Mengen U_y und V_y, die F_1 bzw. y enthalten. Aus der Gesamtheit der Mengen V_y lassen sich endlich viele $V_{y_1}, V_{y_2}, \ldots, V_{y_n}$ herausgreifen, die eine Überdeckung von F_2 bilden. Dann sind aber

$$U = \bigcap_{k=1}^{n} U_{y_k} \quad \text{und} \quad V = \bigcup_{k=1}^{n} V_{y_k}$$

offene disjunkte Mengen, die F_1 bzw. F_2 enthalten.

II (URYSOHN). *Zu je zwei abgeschlossenen disjunkten Teilmengen F_0 und F_1 eines normalen Raumes X gibt es in X eine stetige reelle Funktion $f(x)$, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. $0 \leq f(x) \leq 1$;
2. $f(x) = 0$ *auf* F_0;
3. $f(x) = 1$ *auf* F_1.

Beweis. Die Behauptung ist trivial, wenn eine der Mengen F_0 und F_1 leer ist. Ist etwa F_0 die leere Menge, so genügt es einfach, $f(x) = 1$ für alle $x \in X$ zu setzen. Deshalb können wir annehmen, daß F_0 und F_1 nicht leer sind. Es sei $V_1 = X - F_1$. Da X normal sein sollte, gibt es eine offene Menge V_0, für die $F_0 \subset V_0$ und $\overline{V}_0 \subset V_1$ ist.

Entsprechend gibt es eine offene Menge $V_{1/2}$, für die $\overline{V}_0 \subset V_{1/2}$ und $\overline{V}_{1/2} \subset V_1$ ist. Wiederholen wir diese Überlegungen, so erkennen wir, daß es zu jeder Zahl r der Gestalt $\frac{m}{2^n}$, $0 \leqq m \leqq 2^n$, eine offene Menge V_r gibt, so daß $F_0 \subset V_r$ und $\overline{V}_r \subset V_{r_1}$ für $r < r_1$ ist.

Nun sei t eine beliebige Zahl aus dem Intervall $0 < t < 1$. Wir setzen

$$V_t = \bigcup_{r<t} V_r,$$

ferner $V_t = \emptyset$ für $t < 0$ und $V_t = X$ für $t > 1$. Damit haben wir jeder reellen Zahl t eine offene Menge V_t zugeordnet, wobei

$$\overline{V}_{t_1} \subset V_{t_2} \quad \text{für} \quad t_1 < t_2 \tag{1}$$

ist. Es gibt nämlich, wenn $0 \leqq t_1 < t_2 \leqq 1$ ist, rationale Zahlen r_1 und r_2, die den Bedingungen $t_1 < r_1 < r_2 < t_2$ genügen. Dann ist aber $\overline{V}_{t_1} \subset \overline{V}_{r_1} \subset V_{r_2} \subset V_{t_2}$. Für $t_1 < 0$ oder $t_2 > 1$ ist diese Beziehung (1) trivial, weil dann $V_{t_1} = \emptyset$ bzw. $V_{t_2} = X$ ist.

Aus der Definition der V_t folgt, daß die Gesamtheit aller Zahlen t, für die ein bestimmter Punkt x zu V_t gehört, eine Halbgerade der Gestalt $\lambda_x \leqq t < +\infty$ oder $\lambda_x < t < +\infty$ darstellt.

Wir setzen nun $f(x) = \lambda_x$ und zeigen, daß diese Funktion das Gewünschte leistet.

Für $t > 1$ gehört jeder Punkt x zu $V_t = X$. Folglich enthält die entsprechende Halbgerade alle Zahlen $t \geqq 1$; daher ist $f(x) = \lambda_x \leqq 1$.

Für $t < 0$ gehört kein x zu $V_t = \emptyset$, so daß $f(x) = \lambda_x \geqq 0$ ist. Es gilt also $0 \leqq f(x) \leqq 1$ für alle $x \in X$.

Ist $x \in V_0$, so enthält die entsprechende Halbgerade die Zahl 0, so daß $\lambda_x \leqq 0$ ist. Zusammen mit $\lambda_x \geqq 0$ folgt hieraus $\lambda_x = 0$. Folglich ist $f(x) = 0$ auf V_0, insbesondere also $f(x) = 0$ auf F_0.

Entsprechend folgt aus $x \notin V_1$, d. h. aus $x \in F_1$, daß die entsprechende Halbgerade den Punkt 1 nicht enthält. Daher ist $f(x) = \lambda_x = 1$ und folglich $f(x) = 1$ auf F_1.

Wir haben nun noch die Stetigkeit von $f(x)$ zu beweisen. Es sei $x_0 \in X$ und $\varepsilon > 0$. Dann stellt die Menge $U(x_0) = V_{\lambda_{x_0}+\varepsilon} - \overline{V}_{\lambda_{x_0}-\varepsilon}$ eine Umgebung von x_0 dar, in der $\lambda_{x_0} - \varepsilon \leqq \lambda_x \leqq \lambda_{x_0} + \varepsilon$, also $f(x_0) - \varepsilon \leqq f(x) \leqq f(x_0) + \varepsilon$ ist. Demnach ist $f(x)$ stetig.

9. Lokal bikompakte Räume. Ein topologischer Raum X heißt *lokal bikompakt,* wenn jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung hat, deren abgeschlossene Hülle bikompakt ist.

I. *Ein lokal bikompakter Raum X kann durch Hinzunahme eines einzigen Elements $x_\infty \notin X$ so ergänzt werden, daß er zu einem bikompakten Raum wird.*

Um dies einzusehen, setzt man $X_\infty = X \cup x_\infty$ und nimmt als offene Mengen in X_∞ alle offenen Mengen aus X sowie alle Mengen der Gestalt $U \cup x_\infty$, wobei U eine offene Menge ist, deren Komplementärmenge bikompakt ist.

Wie man leicht nachprüft, ist X_∞ ein bikompakter Raum. Mit X ist auch X_∞ ein HAUSDORFFscher Raum. Zunächst haben nämlich zwei verschiedene Punkte x_1 und x_2 aus X disjunkte Umgebungen. Ist aber $x_1 = x_\infty$ und $x_2 \in X$, so gibt es eine Umgebung U von x_2, deren abgeschlossene Hülle bikompakt ist. Dann sind $(X - \overline{U}) \cup x_\infty$ und U disjunkte Umgebungen von x_∞ und x_2.

Mit Hilfe des URYSOHNschen Lemmas (Nr. 8, Satz II) erhalten wir hieraus den Satz

II. *Sind in einem lokal bikompakten Raum X eine offene Menge U und eine bikompakte Menge $F \subset U$ gegeben, so gibt es eine auf X definierte reelle stetige Funktion $f(x)$, die den Bedingungen*

$$0 \leqq f \leqq 1, \quad f = 1 \text{ auf } F \text{ und } f(x) = 0 \text{ außerhalb } U$$

genügt. Um die Richtigkeit einzusehen, braucht man nur das URYSOHNsche Lemma auf die abgeschlossenen Mengen F und $X_\infty - U$ des bikompakten Raumes X_∞ anzuwenden.

Ist $f(x)$ ein beliebiges Funktional in einem lokal bikompakten Raum X, der nicht schon bikompakt ist, so soll $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = A$ bedeuten, daß die Menge $\{x : |f(x) - A| \geqq \varepsilon\}$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ bikompakt ist. Wie man leicht sieht, ist die Zahl A hierdurch, wenn sie existiert, eindeutig bestimmt. Insbesondere bringt $\lim\limits_{x\to\infty} f(x) = 0$ zum Ausdruck, daß die Menge $\{x : |f(x)| \geqq \varepsilon\}$ für beliebiges $\varepsilon > 0$ bikompakt ist. Wir wollen in diesem Fall sagen, daß $f(x)$ *im Unendlichen verschwindet.*

10. Der Satz von Stone. Es sei Q eine beliebige Menge. Sind $f_1(q), \ldots, f_n(q)$ reelle Funktionen über Q, so schreiben wir

$$f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n = \max\{f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q)\},$$
$$f_1 \cap f_2 \cap \ldots \cap f_n = \min\{f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q)\}.$$

So ist also $f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n$ diejenige Funktion, welche für jedes q gleich der größten der Zahlen $f_1(q), f_2(q), \ldots, f_n(q)$ ist. Wir wollen sagen, eine Gesamtheit A reeller Funktionen über Q bilde einen *Verband*, wenn sie mit je zwei Funktionen f_1 und f_2 auch $f_1 \cup f_2$ und $f_1 \cap f_2$ enthält. Offenbar enthält sie dann mit $f_1, \ldots, f_n$ auch $f_1 \cup f_2 \cup \ldots \cup f_n$ und $f_1 \cap f_2 \cap \ldots \cap f_n$. Eine Gesamtheit $\mathfrak{A}$ reeller Funktionen über Q werde eine *reelle Funktionenalgebra* genannt, wenn sie mit jeder Funktion auch deren Produkt mit einer beliebigen reellen Zahl und mit je zwei Funktionen auch deren Summe und deren Produkt enthält. Eine reelle Funktionenalgebra $\mathfrak{A}$ heiße *gleichmäßig abgeschlossen*, wenn die Grenzfunktion jeder auf Q gleichmäßig konvergenten Funktionenfolge $\{f_n\}$, $f_n \in \mathfrak{A}$, zu $\mathfrak{A}$ gehört. Ist $\mathfrak{A}$ nicht gleichmäßig abgeschlossen, so ergibt sich durch Hinzunahme der betreffenden Grenzwerte eine neue Funktionenmenge, die $\mathfrak{A}$ enthält und, wie man leicht nachprüft, eine gleichmäßig abgeschlossene Algebra ist. Wir nennen diese Algebra die *gleichmäßig abgeschlossene Hülle der Algebra* $\mathfrak{A}$ und bezeichnen sie mit $\overline{\mathfrak{A}}$.

Die Gesamtheit $C^r(T)$ aller stetigen reellen Funktionen über einem gegebenen topologischen Raum T ist beispielsweise eine gleichmäßig abgeschlossene Algebra, desgleichen die Gesamtheit $C^r_{t_0}(T)$ aller stetigen reellen Funktionen über T, die in einem Punkt t_0 gleich Null sind.

I. *Jede gleichmäßig abgeschlossene reelle Algebra R beschränkter Funktionen, die alle Konstanten enthält, ist ein Verband.*

Beweis. Wir haben lediglich zu zeigen, daß mit $x(t) \in R$ auch $|x(t)| \in R$ ist, weil dann aus $x, y \in R$ folgt, daß auch die Funktionen

$$x \cup y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

und

$$x \cap y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

zu R gehören.

Es sei also $x(t) \in R$ und $|x(t)| \leq c$ für alle $t \in T$. Dann ist

$$|x(t)| = \sqrt{c^2 - [c^2 - x^2(t)]} = c\sqrt{1 - \left(1 - \frac{x^2(t)}{c^2}\right)}$$

$$= c\left\{1 - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 1 \cdot 3 \cdots (2n-3)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}\left(1 - \frac{x^2(t)}{c^2}\right)^n\right\},$$

wobei die Reihe auf T gleichmäßig konvergiert, weil $0 \leq 1 - \frac{x^2(t)}{c^2} \leq 1$ ist. Folglich gehört $|x(t)|$ zu R.

Bemerkung. Die Aussage des Satzes I gilt auch dann noch, wenn die Funktionenalgebra keine von Null verschiedene Konstante enthält. Um dies einzusehen, brauchen wir nur die Gesamtheit R_1 aller Funktionen der Gestalt $y(t) = c + x(t)$, $x(t) \in R$, zu betrachten. Offenbar ist R_1 eine gleichmäßig abgeschlossene Funktionenalgebra, die alle Konstanten enthält. Ist nun $x(t) \in R$, so ist, wie oben bewiesen wurde, auch $|x(t)| \in R_1$. Es sei $|x(t)| = c + x_1(t)$, $x_1(t) \in R$. Dann ist $x^2(t) = c^2 + 2cx_1(t) + x_1^2(t)$ und $c^2 = x^2(t) - 2cx_1(t) - x_1^2(t) \in R$, also $c^2 = 0$, $c = 0$ und $|x(t)| = x_1(t) \in R$.

II. *Auf einem bikompakten Raum T sei eine Gesamtheit $\mathfrak{A}$ stetiger reeller Funktionen $x(t)$ gegeben, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *$\mathfrak{A}$ ist ein Verband;*

2. *für je zwei verschiedene Punkte $\tau, \sigma \in T$ und beliebige reelle Zahlen a, b gibt es eine Funktion $x_{\tau\sigma}(t) \in \mathfrak{A}$ derart, daß $x_{\tau\sigma}(\tau) = a$ und $x_{\tau\sigma}(\sigma) = b$ ist.*

Dann ist jede auf T stetige Funktion Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen $x_n(t) \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Es sei $x(t)$ eine auf T stetige Funktion, ε eine beliebige positive Zahl und $x_{\tau\sigma}$ eine Funktion aus $\mathfrak{A}$, die der Bedingung 2 für $a = x(\tau)$ und $b = x(\sigma)$ genügt. Ferner seien $U_{\tau\sigma}$ und $V_{\tau\sigma}$ die Mengen derjenigen Punkte, für die $x_{\tau\sigma}(t) < x(t) + \varepsilon$ bzw. $x_{\tau\sigma}(t) > x(t) - \varepsilon$ ist. Offenbar sind $U_{\tau\sigma}$ und $V_{\tau\sigma}$ offene Mengen mit $\tau \in U_{\tau\sigma}$ und $\sigma \in V_{\tau\sigma}$. Für jedes σ bilden die Mengen $U_{\tau\sigma}$ eine Überdeckung des bikompakten Raumes T. Wir suchen aus dieser Überdeckung eine endliche Überdeckung $\{U_{\tau_1\sigma}, U_{\tau_2\sigma}, \ldots, U_{\tau_n\sigma}\}$ aus und setzen $y_\sigma = x_{\tau_1\sigma} \cap x_{\tau_2\sigma} \cap \ldots \cap x_{\tau_n\sigma}$. Auf diese Weise erhalten wir die Funktion

$y_\sigma(t) \in \mathfrak{A}$, die den Bedingungen

$$y_\sigma(t) < x(t) + \varepsilon \quad \text{auf ganz } T,$$
$$y_\sigma(t) > x(t) - \varepsilon \quad \text{für} \quad t \in V_\sigma = \bigcap_{j=1}^{n} V_{\tau_j \sigma}$$

genügt. Nun sei $\{V_{\sigma_1}, \ldots, V_{\sigma_m}\}$ eine endliche Überdeckung aus der Überdeckung $\{V_\sigma\}$ von T. Setzen wir dann $z = y_{\sigma_1} \cup y_{\sigma_2} \cup \ldots \cup y_{\sigma_m}$, so erhalten wir eine Funktion $z(t) \in \mathfrak{A}$, die auf ganz T den Ungleichungen

$$x(t) - \varepsilon < z(t) < x(t) + \varepsilon$$

genügt. Damit ist der Beweis des Satzes II erbracht.

Man sagt, eine Menge $\mathfrak{A}$ von Funktionen über Q *trenne die Punkte*, wenn es zu je zwei verschiedenen Punkten $t_1, t_2 \in Q$ eine Funktion $x(t) \in \mathfrak{A}$ gibt, für die $x(t_1) \neq x(t_2)$ ist.

Theorem 1 (Stone [3]). *Ist R eine reelle Algebra stetiger Funktionen über einem bikompakten Raum T, welche die Punkte trennt, so stimmt die gleichmäßig abgeschlossene Hülle $\overline{R}$ von R entweder mit $C^r(T)$ oder mit $C^r_{t_0}(T)$ für ein gewisses $t_0 \in T$ überein.*

Beweis. a) Wir nehmen zunächst an, daß es in der Algebra R zu jedem $t_0 \in T$ eine Funktion $x(t)$ mit $x(t_0) \neq 0$ gibt. Dann gibt es in R zu $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, eine Funktion $x(t)$, für die

$$x(t_1) \neq 0, \quad x(t_1) \neq x(t_2) \tag{1}$$

ist. In R gibt es nämlich Funktionen $y(t)$ und $z(t)$, die den Bedingungen $y(t_1) \neq y(t_2)$ und $z(t_1) \neq 0$ genügen. Mit diesen setzen wir

$$x(t) = \begin{cases} y(t) & \text{für} \quad y(t_1) \neq 0, \\ z(t) & \text{für} \quad y(t_1) = 0,\ z(t_1) \neq z(t_2), \\ y(t) + z(t) & \text{für} \quad y(t_1) = 0,\ z(t_1) = z(t_2). \end{cases} \tag{2}$$

Hierbei darf angenommen werden, daß $x(t_2) = 0$ ist. Anderenfalls ersetzen wir $x(t)$ durch die Funktion

$$u(t) = \frac{1}{x(t_2)}\, x(t) - \left[\frac{1}{x(t_2)}\, x(t)\right]^2.$$

Setzen wir nun $x_1(t) = \frac{1}{x(t_1)}\, x(t)$, so erhalten wir eine Funktion $x_1(t) \in R$, die den Bedingungen $x_1(t_1) = 1$ und $x_1(t_2) = 0$ genügt. Entsprechend existiert eine Funktion $x_2(t) \in R$, für die $x_2(t_1) = 0$ und $x_2(t_2) = 1$ ist. Für die Funktion $y(t) = a x_1(t) + b x_2(t)$ gilt dann $y(t_1) = a$ und $y(t_2) = b$, d. h. aber, daß es zu beliebigen $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, und beliebigen reellen a und b in R eine Funktion $y(t)$ mit $y(t_1) = a$ und $y(t_2) = b$ gibt. Auf Grund der Bemerkung genügt die Algebra R damit allen Voraussetzungen des Satzes II. Daher stimmt $\overline{R}$ mit $C^r(T)$ überein.

b) Liegt der Fall a) nicht vor, so sind alle Funktionen aus R in einem gewissen Punkt $t_0 \in T$ gleich Null. Dann bilden die Funktionen $y(t) = c + x(t)$,

$x(t) \in R$, eine Algebra R', für die der Fall a) zutrifft. Daher gibt es zu jeder stetigen reellen Funktion $z(t)$ (insbesondere zu jeder stetigen Funktion, die für t_0 gleich Null ist) und jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $y(t) = c + x(t)$, $x(t) \in R$, derart, daß $|z(t) - [c + x(t)]| < \varepsilon$ für alle $t \in T$ ist. Setzen wir nun $t = t_0$, so folgt $|c| < \varepsilon$ und damit $|z(t) - x(t)| < 2\varepsilon$. Dies bedeutet aber, daß $\bar{R} = C^r_{t_0}(T)$ ist.

Theorem 2 (WEIERSTRASSscher Approximationssatz). *Es sei T eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge des n-dimensionalen reellen Raumes R^n. Dann ist jede auf T stetige Funktion $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ Grenzwert einer auf T gleichmäßig konvergenten Folge von Polynomen der Veränderlichen $x_1, \ldots, x_n$ mit reellen Koeffizienten.*

Zum Beweis genügt es, den Satz von STONE auf die Algebra $\mathfrak{A}$ aller Polynome der Veränderlichen $x_1, x_2, \ldots, x_n$ mit reellen Koeffizienten, betrachtet als Funktionen über T, anzuwenden. Hierbei ist der Fall $\bar{\mathfrak{A}} = C^r_{t_0}(T)$ unmöglich, weil $\mathfrak{A}$ alle Konstanten enthält.

11. Die durch eine Funktionenfamilie definierte schwache Topologie. In einer beliebigen Menge Q kann unter anderem auf folgende Weise eine Topologie definiert werden.

Es sei $\{f_\alpha\}$ eine Familie von Funktionen, die auf Q definiert sind und deren Werte jeweils in dem topologischen Raum X_α liegen. Als Basis in Q nehmen wir die Gesamtheit aller möglichen Durchschnitte von endlich vielen Mengen $f_\alpha^{-1}(U_\alpha)$, wobei die U_α offene Mengen in X_α seien. Unter der *durch die Familie $\{f_\alpha\}$ in Q definierten schwachen Topologie* wird dann diejenige Topologie in Q verstanden, die durch diese Basis erzeugt wird. Offenbar gilt der Satz:

I. *Die durch die Familie $\{f_\alpha\}$ definierte schwache Topologie ist die schwächste unter allen Topologien, in denen alle Funktionen f_α stetig sind.*

Ferner gilt:

II. *Es sei F eine Familie von komplexen stetigen Funktionen über einem lokal bikompakten Raum X, die folgenden Bedingungen genügt:*

1. *Alle Funktionen aus F verschwinden im Unendlichen;*
2. *F trennt die Punkte von X;*
3. *es gibt in X keinen Punkt, in dem alle Funktionen aus F gleich Null sind.*

Dann stimmt die auf X durch die Familie F definierte schwache Topologie mit der ursprünglichen Topologie überein.

Beweis. Offenbar können die zu F gehörenden Funktionen als stetige Funktionen auf X_∞, die im Punkt x_∞ gleich Null sind, betrachtet werden.

Nun sei T_1 die durch die Familie F in x_∞ definierte schwache Topologie und T_2 diejenige Topologie von X_∞, welche durch die in X geltende Topologie definiert wird. Nach Satz I ist $T_1 \leq T_2$. Aus den Bedingungen 2 und 3 folgt, daß F die Punkte von X_∞ trennt. Daher ist X_∞ mit der Topologie T_1 ein HAUSDORFFscher Raum, so daß wir mit Hilfe von Satz VI aus Nr. 7 schließen können, daß $T_1 = T_2$ auf X_∞ und damit auch auf X ist.

12. Topologisches Produkt von Räumen. Es seien $X_1, X_2, \ldots, X_n$ irgendwelche topologischen Räume. Mit $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Systeme $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ mit $x_i \in X_i (i = 1, 2, \ldots, n)$. Gilt $M_1 \subset X_1, M_2 \subset X_2, \ldots, M_n \subset X_n$, so soll mit $M_1 \times M_2 \times \cdots \times M_n$ die Gesamtheit der Systeme $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ bezeichnet werden, wobei die $x_1, x_2, \ldots, x_n$ unabhängig voneinander die Teilmengen $M_1, M_2, \ldots, M_n$ durchlaufen.

Wir führen nun in $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ eine Topologie ein, indem wir als Umgebungsbasis eines Punktes $x^0 = \{x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0\}$ die Gesamtheit aller Mengen $U_1(x_1^0) \times U_2(x_2^0) \times \cdots \times U_n(x_n^0)$ nehmen, wobei $U_i(x_i^0)$ eine beliebige Umgebung von $x_i^0 (i = 1, 2, \ldots, n)$ bezeichnet. Offenbar sind dann die Axiome der Umgebungsbasis (vgl. Nr. 2) erfüllt, so daß $X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ tatsächlich zu einem topologischen Raum wird, dem sogenannten *topologischen Produkt der Räume* $X_1, X_2, \ldots, X_n$.

Die Definition des Produktraumes läßt sich auf den Fall unendlich vieler Räume ausdehnen, und zwar folgendermaßen. Gegeben sei eine Familie $\{X_\alpha\}$ topologischer Räume X_α. Dabei durchlaufe der Index α eine beliebige feste Menge $\mathfrak{A}$ (beliebiger Mächtigkeit). Mit $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ bezeichnen wir die Gesamtheit der für alle $\alpha \in \mathfrak{A}$ definierten Funktionen $x = \{x_\alpha\}$ mit den Werten $x_\alpha \in X_\alpha$. Als Umgebungsbasis eines Punktes $x^0 = \{x_\alpha^0\}$ definieren wir das System der Mengen $U(x^0)$ aus $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$, die sich auf folgende Weise ergeben (A. N. Tychonoff): Wir nehmen eine (beliebige) endliche Anzahl n von Indizes $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und für jeden Punkt $x_{\alpha_i}^0$ eine feste Umgebung $U(x_{\alpha_i}^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Dann bezeichnen wir mit $U(x^0)$ die Gesamtheit aller Punkte $x = \{x_\alpha\}$, die sich ergeben, wenn die $x_{\alpha_i}^0$ unabhängig voneinander die $U(x_{\alpha_i}^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und die übrigen x_α die zugehörigen X_α durchlaufen. Lassen wir nun n alle natürlichen Werte annehmen, durchlaufen ferner die $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ alle möglichen Systeme von n Indizes aus $\mathfrak{A}$ und die $U(x_{\alpha_1}^0), \ldots, U(x_{\alpha_n}^0)$ alle möglichen Umgebungen der Punkte $x_{\alpha_1}^0, \ldots, x_{\alpha_n}^0$, so erhalten wir das Mengensystem $\{U(x^0)\}$, welches wir als Umgebungsbasis des Punktes x^0 erklären.

Man bestätigt wiederum sofort, daß $\prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ bei dieser Definition der Umgebungsbasis ein topologischer Raum ist. Dieser Raum wird das *topologische Produkt der Räume* X_α genannt.

Ist $x = \{x_\alpha\}$, so heißt x_α die α-te Koordinate des Punktes x oder auch *Projektion des Punktes* x *auf* X_α. Die Zuordnung $x \to x_\alpha$ ergibt eine Abbildung des Raumes $X = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ auf X_α. Das Bild einer Menge $M \subset X$ bei dieser Abbildung heißt *Projektion von* M *auf* X_α.

Aus der oben gegebenen Definition der Umgebungsbasen in $X = \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ geht hervor, daß die in X definierte Topologie gerade die durch die Familie der Funktionen $f_\alpha(x) = x_\alpha$ definierte schwache Topologie ist. Daher sind die Funktionen $f_\alpha(x) = x_\alpha$ stetig. Ferner sind bei den Abbildungen $f_\alpha(x) = x_\alpha$ die Urbilder offener Mengen offen und die Urbilder abgeschlossener Mengen abgeschlossen.

I. *Ist Y bikompakt, so ist die Projektion jeder abgeschlossenen Menge $F \subset X \times Y$ auf X abgeschlossen.*

Beweis. Es sei M die Projektion von F auf X und $x_0 \in \overline{M}$. Dann hat jede Umgebung $U(x_0)$ mit M einen nichtleeren Durchschnitt. Die Mengen

$$N_U = \{y : x \times y \in F,\ x \in U(x_0)\}$$

bilden folglich im bikompakten Raum Y ein zentriertes System und haben daher einen gemeinsamen Berührungspunkt y_0 (vgl. Satz III aus Nr. 6). Dann ist aber $x_0 \times y_0 \in \overline{F} = F$ und folglich $x_0 \in M$. Aus $x_0 \in \overline{M}$ folgt also $x_0 \in M$, d. h., M ist abgeschlossen.

II (A. N. Tychonoff [1]). *Das topologische Produkt einer beliebigen Familie bikompakter topologischer Räume ist bikompakt.*

Beweis[1]). Es sei $X = \prod\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ der zu den bikompakten Räumen X_α gehörige Produktraum. Nach Satz III aus Nr. 6 genügt es zu zeigen, daß die Mengen eines jeden zentrierten Systems in X mindestens einen gemeinsamen Berührungspunkt haben. Nun sei $\{M^\lambda\}$ ein zentriertes Mengensystem in X (der Index λ durchlaufe eine Menge Λ). Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß $\{M^\lambda\}$ ein maximales zentriertes Mengensystem ist, d. h., es ist unmöglich, aus $\{M^\lambda\}$ durch Hinzunahme neuer Mengen ein umfassenderes zentriertes System zu erhalten. Wäre nämlich das System $\{M^\lambda\}$ nicht maximal, so könnte es mit Hilfe des Zornschen Lemmas (vgl. Anhang I) zu einem maximalen zentrierten System ergänzt werden.[2]) Nun genügt es aber, für die Mengen dieses maximalen Systems das Vorhandensein eines gemeinsamen Berührungspunktes nachzuweisen, weil dieser dann auch in bezug auf das ursprüngliche System $\{M^\lambda\}$ gemeinsamer Berührungspunkt ist. Es sei also $\{M^\lambda\}$ ein maximales zentriertes System in X. Mit M_α^λ bezeichnen wir die Projektion der Menge M^λ auf X_α. Dann bilden die Mengen $\{M_\alpha^\lambda\}$ für festes α ein zentriertes System in X_α. Wegen der Bikompaktheit von X_α haben die M_α^λ einen gemeinsamen Berührungspunkt (vgl. Nr. 6, Satz III), der mit x_α^0 bezeichnet werde. Wir werden zeigen, daß dann $x^0 = \{x_\alpha^0\}$ gemeinsamer Berührungspunkt der Mengen von $\{M^\lambda\}$ ist, d. h., jede Umgebung $U(x^0)$ aus der Umgebungsbasis von x^0 wird von jeder der Mengen M^λ geschnitten.

Nach der Definition der Topologie in X ergibt sich jede derartige Umgebung $U(x^0)$ aus einem endlichen Indexsystem $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und Umgebungen $U(x_{\alpha_i}^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ durch die Bedingungen

$$x_{\alpha_i} \in U(x_{\alpha_i}^0) \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{1}$$

Es sei $U_i(x^0)$ eine Umgebung des Punktes x^0, die durch eine der Bedingungen (1) für festes i definiert wird. Dann ist $U_i(x^0)$ die Gesamtheit aller Punkte $x = \{x_\alpha\}$,

---

1) Der hier gegebene Beweis stammt von Chevalley und Frink [1].

2) Die Gesamtheit aller zentrierten Systeme in X ist eine bezüglich der Inklusion halbgeordnete Menge, die der Voraussetzung des Zornschen Lemmas genügt; die obere Grenze einer linearen Menge zentrierter Systeme ist dasjenige zentrierte System, welches durch Vereinigung aller zentrierten Systeme dieser Menge entsteht.

für die $x_{\alpha_i} \in U(x^0_{\alpha_i})$ ist, während die übrigen x_α beliebig sind. Demzufolge ist $U(x^0)$ der Durchschnitt der Umgebungen $U_i(x^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. Da $x^0_{\alpha_i}$ Berührungspunkt jedes $M^\lambda_{\alpha_i}$ ist, wird $U(x^0_{\alpha_i})$ von jedem $M^\lambda_{\alpha_i}$ geschnitten. Dies bedeutet, daß $U_i(x^0)$ von jedem M^λ geschnitten wird. Nun ist aber der Durchschnitt endlich vieler Mengen M^λ ebenfalls eine Menge aus $\{M^\lambda\}$. Anderenfalls würde durch Hinzunahme dieses Durchschnitts zu $\{M^\lambda\}$ ein zentriertes System entstehen, das $\{M^\lambda\}$ als echten Teil enthielte. Dies widerspricht aber der Annahme, daß $\{M^\lambda\}$ maximal ist. Wir können daher behaupten, daß $U_i(x^0)$ von dem Durchschnitt einer beliebigen endlichen Anzahl von Mengen M^λ geschnitten wird. Dann müssen aber die Umgebungen $U_i(x^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zum System $\{M^\lambda\}$ gehören. Anderenfalls würde sich durch Hinzunahme der $U_i(x^0)$ wieder ein zentriertes System ergeben, das eine Erweiterung des Systems $\{M^\lambda\}$ wäre. Dies kann jedoch nach unserer Annahme nicht sein. Schließlich muß dann auch der Durchschnitt $U(x^0)$ der Umgebungen $U_i(x^0)$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ zum System $\{M^\lambda\}$ gehören. Folglich wird $U(x^0)$ von jedem M^λ geschnitten. Damit ist der Satz II bewiesen.

III. *Das topologische Produkt* HAUSDORFF*scher Räume ist ebenfalls ein* HAUSDORFF*scher Raum.*

Beweis. Aus $x, y \in \prod_{\alpha \in \mathfrak{A}} X_\alpha$ und $x \neq y$ folgt $x_\alpha \neq y_\alpha$ für ein gewisses α. Da X_α ein HAUSDORFFscher Raum ist, gibt es disjunkte Umgebungen U_α und V_α von x_α und y_α, deren Urbilder bei der Abbildung $x \to x_\alpha$ disjunkte Umgebungen von x und y sind.

IV. *Ist F eine abgeschlossene und G eine offene Menge aus dem topologischen Produkt $X \times Y$ zweier topologischer Räume X und Y, so ist die Menge $\bigcup_{x \in Q} \{y : x \times y \in F\}$ abgeschlossen und die Menge $\bigcap_{x \in Q} \{y : x \times y \in G\}$ offen, wenn Q eine bikompakte Menge aus X ist.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt nach Satz I daraus, daß die Menge $\bigcup_{x \in Q} \{y : x \times y \in F\}$ die Projektion der Menge $(Q \times Y) \cap F$ auf Y ist, während man die zweite Behauptung erhält, wenn man die erste auf die entsprechenden Komplementärmengen anwendet.

V. *Über dem Produkt $X \times Y$ zweier topologischer Räume X und Y sei eine stetige Funktion $f(x, y)$ gegeben, deren Werte in einem topologischen Raum Z liegen. Ferner sei Q eine bikompakte Menge in X und G eine offene Menge in Z. Dann ist die Menge $W = \{x : f(x, y) \in G$ für alle $x \in Q\}$ offen in Y.*

Beweis. Es sei G' das Urbild von G bei der Abbildung $z = f(x, y)$. Dann ist G' offen in $X \times Y$ und

$$W = \bigcap_{x \in Q} \{y : x \times y \in G'\},$$

so daß nur noch Satz IV anzuwenden bleibt.

13. Metrische Räume. Eine Menge X von Elementen $x, y, z, \ldots$ wird ein *metrischer Raum* genannt, wenn je zwei Elementen x und y eine nichtnegative Zahl $\varrho(x, y)$ (die sogenannte *Entfernung* von x und y) so zugeordnet ist, daß folgendes gilt:

1. Aus $\varrho(x, y) = 0$ folgt $x = y$ (Identitätsaxiom);
2. $\varrho(x, y) = \varrho(y, x)$ (Symmetrieaxiom);
3. $\varrho(x, y) + \varrho(y, z) \geqq \varrho(x, z)$ (Dreiecksungleichung).

Die von x und y abhängige Funktion $\varrho(x, y)$ wird dann die *Metrik* des Raumes X genannt.

Beispiele. 1. Die Gesamtheit R^1 aller reellen Zahlen ist ein metrischer Raum, wenn die Entfernung zweier Punkte durch $\varrho(x, y) = |x - y|$ definiert wird.

2. Die Gesamtheit aller Punkte des dreidimensionalen Raumes ist offenbar ein metrischer Raum, wenn unter $\varrho(x, y)$ die übliche Entfernung der Punkte x und y verstanden wird. Die Bedingung 3 besagt in diesem Fall, daß in einem Dreieck die Länge einer Seite nicht größer als die Summe der Längen der beiden anderen Seiten ist, wobei das Gleichheitszeichen genau dann steht, wenn das Dreieck zu einer geraden Strecke entartet, d. h., wenn die Punkte x, y und z auf einer Geraden liegen und y sich zwischen x und z befindet.

3. Die Gesamtheit $C(a, b)$ aller im Intervall $[a, b]$ stetigen Funktionen $x(t)$ ist ein metrischer Raum, wenn der Abstand zwischen $x(t)$ und $y(t)$ durch

$$\varrho(x, y) = \max_{a \leqq t \leqq b} |x(t) - y(t)|$$

definiert wird.

4. Es sei $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit aller Folgen $x = \{n_1, n_2, n_3, \ldots\}$ von natürlichen Zahlen. Wir definieren in $\mathfrak{B}$ eine Entfernung, indem wir $\varrho(x, x) = 0$ und $\varrho(x, y) = \frac{1}{k}$ setzen, wenn k die erste Nummer ist, für die x_k und y_k verschieden sind. Die Bedingungen 1, 2 und 3 sind dann erfüllt, wie man leicht bestätigt. Hierbei gilt die Dreiecksungleichung in der verschärften Form

$$\varrho(x, z) \leqq \max\{\varrho(x, y), \varrho(y, z)\}.$$

Der metrische Raum $\mathfrak{B}$ heißt Bairescher *Null-Raum.*

Unter der *Sphäre* mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius r verstehen wir die Gesamtheit der Punkte x, für die $\varrho(x, x_0) = r$ ist. Die *offene Kugel* mit dem Mittelpunkt x_0 und dem Radius r wird von den Punkten x mit $\varrho(x, x_0) < r$ gebildet, während die zugehörige *abgeschlossene Kugel* von den Punkten x mit $\varrho(x, x_0) \leqq r$ gebildet wird.

Die obere Grenze der Entfernungen zwischen je zwei Punkten einer Menge wird der *Durchmesser* dieser Menge genannt. Der Durchmesser kann unter Umständen unendlich groß sein.

In einem metrischen Raum X läßt sich eine Topologie einführen, indem als Umgebungsbasis eines Punktes $x_0 \in X$ die Gesamtheit aller offenen Kugeln mit dem Mittelpunkt x_0 genommen wird. Wie man leicht nachprüft, sind die Bedingungen 1 bis 3 der Umgebungsbasis und das Trennungsaxiom (vgl. Nr. 2 und 7) erfüllt, so daß X zu einem Hausdorffschen Raum wird. Man sagt, die Topologie des Raumes X wird *durch seine Metrik* $\varrho(x, y)$ gegeben.

Ein topologischer Raum X heißt *metrisierbar*[1]), wenn sich in ihm eine solche Metrik einführen läßt, daß die hierdurch festgelegte Topologie mit der ursprünglichen Topologie übereinstimmt.

Eine Abbildung f eines metrischen Raumes X in einen metrischen Raum X' wird *isometrisch* genannt, wenn sie die Entfernungen invariant läßt, d. h., wenn die Entfernung $\varrho(x, y)$ zwischen je zwei Punkten $x, y \in X$ mit der Entfernung $\varrho(x', y')$ zwischen ihren Bildern in X' übereinstimmt. *Offenbar ist eine isometrische Abbildung ein Homöomorphismus.* Zwei metrische Räume X und X' heißen *isometrisch*, wenn es eine isometrische Abbildung von X auf X' gibt. *Offenbar sind isometrische Räume homöomorph.*

Vom Standpunkt der Theorie der metrischen Räume sind zwei isometrische Räume nicht als wesentlich verschieden anzusehen.

Eine Folge $\{x_n\}$ von Elementen eines metrischen Raumes X heißt *Fundamentalfolge*, wenn es zu jeder positiven Zahl ε eine Zahl $N(\varepsilon)$ gibt derart, daß

$$\varrho(x_m, x_n) < \varepsilon \quad \text{für} \quad m, n > N(\varepsilon) \tag{1}$$

ist. *Jede konvergente Folge ist eine Fundamentalfolge.* Ist nämlich $\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$ und $\varepsilon > 0$ eine beliebige Zahl, so liegen alle Glieder von $\{x_n\}$ von einem gewissen x_N ab in der Umgebung $\varrho(x, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$. Für $m, n > N$ gilt dann $\varrho(x_n, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$ und $\varrho(x_m, x_0) < \frac{\varepsilon}{2}$, also

$$\varrho(x_n, x_m) \leqq \varrho(x_n, x_0) + \varrho(x_0, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

Das Umgekehrte gilt im allgemeinen nicht. Ist X beispielsweise die Menge aller rationaler Zahlen, betrachtet als Teilraum von R^1, so ist jede Folge von Zahlen aus X, deren Grenzwert eine irrationale Zahl ist, eine Fundamentalfolge, die in X nicht konvergiert.

Ein metrischer Raum wird *vollständig* genannt, wenn in ihm jede Fundamentalfolge konvergiert. Das bekannte CAUCHYsche Konvergenzkriterium bedeutet, daß R^1 ein vollständiger Raum ist.

Jeder nicht vollständige metrische Raum X kann zu einem vollständigen metrischen Raum erweitert werden. Das im folgenden benutzte Verfahren ist eine Verallgemeinerung der CANTORschen Konstruktion der Menge der reellen Zahlen.

Mit $\tilde{X}$ werde die Gesamtheit aller Fundamentalfolgen $\tilde{x} = \{x_1, x_2, \ldots\}$, $x_n \in X$, bezeichnet. Zwei Fundamentalfolgen

$$\tilde{x} = \{x_1, x_2, \ldots\} \quad \text{und} \quad \tilde{y} = \{y_1, y_2, \ldots\}$$

sollen genau dann als „gleich" angesehen werden, wenn

$$\lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n) = 0$$

[1]) Bedingungen für die Metrisierbarkeit eines Raumes findet man bei HAUSDORFF [1; § 26] und SMIRNOW [1].

ist. Wir definieren nun in X eine Metrik, indem wir

$$\varrho(\tilde{x}, \tilde{y}) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y_n)$$

setzen, wenn $\tilde{x} = \{x_1, x_2, \ldots\}$ und $\tilde{y} = \{y_1, y_2, \ldots\}$ ist. Dieser Grenzwert existiert stets. Es ist nämlich

$$\varrho(x_m, y_m) \leqq \varrho(x_m, x_n) + \varrho(x_n, y_n) + \varrho(y_n, y_m)$$

und folglich

$$\varrho(x_m, y_m) - \varrho(x_n, y_n) \leqq \varrho(x_m, x_n) + \varrho(y_n, y_m),$$

d. h., die Zahlen $\varrho(x_n, y_n)$ bilden eine Fundamentalfolge im R^1. Diese konvergiert auf Grund der Vollständigkeit von R^1.

Wie man leicht nachprüft, sind für $\varrho(\tilde{x}, \tilde{y})$ die Entfernungsaxiome 1, 2 und 3 erfüllt, so daß $\tilde{X}$ zu einem metrischen Raum wird. Dieser enthält insbesondere alle Folgen der Gestalt $\tilde{x} = \{x, x, x, \ldots\}$, wobei die Zuordnung $x \to \{x, x, x, \ldots\}$ eine isometrische Abbildung von X in $\tilde{X}$ ist. Deshalb wollen wir fortan nicht mehr zwischen dem Element x und der Folge $\{x, x, x, \ldots\}$ unterscheiden. Dann kann X als Teilraum von $\tilde{X}$ aufgefaßt werden. Insbesondere kann man von der Entfernung $\varrho(\tilde{x}, y)$ zwischen Punkten $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und $y \in X$ sprechen, und zwar ist nach Definition der Entfernung in $\tilde{X}$

$$\varrho(\tilde{x}, y) = \lim_{n\to\infty} \varrho(x_n, y) \quad \text{für} \quad \tilde{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}.$$

Ist nun $\tilde{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ eine beliebige Fundamentalfolge, so ergibt sich aus (1) für $m \to \infty$

$$\varrho(\tilde{x}, x_n) \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad n > N(\varepsilon), \tag{2}$$

so daß $\lim_{n\to\infty} \varrho(\tilde{x}, x_n) = 0$ ist: *Zu jedem $\tilde{x} \in \tilde{X}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es stets ein $x \in X$, für das $\varrho(\tilde{x}, x) < \varepsilon$ ist, d. h., X ist dicht in $\tilde{X}$.*

Der Raum $\tilde{X}$ ist vollständig. Es sei $\{\tilde{x}_n\}$ eine Fundamentalfolge aus X. Wie wir soeben gesehen haben, gibt es zu jedem $\tilde{x}_n$ ein $x_n \in X$ derart, daß

$$\varrho(\tilde{x}_n, x_n) < \frac{1}{n} \tag{3}$$

gilt. Daher ist $\tilde{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ eine Fundamentalfolge, wegen (2) also $\lim_{n\to\infty} \varrho(\tilde{x}, x_n) = 0$. Zusammen mit (3) erhalten wir hieraus $\lim_{n\to\infty} \varrho(\tilde{x}_n, \tilde{x}) = 0$, d. h., es ist $\lim_{n\to\infty} \tilde{x}_n = \tilde{x}$.

Der Raum $\tilde{X}$ heißt die *vollständige Hülle* des Raumes X.

I. *Der Raum $\tilde{X}$ ist unter allen vollständigen metrischen Räumen, die X enthalten, minimal, d. h., wenn Y ein vollständiger Raum ist, der X enthält, so gibt es eine isometrische Abbildung von $\tilde{X}$ in Y, bei der alle Punkte $x \in X$ festbleiben.*

Diese Abbildung ergibt sich einfach dadurch, daß man jeder Fundamentalfolge $\tilde{x} = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ ihren Grenzwert in Y zuordnet.

II. *In einem vollständigen metrischen Raum hat eine Folge $F_1 \supset F_2 \supset F_3 \supset \ldots$ von beschränkten nichtleeren abgeschlossenen Mengen $F_1, F_2, F_3, \ldots$, deren Durchmesser $d(F_n)$ gegen Null streben, einen nichtleeren Durchschnitt, der aus genau einem Punkt besteht.*

Beweis. Wir nehmen aus jeder Menge F_n ein Element x_n. Für $m > n$ gilt dann $x_m, x_n \in F_n$; folglich ist $\varrho(x_m, x_n) \leqq d(F_n)$. Daher ist $\{x_n\}$ eine Fundamentalfolge. Ihr Grenzwert (der auf Grund der Vollständigkeit des Raumes existiert) ist zugleich Grenzwert jeder Folge $\{x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \ldots\}$ und gehört daher zu jedem F_n. Mehr als einen Punkt, der allen F_n angehört, kann es aber nicht geben, weil $d(F_n) \to 0$ für $n \to \infty$.

Eine Teilmenge M eines metrischen Raumes X heißt *nirgends dicht*, wenn jede offene Kugel aus M eine offene Kugel enthält, die zu M disjunkt ist. Wir sagen von einer Menge M, sie sei eine *Menge erster Kategorie*, wenn sie Vereinigung von abzählbar vielen nirgends dichten Mengen ist. Alle anderen Mengen sollen von *zweiter Kategorie* heißen.

III. *Ein vollständiger metrischer Raum ist eine Menge zweiter Kategorie.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an, d. h., es sei X ein vollständiger metrischer Raum und $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$, wobei die M_n in X nirgends dicht sind. Es bezeichne S_0 eine offene Kugel mit dem Radius 1. Da M_1 nirgends dicht ist, gibt es in S_0 eine Kugel S_1 mit einem Radius $r_1 < \frac{1}{2}$, deren abgeschlossene Hülle $\bar{S}_1$ zu M_1 disjunkt ist. Da M_2 nirgends dicht ist, gibt es weiter in S_1 eine Kugel S_2 mit einem Radius $r_2 < \frac{1}{2^2}$, deren abgeschlossene Hülle $\bar{S}_2$ zu M_2 disjunkt ist. Auf diese Weise gelangen wir nacheinander zu einer Folge abgeschlossener Kugeln $\bar{S}_1 \supset \bar{S}_2 \supset \bar{S}_3 \supset \ldots$, auf die der Satz II anwendbar ist. Nun sei x_0 der Punkt, der allen Kugeln $\bar{S}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ angehört. Auf Grund unserer Konstruktion gehört dann x_0 zu keiner der Mengen M_n, was aber der Gleichung $X = \bigcup_{n=1}^{\infty} M_n$ widerspricht.

IV. *Ein separabler metrischer Raum X hat eine abzählbare Umgebungsbasis.*

Beweis. Ist $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ eine abzählbare Menge, die in X dicht ist, so bilden die offenen Kugeln

$$\varrho(x, x_k) < \frac{1}{n} \qquad (k, n = 1, 2, 3, \ldots)$$

eine abzählbare Basis von X. Um dies einzusehen, nehmen wir eine Umgebung $U(x_0, \varepsilon)$, die durch die Bedingung $\varrho(x_0, x) < \varepsilon$ bestimmt sei, und ein beliebiges $x' \in U(x_0, \varepsilon)$. Dann ist also $\varrho(x_0, x') < \varepsilon - \delta$ für ein $\delta > 0$. Wir

wählen nun ein n_0, für das $\frac{1}{n_0} < \frac{\delta}{2}$, und ein x_{k_0}, für das $\varrho(x', x_{k_0}) < \frac{1}{n_0}$ ist. Dann ist aber die durch $\varrho(x, x_{k_0}) < \frac{1}{n_0}$ bestimmte offene Kugel ganz in $U(x_0, \varepsilon)$ enthalten und enthält x'. Jedes $U(x_0, \varepsilon)$ und damit jede offene Menge in X ist also die Vereinigung von Kugeln $\varrho(x, x_k) < \frac{1}{n}$, d. h., diese Kugeln bilden eine Umgebungsbasis.

14. Kompakte Mengen in metrischen Räumen. Eine Menge Q eines metrischen Raumes X heißt *relativ kompakt*, wenn jede ihrer unendlichen Teilmengen eine Folge enthält, die aus unendlich vielen verschiedenen Elementen besteht und gegen ein Element des Raumes X konvergiert. Eine Menge Q eines metrischen Raumes X heißt *kompakt*, wenn jede ihrer unendlichen Teilmengen eine Folge enthält, die aus unendlich vielen verschiedenen Elementen besteht und gegen ein Element der Menge Q konvergiert. Offenbar ist eine Menge Q eines metrischen Raumes genau dann relativ kompakt, wenn ihre abgeschlossene Hülle kompakt ist.[1])

Eine Menge E von Punkten eines metrischen Raumes X wird ein *ε-Netz* für eine Menge $M \subset X$ genannt, wenn es zu jedem Element $x \in M$ ein Element $y \in E$ gibt, dessen Entfernung von x kleiner als $\varepsilon > 0$ ist.

I (Hausdorff [1]). *Eine Teilmenge M eines vollständigen metrischen Raumes X ist genau dann relativ kompakt, wenn es in X für die Menge M und jedes $\varepsilon > 0$ ein endliches ε-Netz gibt.*

Beweis. a) Die Bedingung ist notwendig. Die Menge M sei relativ kompakt und $x_1 \in M$. Ist $\varrho(x, x_1) < \varepsilon$ für alle $x \in M$, so ist die Menge, die nur aus dem Punkt x_1 besteht, bereits ein endliches ε-Netz. Liegt dieser Fall jedoch nicht vor, so gibt es wenigstens einen Punkt $x_2 \in M$, für den $\varrho(x_1, x_2) \geqq \varepsilon$ ist. Gilt dann für alle Punkte $x \in M$ entweder $\varrho(x, x_1) < \varepsilon$ oder $\varrho(x, x_2) < \varepsilon$, so bildet die Menge $\{x_1, x_2\}$ ein endliches ε-Netz. Anderenfalls gibt es einen Punkt x_3 mit $\varrho(x_1, x_3) \geqq \varepsilon$ und $\varrho(x_2, x_3) \geqq \varepsilon$. Nach dem i-ten Schritt gelangen wir entsprechend zu einem Punkt x_i mit der Eigenschaft, daß $\varrho(x_i, x_j) \geqq \varepsilon$ für $i \neq j$ ist. A priori sind nun zwei Fälle möglich: Entweder bricht das Verfahren nach endlich vielen Schritten ab, oder es ist unendlich oft fortsetzbar. Liegt der erste Fall vor und bricht das Verfahren nach dem n-ten Schritt ab, so ist $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ ein endliches ε-Netz. Im zweiten Fall ergibt sich demgegenüber eine unendliche Folge

$$x_1, x_2, x_3, \ldots \tag{1}$$

von Elementen aus M derart, daß

$$\varrho(x_i, x_j) \geqq \varepsilon \quad \text{für} \quad i \neq j \quad (i, j = 1, 2, 3, \ldots) \tag{2}$$

---

[1]) Man kann zeigen, daß eine Teilmenge Q eines separablen metrischen Raumes dann und nur dann kompakt ist, wenn sie bikompakt ist. Wir werden von diesem Satz keinen Gebrauch machen, empfehlen aber dem Leser als nützliche Übung, ihn zu beweisen.

ist. Dieser Fall ist nun aber unmöglich, weil wegen (2) keine Teilfolge der Folge (1) eine Fundamentalfolge ist, also im Widerspruch zur relativen Kompaktheit der Menge M auch nicht konvergiert.

Wir weisen darauf hin, daß im Beweis für die Notwendigkeit der Bedingung kein Gebrauch von der Vollständigkeit des Raumes X gemacht wurde.

b) Die Bedingung ist hinreichend. Zu jedem $\varepsilon > 0$ möge es in X ein endliches ε-Netz für die Menge M geben. Wir gehen von einer Folge $\{\varepsilon_n\}$ mit $\varepsilon_n \to 0$ für $n \to \infty$ aus und betrachten zu jedem ε_n das zugehörige ε_n-Netz

$$\{x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_{k_n}^{(n)}\}$$

der Menge M. Nun sei T eine unendliche Menge von Elementen aus M. Wir werden anschließend zeigen, daß man aus T eine Fundamentalfolge auswählen kann. Da diese wegen der vorausgesetzten Vollständigkeit des Raumes X konvergiert, enthält T eine konvergente Folge, womit der Beweis der relativen Kompaktheit der Menge M erbracht ist.

Zunächst umgeben wir die Punkte $x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \ldots, x_{k_1}^{(1)}$ des ε_1-Netzes mit Kugeln vom Radius ε_1. Dann liegt jeder Punkt aus T in einer dieser Kugeln. Folglich enthält wenigstens eine dieser Kugeln eine unendliche Teilmenge von T. Diese Teilmenge werde mit T_1 bezeichnet. Nun umgeben wir die Punkte $x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \ldots, x_{k_2}^{(2)}$ des ε_2-Netzes mit Kugeln vom Radius ε_2. Wenigstens eine dieser Kugeln enthält eine unendliche Teilmenge T_2 von T_1. Nacheinander erhalten wir auf diese Weise eine ineinandergeschachtelte Folge $T \supset T_1 \supset T_2 \supset T_3 \supset \ldots$, wobei die Menge T_n jeweils in einer Kugel vom Radius ε_n liegt. Wir greifen nun aus T_1 einen Punkt a_1 heraus, aus T_2 einen Punkt $a_2 \neq a_1$, aus T_3 einen Punkt $a_3 \neq a_2$ und $\neq a_1$ usw. So erhalten wir die in T enthaltene unendliche Folge $a_1, a_2, a_3, \ldots$, die sicher eine Fundamentalfolge ist. Um dies einzusehen, betrachten wir die Punkte $a_n \in T_n$ und $a_{n+p} \in T_{n+p}$. Nun gilt aber $T_{n+p} \subset T_n$, und daher liegen die beiden Punkte a_n und a_{n+p} in einer Kugel vom Radius ε_n, d. h., es ist

$$\varrho(a_{n+p}, a_n) \leqq 2\varepsilon_n.$$

II. *Eine Teilmenge M eines vollständigen metrischen Raumes X ist genau dann relativ kompakt, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ in X ein relativ kompaktes ε-Netz für die Menge M gibt.*

Beweis. Die Bedingung ist offenbar notwendig, weil es nach Satz I sogar ein endliches ε-Netz für die Menge M gibt. Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Bedingung auch hinreichend ist. Es sei also E ein relativ kompaktes $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz für die Menge M. Nach Satz I gibt es ein endliches $\frac{\varepsilon}{2}$-Netz F für die Menge E. Dann ist F aber ein endliches ε-Netz für M. Ist nämlich $x \in M$, so gibt es ein Element $y \in E$, für das $\varrho(x, y) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, und ein Element $z \in F$, für das $\varrho(y, z) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist, woraus $\varrho(x, z) < \varepsilon$ folgt. Auf Grund von Satz I schließen wir hieraus, daß M relativ kompakt ist.

§ 3. Topologische lineare Räume

1. Definition des topologischen linearen Raumes. Eine Menge X von Elementen $x, y, z, \ldots$ wird *topologischer linearer Raum* genannt, wenn folgendes gilt:

1. X ist ein linearer Raum;
2. X ist ein HAUSDORFFscher Raum;
3. die Summe $x + y$ der Vektoren x und y ist bezüglich beider Variablen x und y stetig;
4. das Produkt αx des Vektors x mit der Zahl α ist bezüglich beider Variablen α und x stetig.

Hierbei kann X ein reeller oder ein komplexer linearer Raum sein.[1] Um beide Fälle nicht einzeln für sich betrachten zu müssen, bezeichnen wir mit C die Gesamtheit der reellen Zahlen oder die Gesamtheit der komplexen Zahlen (je nachdem, ob wir einen reellen oder komplexen Raum betrachten), und zwar mit der üblichen Topologie (vgl. Beispiel 1 und 2 aus § 2, Nr. 1). Die Bedingung 4 bedeutet nun, daß die Abbildung $\{\alpha, x\} \to \alpha x$ des topologischen Produktes $C \times X$ in X stetig ist. Entsprechend besagt 3, daß die Abbildung $\{x, y\} \to x + y$ des topologischen Produktes $X \times X$ in X stetig ist.

Ist X ein topologischer linearer Raum, so ist die Abbildung $x \to x + x_0$ wegen 3 für beliebiges $x_0 \in X$ stetig. Sie wird eine *Verschiebung* in X genannt. Da die inverse Abbildung $x \to x - x_0$ existiert und ebenfalls stetig ist, ist jede Verschiebung $x \to x + x_0$ eine topologische Abbildung. Ist daher $\{U(0)\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes 0, so ist $\{U(0) + x_0\}$ eine Umgebungsbasis des Punktes x_0. Ist insbesondere $\{U(0)\}$ die Gesamtheit aller Umgebungen von 0, so ist $\{U(0) + x_0\}$ die Gesamtheit aller Umgebungen von x_0.

Eine Abbildung f eines topologischen linearen Raumes X in einen topologischen linearen Raum Y wird *topologischer Isomorphismus* genannt, wenn

1. f eine isomorphe Abbildung von X in Y ist;
2. f eine homöomorphe Abbildung von X in Y ist.

Zwei topologische lineare Räume X und Y heißen *topologisch isomorph*, wenn ein topologischer Isomorphismus von X auf Y existiert.

In der Theorie der topologischen linearen Räume werden topologisch isomorphe Räume als nicht wesentlich verschieden betrachtet.

Ein topologischer linearer Raum X heißt *lokal konvex*, wenn es in ihm für den Punkt Null eine Basis von Umgebungen gibt, die in X sämtlich symmetrische konvexe Mengen sind (vgl. § 1, Nr. 8 und 9). Wir werden im weiteren nur solche topologischen linearen Räume betrachten, die lokal konvex sind, und hierbei der Kürze halber einfach von *lokal konvexen Räumen* sprechen. Es sei allerdings darauf hingewiesen, daß einige Ergebnisse, insbesondere alle Ergebnisse von Nr. 2, auch für allgemeine topologische lineare Räume gelten.

---

[1]) Wir werden hauptsächlich komplexe Räume betrachten. Falls nichts anderes gesagt wird, sollen die betrachteten topologischen linearen Räume demgemäß immer komplex sein.

Beispiele. 1. Der topologische Raum C^n aus § 2, Nr. 2, Beispiel 2, kann als linearer Raum betrachtet werden (vgl. Beispiel 1 aus § 1, Nr. 1). Dann wird C^n ein komplexer topologischer linearer Raum. Er ist lokal konvex. In der Tat, es sei $U(a, \varepsilon)$ die Menge aller x, für die $p(x-a) < \varepsilon$ mit $p(x) = (|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2)^{\frac{1}{2}}$ ist. Diese Mengen bilden nun eine Umgebungsbasis des Punktes a. Hierbei ist $p(x)$ ein auf C^n definiertes konvexes Funktional, so daß $U(a, \varepsilon)$ eine konvexe Menge in X ist (vgl. § 1, Nr. 8). Ganz entsprechend kann der Raum R^1 aus § 2, Nr. 1, Beispiel 1, als reeller linearer Raum betrachtet werden (hierzu definiert man die Vektoraddition als die gewöhnliche Zahlenaddition und die Multiplikation mit einer Zahl als die gewöhnliche Zahlenmultiplikation). Damit wird R^1 zu einem lokal konvexen reellen topologischen linearen Raum.

2. Es sei X ein beliebiger lokal bikompakter (eventuell also auch bikompakter) Raum. Mit $C(X)$ werde die Gesamtheit aller stetigen komplexen Funktionen $f(x)$ über X bezeichnet. Wir nehmen in $C(X)$ als Addition die gewöhnliche Addition von Funktionen und als Multiplikation mit einer komplexen Zahl die gewöhnliche Multiplikation einer Funktion mit einer Zahl. Dann ist $C(X)$ ein linearer Raum. Weiter definieren wir in X auf folgende Weise eine Topologie. Es sei K eine beliebige bikompakte Teilmenge von X und ε eine beliebige positive Zahl. Unter der Umgebung $U(f_0, K, \varepsilon)$ der Funktion $f_0 \in C(X)$ verstehen wir dann die Gesamtheit aller Funktionen $f(x)$ aus $C(X)$, die der Ungleichung

$$|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in K$$

genügen. Lassen wir nun K alle bikompakten Teilmengen von X und ε alle positiven Zahlen durchlaufen, so erhalten wir ein System von Umgebungen, das wir als Umgebungsbasis der Funktion f_0 ansehen. Wie man sofort einsieht, sind die Bedingungen 3 und 4 der Definition des topologischen linearen Raumes erfüllt. Weiterhin bestätigt man leicht, daß $U(f_0, K, \varepsilon)$ eine konvexe Menge in X ist. Folglich ist $C(X)$ ein lokal konvexer komplexer topologischer linearer Raum.

2. Abgeschlossene Teilräume in topologischen linearen Räumen. Eine Menge $\mathfrak{M}$ von Elementen eines topologischen linearen Raumes X heißt *abgeschlossener Teilraum* des Raumes X, wenn folgendes gilt:

1. $\mathfrak{M}$ ist ein linearer Teilraum des linearen Raumes X;
2. $\mathfrak{M}$ ist eine abgeschlossene Teilmenge des topologischen Raumes X.

Offenbar gilt der Satz

I. *Der Durchschnitt beliebig vieler abgeschlossener Teilräume von X ist ebenfalls ein abgeschlossener Teilraum von X* (vgl. § 1, Nr. 3, und § 2, Nr. 3).

Insbesondere erhält man als Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilräume von X, die eine gegebene Menge $M \subset X$ enthalten, den minimalen abgeschlossenen Teilraum von X, der M enthält. Dieser ist die sogenannte *abgeschlossene lineare Hülle* der Menge M. Wir bezeichnen sie mit $[M]$. Ist eine Gesamtheit von Mengen $M_1, M_2, \ldots$ gegeben, deren Anzahl endlich, abzählbar unendlich oder auch nicht abzählbar unendlich ist, so wollen wir mit $[M_1, M_2, \ldots]$ die abgeschlossene lineare Hülle der Vereinigung dieser Mengen bezeichnen.

II. *Ist $\mathfrak{M}$ ein (im allgemeinen nicht abgeschlossener) linearer Teilraum von X, so ist seine abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{M}}$ ebenfalls ein linearer Teilraum und folglich ein abgeschlossener linearer Teilraum von X.*

Beweis. Für ein festes $y \in \mathfrak{M}$ bildet die stetige Abbildung $f(x) = x + y$ den Unterraum $\mathfrak{M}$ in sich ab. Folglich wird bei dieser Abbildung auch $\overline{\mathfrak{M}}$ in sich abgebildet (vgl. § 2, Nr. 5, Satz III). Dies bedeutet aber, daß mit $x \in \overline{\mathfrak{M}}$ und $y \in \mathfrak{M}$ auch $x + y \in \overline{\mathfrak{M}}$ ist. Für ein festes $y \in \overline{\mathfrak{M}}$ bildet die Abbildung $f(y) = x + y$ dann aber $\mathfrak{M}$ in $\overline{\mathfrak{M}}$ ab und daher auch $\overline{\mathfrak{M}}$ in $\overline{\mathfrak{M}}$, d. h., aus $x \in \overline{\mathfrak{M}}$ und $y \in \overline{\mathfrak{M}}$ folgt $x + y \in \overline{\mathfrak{M}}$. Analog zeigt man, daß mit $x_0 \in \overline{\mathfrak{M}}$ auch αx_0 zu $\overline{\mathfrak{M}}$ gehört.

Aus Satz II folgt:

Die abgeschlossene lineare Hülle einer Menge $\mathfrak{M}$ stimmt mit der abgeschlossenen Hülle der Gesamtheit aller endlichen Linearkombinationen von Elementen aus $\mathfrak{M}$ überein.

3. Konvexe Mengen und konvexe Funktionale in lokal konvexen Räumen. Wir betrachten in einem lokal konvexen Raum X eine konvexe Menge K, die 0 als inneren Punkt enthält. Dann enthält K eine konvexe symmetrische Umgebung $U(0)$ von 0. Für jedes feste $x \in X$ ist das Produkt αx eine stetige Funktion von α, die für $\alpha = 0$ verschwindet. Demnach gibt es eine positive Zahl δ derart, daß $\alpha x \in U(0)$ für $|\alpha| < \delta$ und damit

$$\alpha x \in K \quad \text{für} \quad |\alpha| < \delta$$

gilt. Daher ist

$$x \in \frac{1}{\alpha} K \quad \text{für} \quad |\alpha| < \delta. \tag{1}$$

Wir bezeichnen nun mit A_x die Gesamtheit aller positiven Zahlen β, für die $x \in \beta K$ ist. Auf Grund von (1) gehört das Intervall $\left(\frac{1}{\delta}, \infty\right)$ zu A_x. Wir setzen

$$p(x) = \inf A_x \tag{2}$$

und behaupten, daß $p(x)$ ein konvexes Funktional ist.

Zum Beweis bemerken wir zunächst, daß nach Definition von $p(x)$ sicher

$$p(x) \geqq 0$$

und für beliebiges $\varepsilon > 0$

$$x \in [p(x) + \varepsilon] K \tag{3}$$

ist. Nun zeigen wir, daß

$$p(x + y) \leqq p(x) + p(y) \tag{4}$$

ist. Hierzu setzen wir

$$t = \frac{p(y) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}, \quad \text{also} \quad 1 - t = \frac{p(x) + \varepsilon}{p(x) + p(y) + 2\varepsilon}. \tag{5}$$

Aus (3) folgt

$$\frac{1}{p(x) + \varepsilon} x \in K, \quad \frac{1}{p(y) + \varepsilon} y \in K.$$

Daher gilt wegen der Konvexität von K

$$(1 - t) \frac{1}{p(x) + \varepsilon} x + t \frac{1}{p(y) + \varepsilon} y \in K.$$

Unter Berücksichtigung von (5) erhalten wir hieraus

$$\frac{1}{p(x)+p(y)+2\varepsilon}(x+y)\in K,$$

d. h., es ist

$$x+y\in[p(x)+p(y)+2\varepsilon]K.$$

Nach Definition von $p(x+y)$ bedeutet dies, daß $p(x+y)\leqq p(x)+p(y)+2\varepsilon$ ist. Hieraus folgt nun (4), weil $\varepsilon>0$ beliebig ist. Ferner ist $A_{\alpha x}=\alpha A_x$ für $\alpha>0$, woraus unter Berücksichtigung von (2) schließlich die Beziehung $p(\alpha x)=\alpha p(x)$ folgt, so daß $p(x)$ tatsächlich ein konvexes Funktional ist.

Ist K symmetrisch, so ist $p(x)$ offenbar ein symmetrisches konvexes Funktional.

Für $x\in K$ ist $1\in A_x$ und daher

$$p(x)\leqq 1 \quad \text{für alle} \quad x\in K.$$

Ist andererseits $p(x)<1$, so muß $1\in A_x$ und demzufolge $x\in K$ sein. Folglich ist $p(x)\geqq 1$ für alle $x\notin K$. Hieraus und aus den Ergebnissen von § 1, Nr. 8, schließen wir, daß der Rand der Menge K genau aus den Vektoren x besteht, für die $p(x)=1$ ist.

Bemerkung. Das oben konstruierte Funktional $p(x)$ ist stetig. In der Umgebung $\varepsilon U(0)$ des Punktes 0 gilt nämlich $p(x)<\varepsilon$, so daß

$$|p(x)-p(x_0)|\leqq p(x-x_0)<\varepsilon$$

gilt, falls $x-x_0\in\varepsilon U(0)$ ist.

Nun sei K eine konvexe Menge und x_0 ein innerer Punkt von K. Dann ist $K-x_0$ eine konvexe Menge, die 0 als inneren Punkt und damit eine gewisse konvexe symmetrische Umgebung dieses Punktes enthält. Wenden wir die oben beschriebene Konstruktion nun auf die konvexe Menge $K-x_0$ an, so erhalten wir den Satz

I. *Ist x_0 ein innerer Punkt einer konvexen Menge K, so gibt es ein konvexes Funktional $p(x)$ mit folgenden Eigenschaften:*

1. $p(x-x_0)\leqq 1$ *für alle* $x\in K$;
2. $p(x-x_0)=1$ *nur für die Randpunkte* x *von* K;
3. $p(x-x_0)>1$ *für alle* x, *die weder zu* K *noch zum Rand von* K *gehören.*

Hieraus und aus den Ergebnissen von § 1, Nr. 9, ergibt sich der Satz

II. *In einem reellen lokal konvexen Raum sei eine konvexe Menge K gegeben, die einen inneren Punkt enthält. Dann gilt:*

1. *Durch jeden Randpunkt der Menge K läßt sich eine Stützhyperebene von K legen.*
2. *Gehört x_0 weder zu K selbst noch zum Rand von K, so gibt es eine Stützhyperebene von K, die x_0 von K trennt.*

Ferner gilt der Satz

III. *Ist K eine konvexe abgeschlossene Menge, so gehören alle Randpunkte von K selbst zu K.*

Beweis. Es sei x_0 ein Randpunkt von K und $[x_1, x_0]$ eine Strecke, deren innere Punkte sämtlich zu K gehören. Für $0 < t_n < 1$ und $t_n \to 1$ gehören dann die Punkte $x_n = (1 - t_n) x_1 + t_n x_0$ zu K. Die aus ihnen gebildete Folge $\{x_n\}$ konvergiert gegen x_0. Da K abgeschlossen ist, muß $x_0 \in K$ sein.

4. Definition einer lokal konvexen Topologie mit Hilfe konvexer Funktionale. Es sei $U(0)$ eine symmetrische konvexe Umgebung des Punktes 0. Wir wenden auf die konvexe Menge $K = U(0)$ die oben beschriebene Konstruktion an. Das entsprechende konvexe Funktional werde mit $p(x)$ bezeichnet. Ist $x \in U(0)$, so gilt $p(x) < 1$. Da nämlich $U(0)$ eine offene Umgebung und das Produkt αx für $\alpha = 1$ stetig ist, gibt es ein $\varepsilon > 0$ derart, daß $\alpha x \in U(0)$ für $|\alpha - 1| < \varepsilon$ ist. Dann enthält aber A_x eine Zahl, die kleiner als Eins ist, und es gilt tatsächlich $p(x) < 1$.

Aus $p(x) < 1$ folgt umgekehrt $x \in U(0)$, wie man sofort sieht, wenn man in Nr. 3, (3), $\varepsilon = 1 - p(x)$ setzt.

Es gilt also der Satz

I. *Jeder symmetrischen konvexen Umgebung $U(0)$ des Punktes 0 entspricht ein symmetrisches konvexes Funktional $p(x)$ derart, daß $U(0)$ gerade die Gesamtheit derjenigen Vektoren x ist, für die $p(x) < 1$ ist.*

Damit entspricht einer Basis $\{U(0)\}$ von 0 aus konvexen symmetrischen Umgebungen ein System symmetrischer konvexer Funktionale $p(x)$. Dieses System hat dann folgende Eigenschaft: *Zu jedem $x_0 \neq 0$ gibt es im System $\{p(x)\}$ ein Funktional $p(x)$, für das $p(x_0) \neq 0$ ist.*

In der Tat, ist $x_0 \neq 0$, so gibt es in $\{U(0)\}$ eine Umgebung $U(0)$, die x_0 nicht enthält. Folglich genügt das zur Umgebung $U(0)$ gehörige Funktional $p(x)$ der Bedingung $p(x_0) \geqq 1$, so daß gewiß $p(x_0) \neq 0$ ist.

Ein System $\{p(x)\}$ von symmetrischen konvexen Funktionalen eines linearen Raumes X soll *ausreichend* genannt werden, wenn es zu jedem Vektor x_0 aus X ein Funktional $p(x)$ des Systems gibt, für das $p(x_0) > 0$ ist.

Damit gilt der Satz

II. *Einer Basis $\{U(0)\}$ des Punktes 0, die nur aus symmetrischen konvexen Umgebungen besteht, entspricht ein ausreichendes System $\{p(x)\}$ symmetrischer konvexer Funktionale.*

Wir nehmen nun umgekehrt an, daß über dem linearen Raum X ein beliebiges ausreichendes System $\{p(x)\}$ symmetrischer konvexer Funktionale gegeben sei. Um in X eine Topologie einzuführen, definieren wir als Umgebung $U(x_0; p_1, \ldots, p_n; \varepsilon)$ eines Vektors x_0 die Gesamtheit der Vektoren x, die den Bedingungen $p_k(x - x_0) < \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ für feste $p_k(x) \in \{p(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, für festes n und festes $\varepsilon > 0$ genügen. Die Gesamtheit der Umgebungen, die man auf diese Weise für alle möglichen $n = 1, 2, \ldots$, alle möglichen $p_k(x)$ aus $\{p(x)\}$ und alle möglichen $\varepsilon > 0$ erhält, nehmen wir dann als Umgebungsbasis des Vektors x_0. Offenbar erhält man diese Umgebungen aus den entsprechenden Umgebungen des Punktes 0 mit Hilfe der Verschiebungen $x \to x + x_0$, wobei die Umgebungen von 0 symmetrische konvexe Mengen in X sind (vgl. § 1, Nr. 8).

Bei dieser Definition der Umgebungsbasen wird X zu einem topologischen linearen Raum, der nach unseren obigen Überlegungen lokal konvex ist.

Wir haben zunächst nachzuweisen, daß die Bedingungen 1 bis 3 der Definition der Umgebungsbasis erfüllt sind (vgl. § 2, Nr. 2). Die Bedingungen 1 und 2 sind trivialerweise erfüllt. Um die Bedingung 3 nachzuweisen, betrachten wir die durch

$$p_k(x - x_0) < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmte Umgebung $U(x_0)$ von x_0 sowie einen Punkt x_1, der in $U(x_0)$ liegt. Es soll also $p_k(x_1 - x_0) < \varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ sein. Mit $U_1(x_1)$ werde die durch

$$p_k(x - x_1) < \varepsilon_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmte Umgebung bezeichnet, wobei ε_1 das Minimum der Zahlen $\varepsilon - p_k(x_1 - x_0)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ bedeute. Ist nun $x \in U_1(x_1)$, so gilt

$$\begin{aligned} p_k(x - x_0) &= p_k(x - x_1 + x_1 - x_0) \leqq p_k(x - x_1) + p_k(x_1 - x_0) \\ &< \varepsilon_1 + p_k(x_1 - x_0) \leqq \varepsilon - p_k(x_1 - x_0) + p_k(x_1 - x_0) = \varepsilon \end{aligned}$$

und folglich $U_1(x_1) \subset U(x_0)$.

Wir prüfen nun nach, ob das Trennungsaxiom erfüllt ist. Es sei $x_1 \neq x_2$, also $x_1 - x_2 \neq 0$. Dann gibt es ein Funktional $p_0(x) \in \{p(x)\}$, für das $p_0(x_1 - x_2) > 0$ ist. Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{2} p_0(x_1 - x_2)$. Dann sind die durch die Ungleichungen

$$p_0(x - x_1) < \varepsilon \quad \text{und} \quad p_0(x - x_2) < \varepsilon$$

definierten Umgebungen $U_1(x_1)$ und $U_2(x_2)$ zueinander disjunkt. Hätten sie nämlich einen gemeinsamen Punkt x, so müßte dieser den letzten beiden Ungleichungen gleichzeitig genügen, so daß

$$p_0(x_1 - x_2) = p_0(x_1 - x + x - x_2) \leqq p_0(x_1 - x) + p_0(x_2 - x) < 2\varepsilon$$

wäre, was aber der Definition von ε widerspricht.

Damit ist bewiesen, daß X ein Hausdorffscher Raum ist. Es bleibt also nur noch nachzuweisen, daß die Bedingungen 3 und 4 der Definition des topologischen linearen Raumes erfüllt sind, d. h., daß die Summe $x + y$ und das Produkt αx stetig sind.

Die Bedingungen

$$p_k(x - x_0 - y_0) < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmen eine gewisse Umgebung des Punktes $x_0 + y_0$, die wir mit $U(x_0 + y_0)$ bezeichnen. Wir betrachten außerdem die Umgebungen

$$U(x_0)\colon \; p_k(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

$$U(y_0)\colon \; p_k(y - y_0) < \frac{\varepsilon}{2} \quad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Mit $x \in U(x_0)$ und $y \in U(y_0)$ gilt nun, wie man leicht sieht, $x + y \in U(x_0 + y_0)$. Damit ist die Stetigkeit der Summe bereits bewiesen.

Die Ungleichungen

$$p_k(x - \alpha_0 x_0) < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

bestimmen eine Umgebung des Punktes $\alpha_0 x_0$. Diese werde mit $U(\alpha_0, x_0)$ bezeichnet. Gehört α zu

$$U(\alpha_0): \quad |\alpha - \alpha_0| < \varepsilon_1$$

und x zu

$$U(x_0): \quad p_k(x - x_0) < \varepsilon_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

so gilt

$$\begin{aligned} p_k(\alpha x - \alpha_0 x_0) &= p_k(\alpha x - \alpha x_0 + \alpha x_0 - \alpha_0 x_0) \\ &\leqq |\alpha|\, p_k(x - x_0) + |\alpha - \alpha_0|\, p_k(x_0) \\ &< (|\alpha_0| + \varepsilon_1)\,\varepsilon_1 + \varepsilon_1 p_k(x_0). \end{aligned}$$

Nimmt man ε_1 hinreichend klein, so wird der letzte Ausdruck kleiner als ε, womit die Stetigkeit des Produktes αx bewiesen ist.

Wir haben also den Satz

III. *Jedes ausreichende System $\{p(x)\}$ von konvexen symmetrischen Funktionalen über einem linearen Raum X bestimmt in X eine Topologie, mit der X ein lokal konvexer topologischer linearer Raum ist. Hierbei werden die Umgebungen einer Basis durch Ungleichungen der Gestalt*

$$p_k(x - x_0) < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

mit $p_k(x) \in \{p(x)\}$ und $\varepsilon > 0$ bestimmt.

5. Endlichdimensionale Räume. Wir wollen jetzt die Ergebnisse von Nr. 4 auf einen Raum endlicher Dimension anwenden. Es sei C^n ein n-dimensionaler Raum und $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ eine Basis in C^n. Ist $x = \xi_1 e_1 + \xi_2 e_2 + \cdots + \xi_n e_n$, so setzen wir

$$p_0(x) = \sqrt{|\xi_1|^2 + |\xi_2|^2 + \cdots + |\xi_n|^2}.$$

Offenbar ist $p_0(x)$ ein symmetrisches konvexes Funktional über C^n. Hierbei gilt $p_0(x) = 0$ nur für $x = 0$. Das Funktional $p_0(x)$ bildet daher bereits ein ausreichendes System und bestimmt demzufolge eine lokal konvexe Topologie in C^n. Als Umgebung $U_0(x_0)$ eines Punktes $x_0 = \xi_1^0 e_1 + \xi_2^0 e_2 + \cdots + \xi_n^0 e_n$ hat man in dieser Topologie die Gesamtheit der Vektoren x, für die

$$p_0(x - x_0) = \sqrt{|\xi_1 - \xi_1^0|^2 + |\xi_2 - \xi_2^0|^2 + \cdots + |\xi_n - \xi_n^0|^2} < \varepsilon \qquad (\varepsilon > 0)$$

ist.

I. *Jede lokal konvexe Topologie des Raumes C^n stimmt mit der durch das Funktional $p_0(x)$ bestimmten Topologie überein.*

Beweis. Es sei $\{p\}$ ein ausreichendes System konvexer Funktionale, das in C^n eine lokal konvexe Topologie bestimmt. Ferner sei $U(x_0)$ die durch die Ungleichungen

$$p_k(x - x_0) < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, m \quad \text{und} \quad p_k \in \{p\})$$

festgelegte Umgebung. Wir setzen

$$c = \max_{k,j} \{p_k(e_j)\}. \tag{1}$$

Dann ist die Umgebung

$$U_0(x_0): \quad p_0(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{cn} \tag{2}$$

in $U(x_0)$ enthalten; aus (1) und (2) folgt nämlich

$$\begin{aligned} p_k(x - x_0) &= p_k\big((\xi_1 - \xi_1^0)e_1 + \cdots + (\xi_n - \xi_n^0)e_n\big) \\ &\leqq |\xi_1 - \xi_1^0|\, p_k(e_1) + \cdots + |\xi_n - \xi_n^0|\, p_k(e_n) \\ &\leqq cn\frac{\varepsilon}{cn} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Es bleibt nur noch zu zeigen, daß auch umgekehrt jede Umgebung $U_0(x_0)$ eine geeignete Umgebung $U(x_0)$ enthält. Es sei $x_1 \neq 0$ ein beliebiger Vektor aus C^n. Dann gibt es ein Funktional $p_1 \in \{p\}$ mit $p_1(x_1) > 0$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_1$ den Teilraum aller Vektoren x, für die $p_1(x) = 0$ ist. Aus $x_1 \notin \mathfrak{M}_1$ folgt, daß die Dimension von $\mathfrak{M}_1$ kleiner als n ist. Ist $\mathfrak{M}_1 \neq (0)$, so gibt es einen Vektor $x_2 \neq 0$, der zu $\mathfrak{M}_1$ gehört, und ein Funktional $p_2 \in \{p\}$, für das $p_2(x_2) > 0$ ist. Mit $\mathfrak{M}_2$ werde der Teilraum aller Vektoren $x \in \mathfrak{M}_1$ bezeichnet, für die $p_2(x) = 0$ ist. Offenbar gilt $x_2 \notin \mathfrak{M}_2$, so daß die Dimension von $\mathfrak{M}_2$ kleiner als die von $\mathfrak{M}_1$, also kleiner als $n - 1$ ist. Wir gelangen so zu einer Folge von Teilräumen

$$\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \ldots \supset \mathfrak{M}_k = (0), \quad 1 \leqq k \leqq n,$$

und zugehörigen Funktionalen $p_1, p_2, \ldots, p_k \in \{p\}$. Hierbei ist $\mathfrak{M}_k$ die Gesamtheit aller Vektoren $x \in C^n$, die den Bedingungen

$$p_1(x) = p_2(x) = \cdots = p_k(x) = 0 \tag{3}$$

genügen. Folglich erfüllt nur der Nullvektor die Bedingungen (3). Wir setzen nun

$$p(x) = \max\{p_1(x), p_2(x), \ldots, p_k(x)\}. \tag{4}$$

Offenbar ist $p(x)$ ein konvexes Funktional über C^n, wobei $p(x) = 0$ nur für $x = 0$ gilt. Wir werden beweisen, daß

$$p_0(x) \leqq c\, p(x) \tag{5}$$

ist, wobei c eine Konstante bezeichnet. Hierzu nehmen wir das Gegenteil an, d. h., es gäbe eine Folge von Vektoren x_k derart, daß

$$p_0(x_k) > k\, p(x_k) \quad (k = 1, 2, 3, \ldots) \tag{6}$$

ist. Setzen wir

$$y_k = \frac{1}{p_0(x_k)} x_k,$$

so gilt

$$p_0(y_k) = 1, \tag{7}$$

und aus (6) folgt

$$p(y_k) < \frac{1}{k}.$$

Nun sei

$$y_k = \eta_{1k} e_1 + \cdots + \eta_{nk} e_n.$$

Dann bedeutet (7), daß

$$|\eta_{1k}|^2 + \cdots + |\eta_{nk}|^2 = 1 \tag{8}$$

ist, d. h., die Folgen $\{\eta_{1k}\}, \ldots, \{\eta_{nk}\}$ sind beschränkt. Wir können daher eine Teilfolge auswählen (die wir wieder mit y_k bezeichnen) derart, daß die entsprechenden Folgen $\{\eta_{1k}\}, \ldots, \{\eta_{nk}\}$ konvergieren. Mit $\eta_1, \ldots, \eta_k$ bezeichnen wir ihre Grenzwerte. Wie aus (8) folgt, gilt auch $|\eta_1|^2 + \cdots + |\eta_n|^2 = 1$. Demzufolge ist $y = \eta_1 e_1 + \cdots + \eta_n e_n$ nicht der Nullvektor. Gehen wir nun in

$$p(y) \leqq p(y - y_k) + p(y_k) \leqq p(e_1)\,|\eta_1 - \eta_{1k}| + \cdots + p(e_k)\,|\eta_n - \eta_{nk}| + \frac{1}{k}$$

für $k \to \infty$ zur Grenze über, so schließen wir, daß $p(y) = 0$ für $y \neq 0$ ist. Dies steht aber im Widerspruch zu der oben erwähnten Eigenschaft des Funktionals $p(x)$.

Die Ungleichung (5) gilt also tatsächlich. Auf Grund von (4) stimmt dann die Gesamtheit der Vektoren x, die der Ungleichung $p(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{c}$ genügen, mit der durch

$$p_1(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{c}, \ \ldots, \ p_k(x - x_0) < \frac{\varepsilon}{c}$$

definierten Umgebung $U(x_0)$ überein. Die Umgebung $U(x_0)$ ist also in der oben vorgegebenen Umgebung $p_0(x - x_0) < \varepsilon$ enthalten.

Aus Satz I folgt der Satz

II. *Alle endlichdimensionalen lokal konvexen topologischen linearen Räume gleicher Dimension sind topologisch isomorph.*

6. Stetige lineare Funktionale. Es sei X ein lokal konvexer Raum und $\{p(x)\}$ ein ausreichendes System symmetrischer konvexer Funktionale, welchem gemäß Nr. 4, Satz III (mit $x_0 = 0$), die aus symmetrischen konvexen Umgebungen bestehende Basis $\{U(0)\}$ des Punktes 0 entsprechen möge.[1]) Die im folgenden betrachteten linearen Funktionale sind über dem ganzen Raum X definiert.

I. *Ein lineares Funktional $f(x)$ über X ist genau dann für $x = 0$ stetig, wenn für ein $p_0(x)$ aus dem System $\{p(x)\}$ die Ungleichung*

$$|f(x)| \leqq p_0(x) \quad \textit{für alle} \quad x \in X \tag{1}$$

erfüllt ist. In diesem Fall ist $f(x)$ auf ganz X stetig.

Beweis. Das Funktional $f(x)$ sei für $x = 0$ stetig. Dann gibt es eine Umgebung $U(0)$ derart, daß

$$|f(x_1)| < 1 \quad \text{für} \quad x_1 \in U(0) \tag{2}$$

---

[1]) Jedes $U(0)$ ist gemäß Nr. 4, Satz III, durch endlich viele Bedingungen $p_k(x) < \varepsilon$, $p_k \in \{p\}$, definiert. Erweitert man das System $\{p\}$ durch Hinzunahme aller Funktionale $p = \sup\{p_1, \ldots, p_n\}$, $p_1, \ldots, p_n \in \{p\}$, so definiert das neue System die gleiche Topologie, und die Umgebungen der Basis können durch eine einzige Ungleichung $p(x) < \varepsilon$ definiert werden. Im folgenden wird nun dieses erweiterte System zugrunde gelegt. — *Anm. d. Red.*

ist. Dieser Umgebung möge das Funktional $p_0(x)$ aus $\{p(x)\}$ entsprechen. Dann ist $U(0)$ die Gesamtheit aller x_1, für die $p_0(x_1) < 1$ ist. Daher kann (2) auch in der Gestalt

$$|f(x_1)| < 1 \quad \text{für} \quad p_0(x_1) < 1 \tag{3}$$

geschrieben werden. Nun sei x ein beliebiger Vektor aus X. Wir setzen

$$x_1 = \frac{1}{p_0(x) + \varepsilon}\, x, \quad \varepsilon > 0.$$

Dann ist

$$p_0(x_1) = \frac{1}{p_0(x) + \varepsilon}\, p_0(x) < 1.$$

Wegen (3) gilt also auch $|f(x_1)| < 1$, d. h.

$$\left| f\left(\frac{1}{p_0(x) + \varepsilon}\, x\right) \right| < 1.$$

Hieraus folgt nun

$$|f(x)| < p_0(x) + \varepsilon,$$

so daß

$$|f(x)| \leqq p_0(x)$$

sein muß, weil ε beliebig war.

Umgekehrt sei jetzt die Bedingung (1) für ein $p_0(x) \in \{p(x)\}$ erfüllt. Wir zeigen, daß $f(x)$ für alle $x_0 \in X$ stetig ist.

Hierzu müssen wir nachweisen, daß es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(x_0)$ gibt, in der $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ ist. Eine solche Umgebung wird aber durch die Ungleichung $p_0(x - x_0) < \varepsilon$ bestimmt; aus (1) folgt nämlich

$$|f(x) - f(x_0)| = |f(x - x_0)| \leqq p_0(x - x_0).$$

II. *Zu jedem Element $x_0 \neq 0$ eines lokal konvexen Raumes X gibt es ein stetiges lineares Funktional $f(x)$ derart, daß $f(x_0) \neq 0$ ist.*

Beweis. Ist $x_0 \neq 0$, so gibt es ein $p_0(x) \in \{p(x)\}$ mit $p_0(x_0) > 0$. Andererseits gibt es ein lineares Funktional $f(x)$, für das

$$|f(x)| \leqq p_0(x) \quad \text{und} \quad f(x_0) = p_0(x_0)$$

ist (vgl. Folgerung 2 aus § 1, Nr. 9, Theorem 2). Nach Satz I ist $f(x)$ stetig und

$$f(x_0) = p_0(x_0) > 0.$$

III. *Ist $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum eines lokal konvexen Raumes X und x_0 ein nicht zu $\mathfrak{M}$ gehörender Vektor aus X, so gibt es über X ein stetiges lineares Funktional $f(x)$, das den Bedingungen*

$$f(x) = 0 \quad \textit{auf} \quad \mathfrak{M}, \quad f(x_0) = 1 \tag{4}$$

genügt.

Beweis. Da x_0 nicht zur abgeschlossenen Menge $\mathfrak{M}$ gehört, gibt es eine zu $\mathfrak{M}$ disjunkte konvexe symmetrische Umgebung $U(x_0)$. Nach der Definition der Umgebungsbasen im Raum X gibt es ein Funktional $p_0(x) \in \{p(x)\}$ mit der Eigenschaft, daß $U(x_0)$ die Gesamtheit aller Vektoren $x \in X$ mit $p_0(x - x_0) < 1$ ist. Daher ist

$$p_0(y - x_0) \geqq 1 \quad \text{für alle} \quad y \in \mathfrak{M}. \tag{5}$$

Ersetzen wir in dieser Gleichung y durch $-y$, so haben wir

$$p_0(x_0 + y) \geqq 1 \quad \text{für alle} \quad y \in \mathfrak{M}. \tag{6}$$

Nun bezeichne L die Gesamtheit aller Vektoren

$$x = y + \alpha x_0, \quad y \in \mathfrak{M}. \tag{7}$$

Offenbar ist L ein linearer Teilraum von X. Durch

$$f_1(x) = f_1(y + \alpha x_0) = \alpha \tag{8}$$

definieren wir über L das lineare Funktional $f_1(x)$. Diese Definition ist eindeutig; denn wegen $x_0 \notin \mathfrak{M}$ ist die Darstellung (7) für die Vektoren x aus L eindeutig. Aus (8) folgt

$$f_1(x_0) = 1, \; f_1(y) = 0 \quad \text{für} \quad y \in \mathfrak{M}. \tag{9}$$

Außerdem gilt

$$|f_1(x)| \leqq p_0(x) \quad \text{für alle} \quad x \in L,$$

weil auf Grund von (6) und (8)

$$p_0(x) = p_0(y + \alpha x_0) = |\alpha| p_0\left(x_0 + \frac{1}{\alpha} y\right) \geqq |\alpha| = f_1(x)$$

ist. Aus § 1, Nr. 9, Theorem 2 folgt, daß $f_1(x)$ zu einem linearen Funktional $f(x)$ fortgesetzt werden kann, das auf ganz X definiert ist und ebenfalls die Ungleichung $|f(x)| \leqq p_0(x)$ erfüllt.

Nach Satz I ist $f(x)$ stetig. Auf Grund von (9) genügt $f(x)$ der Bedingung (4).

IV. *Ein linearer Teilraum L eines lokal konvexen Raumes X ist genau dann in X dicht, wenn jedes stetige lineare Funktional über X, das auf L gleich Null ist, auch auf ganz X gleich Null ist.*

Beweis. Ein stetiges lineares Funktional $f(x)$, das auf L gleich Null ist, ist auch auf der abgeschlossenen Hülle von L gleich Null. Ist daher L in X dicht, also $\bar{L} = X$, so ist f auf ganz X gleich Null. Ist dagegen L in X nicht dicht, so ist $\bar{L}$ ein abgeschlossener Teilraum von X, der nicht mit X übereinstimmt. Folglich gibt es in X einen Vektor x_0, der nicht zu $\bar{L}$ gehört. Nach Satz III gibt es dann über X ein stetiges lineares Funktional $f(x)$, das auf $\bar{L}$ (und damit auch auf L) gleich Null und für $x = x_0$ gleich Eins ist, d. h., $f(x)$ ist auf dem ganzen Raum X nicht identisch gleich Null.

7. Der konjugierte Raum. Wir bezeichnen mit X' die Gesamtheit aller stetigen linearen Funktionale f über einem lokal konvexen Raum X. Offenbar sind die Summe $f_1 + f_2$ von stetigen linearen Funktionalen f_1 und f_2 und das Produkt αf eines stetigen linearen Funktionals f mit einer Zahl α ebenfalls stetige lineare Funktionale. Demzufolge ist X' ein linearer Raum. Man nennt ihn den zu X *konjugierten* Raum.

Jetzt sei x ein fester Vektor aus X. Wird

$$F_x(f) = f(x) \tag{1}$$

gesetzt, so ist jedem Element $f \in X'$ die Zahl $f(x)$ zugeordnet, d. h., $F_x(f)$ ist ein Funktional über X'. Aus der Definition der Operationen in X folgt unmittelbar, daß $F_x(f)$ ein lineares Funktional ist. Jedem Vektor $x \in X$ wird also durch die Formel (1) ein lineares Funktional über X' zugeordnet.

Wir setzen nun

$$p_x(f) = |F_x(f)| = |f(x)|. \tag{2}$$

Dann ist $p_x(f)$ ein konvexes symmetrisches Funktional über X', weil

$$p_x(f_1 + f_2) = |F_x(f_1 + f_2)| = |F_x(f_1) + F_x(f_2)|$$
$$\leqq |F_x(f_1)| + |F_x(f_2)| = p_x(f_1) + p_x(f_2)$$

und

$$p_x(\alpha f) = |F_x(\alpha f)| = |\alpha|\, p_x(f)$$

ist. Demnach entspricht jedem Vektor $x \in X$ vermöge der Formel (2) das konvexe Funktional $p_x(f)$ über X'.

Wir definieren nun in X' eine Topologie, in der X' ein lokal konvexer Raum ist. Nach Satz III aus § 4 wird eine derartige Topologie durch ein ausreichendes System $\{p(f)\}$ von konvexen Funktionalen über X' gegeben. Es zeigt sich, daß es verschiedene ausreichende Systeme $\{p(f)\}$ gibt, denen wesentlich verschiedene Topologien in X' entsprechen. Wir werden nur eine dieser Topologien betrachten, und zwar die sogenannte *schwache Topologie* in X', die im folgenden ausschließlich verwendet wird. Diese Topologie wird durch das System $\{p_x(f)\}$ der Funktionale $p_x(f) = |f(x)|$ gegeben (x soll alle Elemente des Raumes X durchlaufen). Offenbar ist dieses System ausreichend; ist nämlich $p_x(f) = 0$ für alle $x \in X$, so folgt aus (2), daß $f(x) = 0$ für alle $x \in X$ ist, d. h., daß f das Nullfunktional ist.

Eine (schwache) Umgebung $U(f_0)$ eines Funktionals $f_0 \in X'$ besteht dann aus allen Funktionalen $f \in X'$, die den Ungleichungen

$$|f(x_k) - f_0(x_k)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

genügen, wobei $x_1, x_2, \ldots, x_n$ feste Vektoren aus X sind. Nimmt man in passender Weise verschiedene $n = 1, 2, \ldots,$ verschiedene $x_1, x_2, \ldots, x_n$ und verschiedene $\varepsilon > 0$, so erhält man eine Basis von schwachen Umgebungen. Sollen die Vektoren $x_1, \ldots, x_n$ und die Zahl $\varepsilon > 0$, die eine gegebene Umgebung $U(f_0)$ des Funktionals f_0 bestimmen, hervorgehoben werden, so soll statt $U(f_0)$ ausführlicher

$$U(f_0;\, x_1, \ldots, x_n;\, \varepsilon)$$

geschrieben werden. Wir wollen X' im folgenden, falls nichts anderes gesagt wird, als lokal konvexen Raum mit der soeben beschriebenen (schwachen) Topologie auffassen.

I. *Für beliebiges $x \in X$ ist das Funktional $F_x(f) = f(x)$ stetig über X'.* Dies folgt unmittelbar aus Nr. 6, Satz I, weil $|F_x(f)| = p_x(f)$ ist.

Die oben in X' eingeführte Topologie ist die schwächste unter allen Topologien, in denen die Funktionale $F_x(f) = f(x)$ stetig sind. Den Beweis dieser Behauptung überlassen wir dem Leser.

Als Beispiel wollen wir den zu C^n gehörigen konjugierten Raum bestimmen. Es sei $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ eine Basis des n-dimensionalen Raumes C^n. Mit $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$ bezeichnen wir die Koordinaten des Vektors $x \in C^n$ in bezug auf diese Basis. Dann hat jedes lineare Funktional $f(x)$ über C^n die Gestalt $f(x) = c_1\xi_1 + c_2\xi_2 + \cdots + c_n\xi_n$ (vgl. § 1, Nr. 5). Demzufolge sind alle linearen Funktionale über C^n stetig (vgl. Nr. 5 und 6), und die Zuordnung

$$f \to (c_1, c_2, \ldots, c_n)$$

ist ein Isomorphismus von $C^{n\prime}$ auf C^n. Folglich ist $C^{n\prime}$ ein n-dimensionaler Raum. In $C^{n\prime}$ können wir als Basis die Gesamtheit der durch die Formeln

$$f_k(x) = \xi_k \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

definierten Funktionale nehmen. Dann läßt sich jedes lineare Funktional über C^n in der Gestalt $f = c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n$ mit $c_k = f(e_k)$ schreiben.

Um einen Überblick über die Gesamtheit aller über $C^{n\prime}$ definierten linearen Funktionale zu bekommen, nehmen wir ein derartiges Funktional F und setzen $\alpha_k = F(f_k)$ und $x_0 = \alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n$. Dann ist

$$\begin{aligned} F(f) &= F(c_1 f_1 + \cdots + c_n f_n) = c_1 F(f_1) + \cdots + c_n F(f_n) \\ &= c_1\alpha_1 + \cdots + c_n\alpha_n = \alpha_1 f(e_1) + \cdots + \alpha_n f(e_n) \\ &= f(\alpha_1 e_1 + \cdots + \alpha_n e_n) = f(x_0), \end{aligned}$$

und wir haben:

II. *Jedes lineare Funktional $F(f)$ über $C^{n\prime}$ wird durch die Formel*

$$F(f) = f(x_0)$$

gegeben, wobei x_0 ein fester Vektor aus C^n ist.

III. *Die Gesamtheit Q_p^C aller Funktionale f aus X', die der Ungleichung*

$$|f(x)| \leqq C\,p(x)$$

genügen, wobei $p(x)$ ein festes Funktional aus einem ausreichenden System $\{p(x)\}$ ist, stellt eine bikompakte Menge in X' dar.[1])

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf $C = 1$ angenommen werden, weil die Zuordnung $f \to Cf$ ein Homöomorphismus in X' ist, bei dem Q_p^1 in Q_p^C übergeht. Es genügt also, wenn die Behauptung für Q_p^1 bewiesen wird. Hierzu ordnen wir jedem Element $x \in X$ das abgeschlossene Intervall $I_x = [-p(x), p(x)]$ zu und bezeichnen mit I das topologische Produkt aller Intervalle I_x, $x \in X$. Auf Grund des Satzes von A. N. Tychonoff (vgl. § 2, Nr. 12, Satz II) ist I als topologisches Produkt der bikompakten Räume I_x selbst ein bikompakter Raum.

Aus $f \in Q_p^1$ folgt $|f(x)| \leqq p(x)$. Folglich gehört die Zahl $f(x)$ zum Intervall I_x. Daher ergibt die Zuordnung $f \to f(x)$ eine Abbildung der Menge Q_p^1

---

[1]) Es sei daran erinnert, daß X' ein topologischer Raum mit der oben definierten schwachen Topologie ist.

auf eine gewisse Teilmenge I' des Raumes I.[1]) Offenbar ist diese Abbildung umkehrbar eindeutig. Durch Vergleich der schwachen Umgebungen in X' und der Umgebungen in I ist unmittelbar zu sehen, daß es sich sogar um eine topologische Abbildung handelt. Es genügt also, wenn wir zeigen, daß I' in I abgeschlossen ist (vgl. § 2, Nr. 6, Satz II).

Es sei $f_0(x)$ ein Häufungspunkt der Menge I'. Wie wir sogleich beweisen werden, ist $f_0(x)$ ein stetiges lineares Funktional über X, das zur Menge Q_p^1 gehört, womit dann auch die Abgeschlossenheit der Menge I' gezeigt ist. Wir betrachten zum Beweis die Elemente x_1, x_2 und $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2$ sowie die zugehörige Umgebung $U(f_0; x_1, x_2, \lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2; \varepsilon)$ des Punktes f_0 aus I. Da f_0 Häufungspunkt der Menge I' ist, gibt es in dieser Umgebung ein Element $f \in I'$, d. h. ein Element, für das folgende Beziehungen bestehen:

$$|f(x_1) - f_0(x_1)| < \varepsilon, \quad |f(x_2) - f_0(x_2)| < \varepsilon,$$
$$|f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) - f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| < \varepsilon.$$

Die letzte Ungleichung läßt sich auch in der Gestalt

$$|\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) - f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| < \varepsilon$$

schreiben. Hieraus und aus den ersten beiden Ungleichungen folgt

$$\begin{aligned} &|\lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2) - f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| \\ &\quad \leqq |\lambda_1|\,|f_0(x_1) - f(x_1)| + |\lambda_2|\,|f_0(x_2) - f(x_2)| \\ &\quad + |\lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) - f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2)| \\ &\quad < \varepsilon(|\lambda_1| + |\lambda_2| + 1). \end{aligned}$$

Da ε beliebig klein genommen werden kann, muß

$$f_0(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) = \lambda_1 f_0(x_1) + \lambda_2 f_0(x_2)$$

sein, so daß f_0 tatsächlich ein lineares Funktional ist.

Um nun noch zu zeigen, daß $f_0(x) \in I'$ ist, gehen wir davon aus, daß jede Umgebung $U(f_0; x; \varepsilon)$ ein Element $f(x) \in I'$ enthält. Für dieses gilt

$$|f_0(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Hieraus folgt

$$|f_0(x)| < |f(x)| + \varepsilon \leqq p(x) + \varepsilon,$$

weil nach Voraussetzung $f \in Q_p^1$ ist. Da ε wieder beliebig klein genommen werden kann, muß $|f_0(x)| \leqq p(x)$ sein, d. h., es gilt $f_0 \in Q_p^1$, $f_0(x) \in I'$.

8. Konvexe Mengen in einem endlichdimensionalen Raum. *Ist K eine konvexe Menge im reellen n-dimensionalen Raum R^n und x_0 ein Element dieses Raumes, das weder der Menge K selbst noch deren Rand angehört, so gibt es im R^n eine Stützhyperebene von K, die x_0 von K trennt.*

---

[1]) Jedes Element des topologischen Produktes I ist eine Funktion $f(x)$ mit Werten aus dem Intervall $[-p(x), p(x)]$ (vgl. § 2, Nr. 12).

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß $0 \in K$ ist, weil sich dieser Fall stets durch eine passende Verschiebung erreichen läßt. Mit $\mathfrak{M}$ werde der von K aufgespannte Teilraum bezeichnet (dieser stimmt unter Umständen mit R^n überein). Dann gibt es in K Vektoren $x_1, x_2, \ldots, x_m$, die eine Basis von $\mathfrak{M}$ bilden. Aus $0 \in K$ folgt nun, daß jeder Vektor x der Gestalt

$$\begin{aligned} x &= t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_m x_m + (1 - t_1 - t_2 - \cdots - t_m) 0 \\ &= t_1 x_1 + t_2 x_2 + \cdots + t_m x_m \\ &\qquad (t_k \geqq 0,\ t_1 + t_2 + \cdots + t_m \leqq 1) \end{aligned}$$

ebenfalls zu K gehört (vgl. § 1, Nr. 8, Satz I). Für $t_k > 0$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$ und $t_1 + t_2 + \cdots + t_m < 1$ ist der zugehörige Vektor x offenbar ein innerer Punkt der Menge K, betrachtet als konvexe Menge in $\mathfrak{M}$.

Wir unterscheiden zwei Fälle:

1. $x_0 \in \mathfrak{M}$. In diesem Fall gibt es nach Satz II aus Nr. 3 eine Stützhyperebene $f(x) = c$ der Menge K, die x_0 von K trennt. Ist $\mathfrak{M} \neq R^n$, so setzt man $f(x)$ auf irgendeine Weise zu einem über R^n definierten linearen Funktional $F(x)$ fort und hat dann mit $F(x) = c$ eine Stützhyperebene, die ebenfalls x_0 von K trennt.

2. $x_0 \notin \mathfrak{M}$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}_1$ den von $\mathfrak{M}$ und x_0 aufgespannten Teilraum, d. h. die Gesamtheit aller Vektoren der Gestalt $y = x + t x_0$, $x \in \mathfrak{M}$. Nun sei $f(x) = c$ eine in $\mathfrak{M}$ liegende Stützhyperebene zu K. Wir nehmen der Bestimmtheit wegen an, daß $f(x) \leqq c$ für alle $x \in K$ ist. Setzen wir mit einer festen Zahl c_1, die größer als c ist,

$$f_1(x + t x_0) = f(x) + t c_1,$$

so ist f_1 ein über $\mathfrak{M}_1$ definiertes lineares Funktional, für das $f_1(x_0) = c_1 > c$ gilt. Demzufolge stellt $f_1(x) = c$ im Raum $\mathfrak{M}_1$ eine Stützhyperebene von K dar, die K von x_0 trennt. Wird schließlich $f_1(x)$ zu einem linearen Funktional $F(x)$ über R^n fortgesetzt, so hat die in R^n liegende Hyperebene $F(x) = c$ dieselben, d. h. die gesuchten Eigenschaften.

9. Konvexe Mengen im konjugierten Raum. Es sei X' der zu einem reellen lokal konvexen Raum X konjugierte Raum, K eine konvexe bikompakte Teilmenge von X' und x_0 eine festes Element von X. Die Funktion $F_{x_0}(f) = f(x_0)$ ist stetig. Sie nimmt folglich auf der bikompakten Menge K ihr Supremum an (vgl. § 2, Nr. 7, Satz VII). Wir bezeichnen es mit M_{x_0}. Die Gesamtheit P_{x_0} aller Elemente f, die der Gleichung

$$F_{x_0}(f) = M_{x_0}$$

genügen, bildet in X' eine Hyperebene. Diese Hyperebene zerlegt den gesamten Raum X' in zwei Teile (Halbräume), die durch die Gleichungen

$$F_{x_0}(f) \leqq M_{x_0} \quad \text{bzw.} \quad F_{x_0}(f) > M_{x_0}$$

bestimmt werden. Auf Grund der Definition von M_{x_0} gilt $F_{x_0}(f) \leqq M_{x_0}$ für alle $f \in K$. Dies bedeutet, daß die Menge K ganz im ersten Halbraum liegt,

d. h. auf einer Seite der Hyperebene P_{x_0}. Für wenigstens ein $f \in K$ steht in $F_{x_0}(f) \leqq M_{x_0}$ das Gleichheitszeichen, d. h., K und P_{x_0} haben wenigstens einen gemeinsamen Punkt. *Daher ist P_{x_0} eine Stützhyperebene der Menge K.*

I. *Der Durchschnitt $K \cap P_{x_0}$ ist ebenfalls eine konvexe Menge.*

Offenbar ist P_{x_0} eine konvexe Menge. Damit ist aber auch $K \cap P_{x_0}$ als Durchschnitt der konvexen Mengen P_{x_0} und K eine konvexe Menge.

II. *Gehört ein innerer Punkt einer Strecke $[f_1, f_2]$, die in K enthalten ist, zum Durchschnitt $K \cap P_{x_0}$, so gehört auch die ganze Strecke zu $K \cap P_{x_0}$.*

Da $K \cap P_{x_0}$ eine konvexe Menge ist, genügt es zu zeigen, daß die Endpunkte f_1 und f_2 dieser Strecke zur Hyperebene P_{x_0} gehören. Wir nehmen das Gegenteil an, es sei etwa $f_1 \notin P_{x_0}$, d. h.

$$F_{x_0}(f_1) < M_{x_0}.$$

Da außerdem $F_{x_0}(f_2) \leqq M_{x_0}$ ist, wäre

$$F_{x_0}[(1-t)f_1 + tf_2] = (1-t)F_{x_0}(f_1) + tF_{x_0}(f_2) < M_{x_0}$$

für $0 < t < 1$. Dies bedeutet aber, daß überhaupt kein innerer Punkt von $[f_1, f_2]$ zu P_{x_0} gehört, was der Voraussetzung widerspricht.

III. *Ist K eine konvexe bikompakte Teilmenge von X', so ist K der Durchschnitt aller Halbräume von X', die K enthalten und von Stützhyperebenen von K berandet werden.*

Wir werden beim Beweis dieses Satzes davon Gebrauch machen, daß die in ihm enthaltene Aussage mit der folgenden äquivalent ist: *Ist $f_0 \notin K$, so gibt es eine Stützhyperebene P_{x_0}, die f_0 von K trennt, d. h., die so beschaffen ist, daß die Ungleichung*

$$\max_{f \in K} f(x_0) < f_0(x_0)$$

gilt.

Beweis. Mit K' werde der Durchschnitt aller Halbräume von X' bezeichnet, die K enthalten und von Stützhyperebenen von K berandet werden. Offenbar gilt $K' \supset K$. Zu zeigen ist $K' = K$.

Es sei $f_0 \in K'$. Wir werden im folgenden beweisen, daß jede Umgebung $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ des Punktes f_0 wenigstens ein Element der Menge K enthält. Da K abgeschlossen ist, folgt hieraus $f_0 \in K$, womit unser Satz dann bewiesen ist.

Zum Beweis betrachten wir die Menge $\mathfrak{K}$ aller Punkte

$$\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}, \quad f(x_i) = \xi_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

des n-dimensionalen Raumes R^n, die sich ergeben, wenn f die gesamte Menge K durchläuft. Offenbar ist $\mathfrak{K}$ im R^n eine konvexe Menge. Als stetiges Bild der bikompakten Menge K ist $\mathfrak{K}$ bikompakt. Daher ist $\mathfrak{K}$ im R^n abgeschlossen und beschränkt (vgl. § 2, Nr. 7, Satz III). Wir zeigen nun, daß der Punkt

$$\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}, \ f_0(x_i) = \eta_i \quad (i = 1, \ldots, n)$$

zu $\mathfrak{K}$ gehört. Anderenfalls gäbe es im R^n eine Stützhyperebene von $\mathfrak{K}$, die den Punkt $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ von $\mathfrak{K}$ trennt (vgl. Nr. 8). Mit anderen Worten (vgl. Nr. 7),

es gäbe Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ derart, daß

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \xi_k < \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \eta_k$$

für alle Punkte $\{\xi_1, \ldots, \xi_n\}$ von $\mathfrak{K}$ wäre. Die Ungleichung bedeutet, daß

$$f\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right) < f_0\left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k\right)$$

für alle $f \in K$ wäre. Diese Ungleichung widerspricht aber der Voraussetzung $f_0 \in K'$, weil sie zum Ausdruck bringt, daß sich f_0 und K auf verschiedenen Seiten der Stützhyperebene P_x mit

$$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$$

befinden. Der Punkt $\{\eta_1, \ldots, \eta_n\}$ gehört also tatsächlich zu $\mathfrak{K}$, d. h., es gibt ein Funktional $f^\wedge \in K$, für das

$$f^\wedge(x_1) = f_0(x_1), \ \ldots, \ f^\wedge(x_n) = f_0(x_n)$$

ist. Dann gelten erst recht die Ungleichungen

$$|f^\wedge(x_k) - f_0(x_k)| < \varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, n),$$

d. h., der Punkt $f^\wedge \in K$ liegt in der Umgebung $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$. Damit ist der Satz III bewiesen.

Der Begriff der Stützhyperebene läßt sich folgendermaßen verallgemeinern.[1])

Eine Menge $V \subset X'$ heißt *Stützmannigfaltigkeit* von K, wenn folgendes gilt:

1. Der Durchschnitt $V \cap K$ ist nicht leer;

2. gehört ein innerer Punkt einer Strecke $[f_1, f_2]$ aus K dem Durchschnitt $V \cap K$ an, so gehört auch die ganze Strecke $[f_1, f_2]$ zu diesem Durchschnitt;

3. V ist die Menge aller Punkte f mit

$$f(x) = \alpha_x,$$

wobei x die Elemente einer nicht notwendig endlichen Menge $S \subset X$ durchläuft und die α_x gegebene Zahlen sind.

Eine Stützmannigfaltigkeit ist offenbar dann Stützhyperebene, wenn die Menge S in Bedingung 3 aus einem einzigen Element besteht und $\alpha_x = M_x$ ist.

IV. *Eine Stützmannigfaltigkeit V ist stets abgeschlossen.*

Die Bedingung 3 bedeutet nämlich, daß V der Durchschnitt der Hyperebenen $f(x) = \alpha_x$, $x \in S$, ist. Jede dieser Hyperebenen ist aber abgeschlossen, weil die Funktion $F_x(f) = f(x)$ stetig ist.

Besteht eine Stützmannigfaltigkeit aus einem einzigen Punkt f_0, so soll ihr die Dimension Null zugeschrieben werden. In diesem Fall ist es unmöglich, daß f_0 innerer Punkt einer Strecke aus K ist. Auf Grund der Bedingung 2

[1]) Überall im folgenden soll K eine konvexe Teilmenge von X' bezeichnen, die in der schwachen Topologie bikompakt ist.

müßte nämlich dieses ganze Intervall zum Durchschnitt $V \cap K$ gehören, so daß V aus mehr als einem Punkt bestände.

Ein Punkt $f_0 \in K$ soll *Extremalpunkt* der Menge K genannt werden, wenn es in K keine Strecke mit f_0 als inneren Punkt gibt.

Hieraus folgt, daß *eine Stützmannigfaltigkeit der Dimension Null aus einem Extremalpunkt besteht.* Umgekehrt bildet ein Extremalpunkt eine Stützmannigfaltigkeit der Dimension Null; die Bedingungen 1 und 2 sind trivialerweise erfüllt, während es, um die Bedingung 3 zu erfüllen, genügt, für S den gesamten Raum X zu nehmen und $\alpha_x = f(x)$ zu setzen.

V. *Jede bezüglich der Inklusion linear geordnete Menge $\{V_\alpha\}$ von Stützmannigfaltigkeiten hat einen nichtleeren Durchschnitt, der ebenfalls eine Stützmannigfaltigkeit ist.*

Beweis. Wir setzen $K_\alpha = K \cap V_\alpha$. Dann ist K_α als Durchschnitt der bikompakten Menge K und der abgeschlossenen Menge V_α auf Grund der Bedingung 1 nicht leer. Folglich ist K_α bikompakt. Überdies ist die Menge $\{K_\alpha\}$ im oben erwähnten Sinne linear geordnet. Daher ist der Durchschnitt aller K_α nicht leer (vgl. § 2, Nr. 6, Satz III). Dann muß aber auch der Durchschnitt V aller V_α nicht leer sein. Der Durchschnitt $V \cap K$ stimmt mit dem Durchschnitt aller K_α überein und ist demzufolge ebenfalls nicht leer. Somit genügt V der Bedingung 1. Wir betrachten jetzt in K eine Strecke $[f_1, f_2]$. Es sei f ein innerer Punkt dieser Strecke, der zu V gehört, so daß $f \in V_\alpha$ für alle α gilt. Auf Grund der Bedingung 2 gilt dann $[f_1, f_2] \subset V_\alpha$ für alle α, also $[f_1, f_2] \subset V$. Dies bedeutet, daß V auch der Bedingung 2 genügt. Die Bedingung 3 ist trivialerweise erfüllt. Man braucht nämlich für S nur die Vereinigung aller den Mannigfaltigkeiten V_α entsprechenden Mengen S_α zu nehmen.

Demnach genügt V den Bedingungen 1, 2 und 3. Folglich ist V eine Stützmannigfaltigkeit.

Eine Stützmannigfaltigkeit wird *minimal* genannt, wenn sie keine andere Stützmannigfaltigkeit als echte Teilmenge enthält.

VI. *Eine minimale Stützmannigfaltigkeit ist eine Mannigfaltigkeit der Dimension Null, d. h., sie besteht aus einem Extremalpunkt.*

Beweis. Es sei V eine minimale Stützmannigfaltigkeit von K. Wir nehmen an, daß V mehr als einen Punkt hat. Es sei etwa $f_1, f_2 \in V$ und $f_1 \neq f_2$. Dann gibt es ein Element x_0, für das $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$ ist. Die Menge $K' = V \cap K$ ist konvex und bikompakt. Das Element x_0 bestimmt die Stützhyperebene P_{x_0} von K'. Diese Ebene ist von V verschieden. Alle Elemente $f \in P_{x_0}$ genügen nämlich einer Bedingung der Gestalt $f(x_0) = M$. Da nun aber $f_1(x_0) \neq f_2(x_0)$ ist, wird diese Bedingung von einem der Punkte $f_1, f_2 \in V$ nicht erfüllt, d. h., es gilt $P_{x_0} \neq V$. Folglich ist der Durchschnitt $V' = P_{x_0} \cap V$ als echte Teilmenge in der Mannigfaltigkeit V enthalten.

Wir werden im folgenden beweisen, daß V' eine Stützmannigfaltigkeit von K ist. Damit haben wir dann einen Widerspruch zur vorausgesetzten Minimaleigenschaft von V erhalten, und der Satz VI ist bewiesen.

Wegen
$$V' \cap K = P_{x_0} \cap V \cap K = P_{x_0} \cap K' \neq \emptyset$$
ist die Bedingung 1 erfüllt. Die Bedingung 3 gilt offenbar ebenfalls. Es bleibt also nur noch die Gültigkeit der Bedingung 2 zu prüfen. Wir betrachten hierzu in K eine Strecke $[f_1, f_2]$ und einen inneren Punkt f dieser Strecke, der zur Menge V' gehört. Dann gilt $f \in V$ und folglich $[f_1, f_2] \subset V$. Demzufolge muß $[f_1, f_2] \subset V \cap K = K'$ sein. Außerdem ist $f \in P_{x_0}$, so daß $[f_1, f_2] \subset P_{x_0}$ und daher $[f_1, f_2] \subset V \cap P_{x_0} = V'$ ist. Somit erfüllt V' auch die Bedingung 2, d. h., V' ist eine Stützmannigfaltigkeit.

VII. *Jede Stützmannigfaltigkeit enthält eine minimale Stützmannigfaltigkeit, d. h. einen Extremalpunkt der konvexen Menge K.*

Beweis. Es sei V eine Stützmannigfaltigkeit von K. Die Gesamtheit aller in V enthaltenen Stützmannigfaltigkeiten bildet eine (bezüglich der Inklusion) halbgeordnete Menge. Nach Satz V genügt diese halbgeordnete Menge der Voraussetzung des ZORNschen Lemmas. Sie besitzt also ein minimales Element, das eine in V enthaltene minimale Stützmannigfaltigkeit ist.

Aus Satz VII folgt insbesondere, daß jede konvexe bikompakte Teilmenge von X' wenigstens einen Extremalpunkt enthält.

Theorem 1 (M. G. KREIN und D. P. MILMAN [1]). *Eine konvexe bikompakte Menge $K \subset X'$ enthält stets Extremalpunkte und ist die kleinste konvexe abgeschlossene Menge, die alle Extremalpunkte der Menge K enthält.*

Beweis. Mit K' werde die kleinste konvexe abgeschlossene Menge bezeichnet, die alle Extremalpunkte von K enthält. Offenbar gilt $K' \subset K$. Wir nehmen $K' \neq K$ an. Ist $f_0 \in K - K'$, so gibt es nach Satz III ein Element x_0 derart, daß
$$f(x_0) < f_0(x_0) \quad \text{für alle} \quad f \in K'$$
ist. Wir setzen $M = \max_{f \in K} f(x_0)$. Dann gilt $M \geq f_0(x_0)$ und folglich
$$f(x_0) < M \quad \text{für alle} \quad f \in K'. \tag{1}$$
Ist P_{x_0} die durch $f(x_0) = M$ bestimmte Stützhyperebene von K, so enthält diese Hyperebene nach Satz VII wenigstens einen Extremalpunkt f_1 der Menge K.

Folglich ist der Durchschnitt $P_{x_0} \cap K'$ nicht leer; er enthält nämlich zumindest den Punkt f_1. Dies widerspricht nun aber der Ungleichung (1), womit Theorem 1 bewiesen ist.

Die Menge der Extremalpunkte einer Menge ist im allgemeinen nicht abgeschlossen. Als einfaches Beispiel hierfür mag die im folgenden beschriebene konvexe Menge dienen.

Wir betrachten eine Ebene $\mathfrak{P}$ und eine senkrecht zu $\mathfrak{P}$ verlaufende Gerade. A und B seien zwei Punkte dieser Geraden. Die Gerade möge die Ebene $\mathfrak{P}$ in dem inneren Punkt C der Strecke AB treffen. Ferner sei $\mathfrak{C}$ ein in $\mathfrak{P}$ liegender Kreis, der durch den Punkt C geht (Abb. 3). Extremalpunkte der kleinsten konvexen Menge, die von dem Kreis $\mathfrak{C}$ und den Punkten A, B aufgespannt wird, sind alle Punkte des Kreises $\mathfrak{C}$ mit Ausnahme des Punktes C. Außerdem sind A und B Extremalpunkte. Die Menge aller Extremalpunkte ist hier also nicht abgeschlossen.

Bemerkung. Aus den obigen Beweisen folgt, daß alle Resultate aus Nr. 9 in einem beliebigen lokal konvexen Raum X für konvexe Mengen, die in der schwachen Topologie von X bikompakt sind, gültig bleiben. Diese schwache Topologie wird durch die Funktionale $f \in X'$ bestimmt. Hierbei ist an Stelle der Hyperebene P_{x_0} die durch die Gleichung $f_0(x) = M$ festgelegte Hyperebene $P_{f_0} = M$ zu nehmen.

10. Kegel. Eine Teilmenge K eines reellen linearen Raumes X wird *Kegel* genannt, wenn folgendes gilt:

1. Aus $x \in K$ und $\alpha \geqq 0$ folgt $\alpha x \in K$;
2. aus $x, y \in K$ folgt $x + y \in K$;
3. aus $x \in K$ und $x \neq 0$ folgt $-x \notin K$.

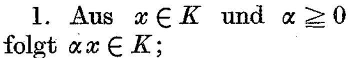


Abb. 3

Ein lineares Funktional $f(x)$ heißt *positiv* (in bezug auf einen Kegel K), wenn $f(x) \geqq 0$ für alle $x \in K$ ist. Ist $\mathfrak{M}$ ein Teilraum von X, so ist $K \cap \mathfrak{M}$ offenbar ein Kegel in $\mathfrak{M}$. Ein lineares Funktional $f(x)$, das nur über $\mathfrak{M}$ definiert ist, heißt positiv, wenn es in bezug auf den Kegel $K \cap \mathfrak{M}$ positiv ist.

In unseren weiteren Überlegungen wird der folgende Satz über die Fortsetzung eines positiven Funktionals eine wichtige Rolle spielen.

Theorem 2 (M. G. Krein [1]). *Gegeben seien in einem reellen lokal konvexen Raum X ein Kegel A, der einen inneren Punkt enthält, und ein Teilraum $\mathfrak{M}$, zu dem wenigstens ein innerer Punkt des Kegels K gehört. Dann kann jedes positive lineare Funktional $f(x)$ über $\mathfrak{M}$ zu einem positiven linearen Funktional $F(x)$ über X fortgesetzt werden.*

Beweis. Der Kegel K ist eine konvexe Menge. Nach Voraussetzung enthält K einen inneren Punkt $x_0 \in \mathfrak{M}$. Daher gibt es ein konvexes Funktional $p(x)$, das der Bedingung $p(x - x_0) \leqq 1$ für alle $x \in K$ genügt (vgl. Nr. 3, Satz I). Mit $x \in K$ ist auch $\alpha x \in K$ für alle $\alpha > 0$ und daher $p(\alpha x - x_0) \leqq 1$, woraus sich $p\left(x - \frac{1}{\alpha} x_0\right) \leqq \frac{1}{\alpha}$ ergibt. Für $\alpha \to \infty$ folgt aus dieser Gleichung unter Berücksichtigung der Stetigkeit[1]) des Funktionals $p(x)$, daß $p(x) \leqq 0$ für alle $x \in K$ ist. Da andererseits $p(x) \geqq 0$ ist, gilt

$$p(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in K. \tag{1}$$

Jetzt sei $f(x)$ ein lineares Funktional über $\mathfrak{M}$, das auf $\mathfrak{M} \cap K$ nicht negativ ist. Nach Definition von $p(x)$ gilt für alle $x \in X$ und beliebiges $\varepsilon > 0$

$$\frac{1}{p(x) + \varepsilon} x \in K - x_0,$$

[1]) Man vergleiche die Bemerkung auf S. 61.

also
$$\frac{1}{p(x)+\varepsilon}\,x + x_0 \in K.$$
Für beliebiges $x \in \mathfrak{M}$ folgt hieraus
$$f\left(\frac{1}{p(x)+\varepsilon}\,x + x_0\right) = \frac{1}{p(x)+\varepsilon}\,f(x) + f(x_0) \geqq 0,$$
so daß
$$-f(x) \leqq f(x_0)[p(x)+\varepsilon]$$
ist. Hier kann $\varepsilon > 0$ beliebig klein genommen werden. Demzufolge muß
$$-f(x) \leqq f(x_0)\,p(x) \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{M}$$
sein. Da $f(x_0)p(x)$ ein konvexes Funktional über X ist, kann $-f(x)$ auf Grund des Hahn-Banachschen Satzes (vgl. § 1, Nr. 9) zu einem linearen Funktional $-F(x)$ über X fortgesetzt werden, so daß
$$-F(x) \leqq f(x_0)\,p(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X$$
ist. Dann ist $F(x)$ eine Fortsetzung des Funktionals $f(x)$, und es gilt
$$F(x) \geqq -f(x_0)\,p(x) \quad \text{für alle} \quad x \in X.$$
Unter Berücksichtigung von (1) folgt hieraus, daß $F(x) \geqq 0$ für alle $x \in K$ ist, was zu beweisen war.

Folgerung. *Ist K ein Kegel in X und x_0 ein innerer Punkt von K, so gibt es ein bezüglich K positives lineares Funktional, das für x_0 gleich Eins ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}$ der aus allen Vektoren tx_0, $-\infty < t < \infty$, bestehende Teilraum von X. Wir setzen $f(tx_0) = t$. Dann ist $f(x)$ ein über $\mathfrak{M}$ definiertes positives lineares Funktional, das die Bedingung $f(x_0) = 1$ erfüllt. Nach Theorem 2 kann $f(x)$ zu einem positiven linearen Funktional $F(x)$ über X fortgesetzt werden. Hierbei ist
$$F(x_0) = f(x_0) = 1.$$

11. Orthogonalräume im konjugierten Raum. Unter dem *Orthogonalraum* einer Menge $S \subset X$ im konjugierten Raum X' versteht man die Gesamtheit aller Funktionale $f \subset X'$, die der Bedingung
$$f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in S$$
genügen.

I. *Der Orthogonalraum einer Menge $S \subset X$ ist stets ein abgeschlossener Teilraum von X'.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{N}$ der Orthogonalraum einer Menge $S \subset X$. Dann ist $\mathfrak{N}$ Teilraum von X', weil aus
$$f_1(x) = 0,\; f_2(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in S$$
folgt, daß
$$\lambda_1 f_1(x) + \lambda_2 f_2(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in S,$$
also $\mathfrak{N}$ linear ist. Daß $\mathfrak{N}$ auch abgeschlossen ist, erkennt man folgendermaßen: Für ein festes $x \in S$ ist die Menge $\mathfrak{N}_x$ aller $f \in X'$, für die $f(x) = 0$ gilt, ab-

geschlossen, weil $f(x)$ eine stetige Funktion von f ist. Daher ist $\mathfrak{N}$ als Durchschnitt aller Mengen $\mathfrak{N}_x$, $x \in S$, ebenfalls abgeschlossen.

II. *Jeder abgeschlossene Teilraum* $\mathfrak{N}$ *von* X' *ist der Orthogonalraum eines abgeschlossenen Teilraumes* S *von* X.

Beweis. Es sei S die Gesamtheit aller $x \in X$ mit der Eigenschaft, daß

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{N}$$

ist. Aus der Stetigkeit der linearen Funktionale $f(x)$ folgt, daß S ein abgeschlossener Teilraum von X ist. Wir bezeichnen den Orthogonalraum der Menge S mit $\mathfrak{N}'$. Offenbar gilt dann $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{N}'$. Es bleibt zu zeigen, daß $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N}$ ist. Da $\mathfrak{N}$ abgeschlossen ist, genügt es, wenn gezeigt wird, daß jedes $f_0 \in \mathfrak{N}'$ Häufungspunkt der Menge $\mathfrak{N}$ ist, d. h., daß es in jeder Umgebung von f_0 Elemente $f \in \mathfrak{N}$ gibt.

Es sei $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ eine derartige Umgebung. Wir betrachten $\{f(x_1), \ldots, f(x_n)\}$ als Vektor des n-dimensionalen Raumes R^n. Durchläuft f den Teilraum $\mathfrak{N}$, so ist die Gesamtheit aller dieser Vektoren ein Teilraum von R^n. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{M}_n$.

Um zu zeigen, daß der Vektor $\xi_0 = \{f_0(x_1), \ldots, f_0(x_n)\}$ zu $\mathfrak{M}_n$ gehört, nehmen wir das Gegenteil an. Dann gibt es in $R^{n\prime}$ einen Vektor, der wohl zu $\mathfrak{M}_n$, aber nicht zu ξ_0 orthogonal ist, d. h., es gibt Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ derart, daß

$$\lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n) = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{N}, \tag{1}$$

aber

$$\lambda_1 f_0(x_1) + \cdots + \lambda_n f_0(x_n) \neq 0 \tag{2}$$

ist. Die Bedingung (1) bedeutet $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n \in S$. Auf Grund von (2) wäre das Funktional $f_0 \in \mathfrak{N}'$ also für das Element $\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n$ aus S von Null verschieden, was der Definition von $\mathfrak{N}'$ widerspricht.

Es ist also $\xi_0 \in \mathfrak{M}_n$. Dann gibt es ein Funktional $\tilde{f} \in \mathfrak{N}$, das den Bedingungen

$$\tilde{f}(x_k) = f_0(x_k) \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

genügt. Folglich gilt $\tilde{f} \in U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$, was zu beweisen war.

III. *Ist* $\mathfrak{N}$ *der Orthogonalraum eines abgeschlossenen Teilraumes* $S \subset X$, *so stimmt* S *mit der Gesamtheit aller* $x \in X$ *mit der Eigenschaft*

$$f(x) = 0 \quad \textit{für alle} \quad f \in \mathfrak{N}$$

überein.

Beweis. Ist $x_0 \in S$, so gilt $f(x_0) = 0$ für alle $f \in \mathfrak{N}$. Ist jedoch $x_0 \notin S$, so gibt es ein Funktional $f_0 \in X'$ derart, daß $f_0(x_0) \neq 0$ und $f_0(x) = 0$ für alle $x \in S$ ist. Es gilt demnach $f_0 \in \mathfrak{N}$ und $f_0(x_0) \neq 0$.

Jetzt seien S_1 und S_2 abgeschlossene Teilräume von X. Ihre Orthogonalräume in X' seien $\mathfrak{N}_1$ und $\mathfrak{N}_2$.

IV. *Ist* $S_1 \subset S_2$, *so gilt* $\mathfrak{N}_1 \supset \mathfrak{N}_2$ *und umgekehrt. Sind hierbei* S_1 *und* S_2 *verschieden,* $S_1 \neq S_2$, *so gilt auch* $\mathfrak{N}_1 \neq \mathfrak{N}_2$ *und umgekehrt.*

Diese Behauptungen ergeben sich unmittelbar aus der Definition des Orthogonalraumes und aus Satz III.

12. Analytische Vektorfunktionen. Es sei G ein Gebiet der komplexen Ebene und $x(\lambda)$ eine für alle $\lambda \in G$ definierte Funktion, deren Werte Vektoren eines bestimmten lokal konvexen Raumes X sind. Die Funktion $x(\lambda)$ heiße *analytisch* in G, wenn für jedes $\lambda_0 \in G$ der Grenzwert

$$x'(\lambda_0) = \lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x(\lambda) - x(\lambda_0)}{\lambda - \lambda_0} \tag{1}$$

existiert.

I. *Ist $x(\lambda)$ im Gebiet G analytisch, so ist $f(x(\lambda))$ für jedes Funktional $f \in X'$ im Gebiet G eine analytische Zahlenfunktion.*

Auf Grund der Stetigkeit des Funktionals $f(x)$ folgt nämlich aus (1), daß für $\lambda_0 \in G$ auch der Grenzwert

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{f(x(\lambda)) - f(x(\lambda_0))}{\lambda - \lambda_0} = f(x'(\lambda_0))$$

existiert.

Man sagt, die Funktion $x(\lambda)$ sei *im Unendlichen analytisch*, wenn folgendes gilt:

1. $x(\lambda)$ ist in einer Umgebung $|\lambda| > N$ des unendlich fernen Punktes definiert;
2. es existiert $\lim\limits_{\lambda \to 0} x\left(\frac{1}{\lambda}\right)$;
3. die für $|\lambda| < \frac{1}{N}$ durch die Bedingungen
$$y(\lambda) = x\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{für} \quad \lambda \neq 0,$$
$$y(0) = \lim_{\lambda \to 0} x\left(\frac{1}{\lambda}\right)$$
definierte Funktion $y(\lambda)$ ist in einer Umgebung des Punktes $\lambda = 0$ analytisch.

II (Liouville). *Ist $x(\lambda)$ in der gesamten komplexen Ebene einschließlich des unendlich fernen Punktes analytisch, so ist $x(\lambda)$ konstant.*

Beweis. Ist $x(\lambda)$ in der gesamten komplexen Ebene einschließlich des unendlich fernen Punktes analytisch, so ist für beliebiges $f \in X'$ die Zahlenfunktion $f(x(\lambda))$ in der gesamten komplexen Ebene einschließlich des unendlich fernen Punktes analytisch. Hieraus folgt auf Grund des klassischen Liouvilleschen Satzes, daß $f(x(\lambda))$ konstant ist.

Es gilt also $f(x(\lambda_1)) = f(x(\lambda_2))$ und

$$f(x(\lambda_1) - x(\lambda_2)) = 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda_1, \lambda_2.$$

Da aber f ein beliebiges Funktional aus X' ist, ist dies nur möglich, wenn

$$x(\lambda_1) - x(\lambda_2) = 0 \quad \text{für alle} \quad \lambda_1, \lambda_2$$

ist (vgl. Nr. 6, Satz II), d. h., wenn $x(\lambda)$ ein konstanter Vektor ist.

13. Vollständige lokal konvexe Räume. Wir haben oben den Begriff des vollständigen metrischen Raumes definiert (vgl. § 2, Nr. 13). Dieser Begriff läßt sich folgendermaßen verallgemeinern.

Man sagt, eine gerichtete Familie[1] $\{x_\alpha\}$ eines topologischen linearen Raumes X *konvergiert gegen das Element* x dieses Raumes, wenn es zu jeder Umgebung $U(x)$ einen Index α_0 gibt derart, daß x_α für alle Indizes $\alpha > \alpha_0$ zu $U(x)$ gehört.

Eine gerichtete Familie $\{x_\alpha\}$ aus X ist eine *Fundamentalmenge*, wenn jeder Umgebung $U(0)$ des Nullelementes $0 \in X$ ein Index α_0 entspricht, so daß $x_\alpha - x_\beta \in U(0)$ für alle Indizes $\alpha, \beta > \alpha_0$ ist.

Ein topologischer linearer Raum X soll nun *vollständig* heißen, wenn jede gerichtete Fundamentalmenge aus X gegen ein Element $x \in X$ konvergiert.

Es gilt der Satz:

Jeder lokal konvexe Raum X kann in einen vollständigen lokal konvexen Raum $\tilde{X}$ eingebettet werden, in dem X dann dicht ist.[2] $\tilde{X}$ heißt die *vollständige Hülle* des Raumes X.

Man kann die an X gestellte Bedingung abschwächen, indem man nur fordert, daß jede gewöhnliche Fundamentalfolge aus X gegen ein Element $x \in X$ konvergiert. Ein Raum X, der diese Bedingung erfüllt, wird *folgenvollständig* genannt. Für metrische Räume sind die beiden Vollständigkeitsdefinitionen äquivalent, jedoch ist durchaus nicht jeder folgenvollständige Raum X auch vollständig.

§ 4. Normierte Räume

1. Definition des normierten Raumes. Ein linearer Raum X heißt *normiert*, wenn über ihm eine reellwertige, gewöhnlich mit $|x|$ bezeichnete Funktion definiert ist, für die folgendes gilt:

1. $|x| \geqq 0$;
2. $|x| = 0$ genau dann, wenn $x = 0$;
3. $|\alpha x| = |\alpha|\,|x|$;
4. $|x + y| \leqq |x| + |y|$ (Dreiecksungleichung).

Die Funktion $|x|$ selbst heißt eine *Norm* über dem Raum X.

Die Bedingungen 1, 3 und 4 bedeuten, daß $|x|$ ein konvexes symmetrisches Funktional über X ist, während die Bedingung 2 zum Ausdruck bringt, daß das nur aus dem konvexen Funktional $|x|$ bestehende System $\{|x|\}$ ein ausreichendes System konvexer Funktionale über X ist. Dieses System definiert daher auf X eine Topologie, in der X ein lokal konvexer Raum ist (vgl. § 3, Nr. 4). Hierbei erhält man ein dieser Topologie entsprechendes Umgebungssystem, wenn man als Umgebung eines Elements x_0 die Menge aller Vektoren x nimmt, die der Ungleichung

$$|x - x_0| < \varepsilon, \quad \varepsilon > 0 \quad \text{beliebig}, \tag{1}$$

genügen.

---

[1] Vgl. Anhang I.

[2] Zu den Beweisen dieses Satzes und der anschließend formulierten Sätze vergleiche man das Literaturverzeichnis bei Dieudonné [2].

Die so definierte Topologie wird als die *starke Topologie* des normierten Raumes X bezeichnet.

I. *Ist $p(x)$ ein symmetrisches konvexes Funktional über einem linearen Raum X und $\mathfrak{M}$ der Teilraum aller Vektoren $x \in X$, für die $p(x) = 0$ ist* (vgl. § 1, Nr. 9), *so wird durch*

$$|\xi| = p(x) \quad \text{für} \quad x \in \xi$$

im Quotientenraum $X/\mathfrak{M}$ eine Norm definiert.

Beweis. Aus $x, y \in \xi$ folgt $y - x \in \mathfrak{M}$, also ist

$$p(y) = p(x + y - x) \leqq p(x) + p(y - x) = p(x).$$

Entsprechend findet man $p(x) \leqq p(y)$, so daß $p(x) = p(y)$ ist, d. h., $|\xi|$ hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten $x \in \xi$ ab. Ferner ist $|\xi|$ offenbar ein konvexes Funktional. Schließlich folgt aus $|\xi| = 0$, daß $p(x) = 0$ für alle $x \in \xi$, also $\xi = \mathfrak{M}$ ist, d. h., ξ ist das Nullelement von $X/\mathfrak{M}$. Folglich ist $|\xi|$ eine Norm über dem Raum $X/\mathfrak{M}$.

In einem normierten Raum X läßt sich stets eine Metrik definieren; hierzu braucht nur

$$\varrho(x, y) = |x - y| \tag{2}$$

gesetzt zu werden. Dann sind die Axiome einer Metrik (vgl. § 2, Nr. 13) erfüllt. Außerdem stimmen die Umgebungen (1) mit den durch die Metrik (2) definierten Umgebungen überein. Mit anderen Worten: *Die starke Topologie eines normierten Raumes stimmt mit der durch die Metrik*

$$\varrho(x, y) = |x - y|$$

induzierten Topologie überein. Ein normierter Raum heißt *vollständig*, wenn er im Sinne der Metrik $\varrho(x, y) = |x - y|$ vollständig ist (vgl. § 2, Nr. 13). Ein vollständiger normierter Raum wird auch BANACH*scher Raum* genannt.[1]

II. *Jeder nicht vollständige normierte Raum kann vervollständigt, d. h. als linearer und topologischer Teilraum in einen vollständigen normierten Raum eingebettet werden.*

Beweis. Es sei $\tilde{X}$ die vollständige Hülle des metrischen Raumes X mit der Metrik $\varrho(x, y) = |x - y|$ (vgl. § 2, Nr. 13). Es ist zu zeigen, daß die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl sowie die Norm so von X auf $\tilde{X}$ fortgesetzt werden können, daß $\tilde{X}$ ein normierter Raum wird.

Es seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ Fundamentalfolgen aus X, welche die Elemente $x \in \tilde{X}$ und $y \in \tilde{X}$ definieren. Aus den Beziehungen

$$|\alpha x_n - \alpha x_m| = |\alpha|\,|x_n - x_m|,$$

$$|(x_n + y_n) - (x_m + y_m)| = |(x_n - x_m) + (y_n - y_m)| \leqq |x_n - x_m| + |y_n - y_m|$$

[1]) Der bekannte polnische Mathematiker S. BANACH (1892–1945) war einer der Begründer der modernen Funktionalanalysis.

schließen wir, daß $\{\alpha x_n\}$ und $\{x_n + y_n\}$ ebenfalls Fundamentalfolgen sind. Wir bezeichnen die durch sie definierten Elemente des Raumes $\tilde{X}$ mit αx bzw. $x + y$.

Damit ist in $\tilde{X}$ eine Multiplikation mit einer Zahl und eine Addition erklärt. Hierbei sind die Axiome des linearen Raumes (vgl. § 1, Nr. 1) erfüllt, wie man sofort bestätigt. Aus (2) folgt

$$\varrho(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\,\varrho(x, y), \quad \varrho(x+z, y+z) = \varrho(x, y) \tag{3}$$

für alle $x, y, z \in X$. Durch Grenzübergang ergibt sich, daß diese Beziehungen auch für alle $x, y, z \in \tilde{X}$ gelten. Dann genügt aber die Funktion

$$|x| = \varrho(x, 0), \quad x \in \tilde{X},$$

den Axiomen 1 bis 4 der Norm. Beispielsweise folgt aus der zweiten Beziehung (3) die Dreiecksungleichung:

$$|x+y| = \varrho(x+y, 0) \leqq \varrho(x+y, y) + \varrho(y, 0) = \varrho(x, 0) + \varrho(y, 0) = |x| + |y|.$$

Demzufolge ist $\tilde{X}$ ein normierter Raum, wobei

$$\varrho(x, y) = \varrho(x-y, 0) = |x-y| \quad \text{für alle} \quad x, y \in \tilde{X}$$

ist. Überdies ist $\tilde{X}$ nach Konstruktion bezüglich dieser Metrik vollständig, d. h., $\tilde{X}$ ist ein vollständiger normierter Raum.

III. *Ein endlichdimensionaler Teilraum eines normierten Raumes ist stets vollständig und daher auch abgeschlossen.*

Beweis. Nach Satz I aus § 3, Nr. 5, ist jede Norm auf einem n-dimensionalen Teilraum $\mathfrak{M}_n$ mit der Norm

$$|\xi_1 e_1 + \cdots + \xi_n e_n| = \sqrt{\xi_1^2 + \cdots + \xi_n^2}$$

topologisch äquivalent ($e_1, \ldots, e_n$ bilden eine Basis von $\mathfrak{M}_n$). Bezüglich dieser Norm ist $\mathfrak{M}_n$ aber vollständig.

IV. *Ist $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum eines normierten Raumes X, der von X verschieden ist, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Vektor $y \in X$ derart, daß*

$$|y| = 1 \quad \textit{und} \quad |x-y| > 1-\varepsilon \quad \textit{für alle} \quad x \in \mathfrak{M}$$

ist.

Beweis. Es sei y_0 ein Element von X, das nicht zu $\mathfrak{M}$ gehört. Setzen wir

$$d = \inf_{x \in \mathfrak{M}} |x - y_0|,$$

so ist gewiß $d > 0$; denn aus $d = 0$ würde $y_0 \in \overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{M}$ folgen. Zu jedem $\delta > 0$ gibt es nun ein $x_0 \in \mathfrak{M}$, für das $d \leqq |x_0 - y_0| < d + \delta$ ist. Das Element

$$y = \frac{1}{|y_0 - x_0|}(y_0 - x_0)$$

hat die Norm $|y| = 1$, und für $x \in \mathfrak{M}$ gilt

$$|y - x| = \frac{1}{|y_0 - x_0|} |y_0 - (x_0 + |y_0 - x_0| x)$$
$$\geq \frac{d}{|y_0 - x_0|} > \frac{d}{d+\delta} = 1 - \frac{\delta}{d+\delta} > 1 - \varepsilon,$$

wenn $\delta > 0$ so gewählt wird, daß $\frac{\delta}{d+\delta} < \varepsilon$ ist.

V. *Die Einheitskugel eines unendlichdimensionalen normierten Raumes X ist nicht relativ kompakt.*

Beweis. Wir konstruieren zunächst induktiv eine Folge von Elementen $x_n \in X$, die den Bedingungen

$$|x_n| = 1 \quad \text{und} \quad |x_n - x_m| > \frac{1}{2} \quad \text{für} \quad n \neq m$$

genügen. Hierzu gehen wir folgendermaßen vor. Es sei x_1 ein Element aus X mit $|x_1| = 1$. Sind bereits n Elemente $x_1, \ldots, x_n$ konstruiert, so betrachten wir den von diesen Elementen aufgespannten Teilraum $\mathfrak{M}_n$. Dieser ist nach Satz III abgeschlossen. Da X unendlichdimensional ist, gilt $\mathfrak{M} \neq X$, so daß es nach Satz IV einen Vektor x_{n+1} gibt, der die Bedingungen $|x_{n+1}| = 1$ und $|x - x_{n+1}| > \frac{1}{2}$ für alle $x \in \mathfrak{M}_n$ erfüllt. Die sich auf diese Weise ergebenden Elemente x_n liegen sämtlich auf der Einheitssphäre, während die aus ihnen gebildete Folge sicher keine Fundamentalfolge enthält. Daher ist die Einheitssphäre und damit auch die Einheitskugel nicht relativ kompakt.

Ein topologischer linearer Raum X heißt *normierbar*, wenn sich in ihm eine Norm einführen läßt derart, daß die durch sie definierte Topologie des Raumes X mit seiner ursprünglichen Topologie übereinstimmt. A. N. Kolmogoroff [1] bewies: *Ein topologischer linearer Raum ist genau dann normierbar, wenn es in ihm eine beschränkte konvexe Umgebung des Nullelements gibt.* Hierbei wird eine Teilmenge $\mathfrak{M}$ eines topologischen linearen Raumes X *beschränkt* genannt, wenn für beliebige Elemente $x_n \in \mathfrak{M}$ und beliebige Zahlen $\varepsilon_n \to 0$ stets $\varepsilon_n x_n \to 0$ gilt. Wie man zeigen kann, ist diese Definition im Fall eines lokal konvexen Raumes X gleichbedeutend damit, daß jedes konvexe Funktional p aus einem ausreichenden System $\{p\}$, das die Topologie von X festlegt, auf $\mathfrak{M}$ beschränkt ist.

Beispiele. 1. *Der Raum $M(T)$.* Es bezeichne T eine beliebige Menge. Mit $M(T)$ werde die Gesamtheit aller auf T definierten beschränkten komplexen Funktionen $x = x(t)$ bezeichnet. Wir definieren in der üblichen Weise in $M(T)$ eine Addition und eine Multiplikation mit einer Zahl. Nehmen wir dann noch als Norm von $x(t)$ die durch

$$|x| = \sup_{t \in T} |x(t)|$$

definierte Zahl, so wird $M(t)$, wie man sofort bestätigt, zu einem vollständigen normierten Raum.

2. *Der Raum $C(T)$.* Hier bezeichne T einen topologischen Raum. Mit $C(T)$ werde die Gesamtheit aller auf T definierten komplexen Funktionen $x = x(t)$ bezeichnet, die dort stetig und beschränkt sind. In $C(T)$ definieren wir genauso wie in $M(T)$ die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl sowie die Norm. Dann wird $C(T)$ zu einem vollständigen

normierten Raum. Offenbar ist $C(T)$ ein abgeschlossener Teilraum von $M(T)$. Ist T bikompakt, so ist $C(T)$ nach Satz VII aus § 2, Nr. 7, die Gesamtheit aller komplexen Funktionen, die auf T definiert und stetig sind.

3. *Der Raum* l^2. Mit l^2 bezeichnet man die Gesamtheit aller Folgen $x = \{x_n\}$ komplexer Zahlen x_n, die der Bedingung

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < \infty$$

genügen. Durch

$$|x| = \left(\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \alpha x = \{\alpha x_n\}, \quad x + y = \{x_n + y_n\}$$

$$(x = \{x_n\} \quad \text{und} \quad y = \{y_n\})$$

definieren wir in l^2 eine Norm $|x|$ sowie eine Addition und eine Multiplikation mit einer Zahl. Diese Definitionen sind zulässig, weil mit $x, y \in l^2$ auch $\alpha x \in l^2$ und $x + y \in l^2$ gilt; für das Produkt αx ist diese Behauptung trivial, während sie für die Summe $x + y$ aus der Ungleichung $|x_n + y_n|^2 \leqq 2(|x_n|^2 + |y_n|^2)$ folgt.

Der Leser möge die Gültigkeit der Normaxiome selbst nachprüfen (vgl. § 5, Nr. 1).

Um nachzuweisen, daß der normierte Raum l^2 vollständig ist, betrachten wir in l^2 eine Fundamentalfolge. Sind

$$x^{(k)} = \{x_n^{(k)}\} \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots)$$

die Elemente dieser Folge, so gilt

$$|x^{(k)} - x^{(p)}|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |x_n^{(k)} - x_n^{(p)}|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{für} \quad k, p > N(\varepsilon), \tag{4}$$

erst recht also

$$|x_n^{(k)} - x_n^{(p)}| < \varepsilon \quad \text{für} \quad k, p > N(\varepsilon).$$

Demzufolge existieren die Grenzwerte

$$x_n = \lim_{k \to \infty} x_n^{(k)}.$$

Überdies folgt aus (4) die Abschätzung

$$\sum_{n=1}^{M} |x_n^{(k)} - x_n^{(p)}|^2 \leqq \varepsilon^2 \quad \text{für} \quad k, p > N(\varepsilon) \tag{5}$$

für jede natürliche Zahl M. Für $k \to \infty$ erhalten wir hieraus

$$\sum_{n=1}^{M} |x_n - x_n^{(p)}|^2 < \varepsilon^2 \quad \text{für} \quad p > N(\varepsilon). \tag{6}$$

Da $N(\varepsilon)$ nicht von M abhängt, darf in (6) der Grenzübergang $M \to \infty$ ausgeführt werden, und wir erhalten

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n - x_n^{(p)}|^2 \leqq \varepsilon^2 \quad \text{für} \quad p > N(\varepsilon).$$

Dies bedeutet, daß die Folge $\{x_n - x_n^{(p)}\}$ und mit ihr auch die Folge $\{x_n\}$ zu l^2 gehört und daß $\{x_n\}$ in l^2 der Limes der aus den $\{x_n^{(i)}\}$ $(i = 1, 2, 3, \ldots)$ gebildeten Folge ist.

Es sei noch darauf hingewiesen, daß l^2 separabel ist; denn die Gesamtheit aller Folgen $\{x_n\}$, in denen die x_n rational und jeweils nur endlich viele von Null verschieden sind, ist eine abzählbare, in l^2 dichte Menge.

Weitere Beispiele für normierte Räume findet man in § 6.

2. Reihen in normierten Räumen. Eine aus Elementen x_n eines normierten Raumes X gebildete Reihe

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \tag{1}$$

heißt *konvergent*, wenn die Folge ihrer Partialsummen

$$s_n = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

in X konvergiert. Der Limes dieser Folge heißt dann *Summe* der Reihe (1). Die Reihe (1) heißt *absolut konvergent*, wenn die Zahlenreihe

$$|x_1| + |x_2| + |x_3| + \cdots \tag{2}$$

konvergiert.

In einem vollständigen normierten Raum ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.

Für $n > m$ gilt nämlich

$$|s_n - s_m| = |x_{m+1} + \cdots + x_n| \leqq |x_{m+1}| + \cdots + |x_n|.$$

Folglich bilden die s_n, wenn die Reihe (2) konvergiert, in X eine Fundamentalfolge, die auf Grund der Vollständigkeit von X einen Limes hat.

Dieses Ergebnis läßt sich leicht auf folgenvollständige lokal konvexe Räume übertragen. Es gilt also erst recht für vollständige lokal konvexe Räume (vgl. § 3, Nr. 13).

Gegeben seien ein lokal konvexer Raum X und ein ausreichendes System $\{p\}$ konvexer Funktionale, das die Topologie von X definiert. Die Reihe $x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$ heiße *absolut konvergent*, wenn die Reihe $p(x_1) + p(x_2) + p(x_3) + \cdots$ für jedes $p \in \{p\}$ konvergiert. Dann gilt: *In einem folgenvollständigen Raum ist jede absolut konvergente Reihe konvergent.* Man prüft nämlich leicht nach, daß die Partialsummen $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ einer absolut konvergenten Reihe in X eine Fundamentalfolge bilden.

3. Quotientenräume eines vollständigen normierten Raumes. Es sei X ein normierter Raum und $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum von X. Wir betrachten den Quotientenraum $X/\mathfrak{M}$, d. h. den Raum, dessen Elemente die Klassen ξ modulo $\mathfrak{M}$ sind (vgl. § 1, Nr. 4). Da $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, sind alle diese Klassen ebenfalls abgeschlossen. In $X/\mathfrak{M}$ läßt sich durch

$$|\xi| = \inf_{x \in \xi} |x| \tag{1}$$

eine Norm einführen. Beim Beweis dieser Behauptung können wir uns offenbar auf den Nachweis der Gültigkeit der Normaxiome 2 und 4 beschränken (vgl. Nr. 1), weil die Axiome 1 und 3 trivialerweise erfüllt sind.

Die Nullklasse $\xi = 0$ stimmt mit $\mathfrak{M}$ überein und enthält daher das Nullelement des Raumes X. Aus (1) folgt also $|\xi| = 0$, wenn ξ die Nullklasse ist. Ist umgekehrt $|\xi| = 0$, so gibt es nach (1) in ξ eine Folge $\{x_n\}$ mit der Eigenschaft $|x_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dies bedeutet aber, daß das Nullelement 0 Häufungspunkt von ξ ist und somit selbst zu ξ gehört. Demnach gilt $\xi = \mathfrak{M}$, d. h., ξ ist das Nullelement im Raum $X/\mathfrak{M}$. Also ist das Axiom 2 erfüllt.

Um die Gültigkeit von Axiom 4 nachzuweisen, gehen wir davon aus, daß es auf Grund der Definition (1) zu $\xi, \eta \in X/\mathfrak{M}$ und jedem $\varepsilon > 0$ Vektoren $x \in \xi$, $y \in \eta$ gibt, für die

$$|x| < |\xi| + \varepsilon, \quad |y| < |\eta| + \varepsilon$$

gilt. Folglich ist

$$|x+y| \leqq |x| + |y| \leqq |\xi| + |\eta| + 2\varepsilon. \tag{2}$$

Andererseits gilt $x+y \in \{\xi+\eta\}$ und daher $|\xi+\eta| \leqq |x+y|$. Zusammen mit (2) ergibt dies

$$|\xi+\eta| \leqq |\xi| + |\eta| + 2\varepsilon,$$

so daß

$$|\xi+\eta| \leqq |\xi| + |\eta|$$

sein muß, weil ε beliebig klein genommen werden kann.

Den durch (1) normierten Raum $X/\mathfrak{M}$ nennen wir den *normierten Quotientenraum.*

Ist X ein vollständiger normierter Raum und $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum von X, so ist der normierte Quotientenraum $X/\mathfrak{M}$ ebenfalls vollständig.

Beweis. Ist $\{\xi_n\}$ eine Fundamentalfolge aus $X/\mathfrak{M}$, so kann aus ihr eine Teilfolge $\{\xi_{n_k}\}$ ausgewählt werden derart, daß

$$|\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| < \frac{1}{2^{k+2}}$$

ist. Weiter findet man auf Grund der Definition der Norm in $X/\mathfrak{M}$ in jeder Klasse $\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}$ einen Vektor y_k, für den

$$|y_k| < |\xi_{n_{k+1}} - \xi_{n_k}| + \frac{1}{2^{k+2}} < \frac{1}{2^{k+1}} \tag{3}$$

ist. Aus (3) folgt die absolute Konvergenz der Reihe

$$x_{n_1} + y_1 + y_2 + y_3 + \cdots. \tag{4}$$

Da X vollständig ist, konvergiert diese Reihe in X. Ihre Summe werde mit x bezeichnet. Gehört x zur Klasse ξ, so gilt, wie wir sogleich zeigen werden, $\xi = \lim\limits_{n\to\infty} \xi_n$. Damit ist dann aber bewiesen, daß $X/\mathfrak{M}$ vollständig ist.

Wir bezeichnen die k-te Partialsumme von (4) mit s_k. Dann gilt

$$|x - s_k| \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Andererseits folgt aus $x_{n_1} \in \xi_{n_1}$ und $y_p \in \xi_{n_{p+1}} - \xi_{n_p}$, daß $s_k \in \xi_{n_k}$ ist. Daher gilt

$$|\xi - \xi_{n_k}| \leqq |x - s_k| \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty.$$

Da $\{\xi_n\}$ eine Fundamentalfolge ist, können wir hieraus unter Berücksichtigung der Ungleichung

$$|\xi - \xi_n| \leqq |\xi - \xi_{n_k}| + |\xi_{n_k} - \xi_n|$$

schließen, daß $\xi_n \to \xi$ für $n \to \infty$ gilt. Dies war zu beweisen.

4. Beschränkte lineare Operatoren. Ein Operator A aus einem normierten Raum X in einen normierten Raum Y heißt *beschränkt,* wenn es eine feste Zahl C derart gibt, daß

$$|Ax| \leqq C|x| \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{D}_A \tag{1}$$

gilt.

I. *Ein linearer Operator, der im Punkt $x=0$ stetig ist, ist beschränkt. Umgekehrt ist jeder beschränkte lineare Operator stetig.*

Beweis. Der Operator A sei stetig für $x=0$. Dann entspricht jeder Umgebung $|y|<\varepsilon$ aus Y eine Umgebung $|x|<\delta$ aus X derart, daß $|Ax|<\varepsilon$ für $|x|<\delta$, $x\in\mathfrak{D}_A$, ist. Setzt man mit beliebigem $x\in\mathfrak{D}_A$ nun $z=\frac{|\delta|}{2|x|}x$, so folgt $|z|<\delta$. Daher ist $|Az|<\varepsilon$, d. h., $\frac{\delta}{2|x|}|Ax|<\varepsilon$ und $|Ax|<\frac{2\varepsilon}{\delta}|x|$ für alle $x\in\mathfrak{D}_A$. Dies bedeutet aber die Beschränktheit von A. Ist umgekehrt A beschränkt, so folgt die Stetigkeit von A aus der für alle $x, x_0\in\mathfrak{D}_A$ gültigen Ungleichung

$$|Ax-Ax_0|=|A(x-x_0)|\leqq C|x-x_0|.$$

II. *Ist der Raum Y vollständig, so kann ein beschränkter linearer Operator A stets in eindeutiger Weise zu einem beschränkten linearen Operator mit dem Definitionsbereich $\overline{\mathfrak{D}_A}$ fortgesetzt werden, wobei die Ungleichung* (1) *gültig bleibt.*

Beweis. Ist $x_0\in\overline{\mathfrak{D}_A}$, so gibt es eine Folge von Vektoren $x_n\in\mathfrak{D}_A$, so daß

$$|x_n-x_0|\to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty$$

gilt. Aus der Ungleichung

$$|Ax_n-Ax_m|=|A(x_n-x_m)|\leqq C|x_n-x_m|$$

geht dann hervor, daß $\{Ax_n\}$ in Y eine Fundamentalfolge ist. Da Y vollständig ist, hat sie einen Limes in Y. Wir definieren

$$\tilde{A}x_0=\lim_{n\to\infty}Ax_n. \tag{2}$$

Diese Definition hängt nicht von der jeweiligen Wahl der Folge $x_n\to x_0$ ab. Gilt nämlich auch $x_n'\to x_0$, $x_n'\in\mathfrak{D}_A$, so folgt $|x_n'-x_n|\to 0$ für $n\to\infty$ und hieraus wegen (1) dann

$$Ax_n'-Ax_n\to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty.$$

Der durch (2) definierte Operator $\tilde{A}$ aus X in Y mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}=\overline{\mathfrak{D}_A}$ ist offenbar eine Fortsetzung des Operators A. Daß $\tilde{A}$ linear ist und $|\tilde{A}x|\leqq C|x|$ für alle $x\in\overline{\mathfrak{D}_A}$ gilt, prüft man leicht nach, indem man die entsprechenden Grenzübergänge ausführt.

Ist insbesondere $\mathfrak{D}_A$ in X dicht, so ist $\tilde{A}$ auf dem ganzen Raum X definiert und beschränkt.

Wir betrachten jetzt solche beschränkten linearen Operatoren aus X in Y, die auf ganz X definiert sind. Die Gesamtheit dieser Operatoren werde mit $B(X, Y)$ bezeichnet.

Ist $A\in B(X, Y)$, so gilt

$$|Ax|\leqq C|x| \quad \text{für alle} \quad x\in X \quad \text{und ein gewisses } C. \tag{3}$$

Insbesondere gilt

$$|Ax|\leqq C$$

für alle Vektoren $x \in X$ mit $|x| \leqq 1$. Daher existiert

$$\sup_{|x| \leqq 1} |Ax|.$$

Diese Zahl wird die *Norm* des beschränkten Operators A genannt und mit $|A|$ bezeichnet. Nach Definition ist also

$$|A| = \sup_{|x| \leqq 1} |Ax|.$$

Wie man leicht sieht, gilt auch

$$|A| = \sup_{x \in X} \frac{|Ax|}{|x|}.$$

Man braucht hierzu nur $\frac{x}{|x|} = y$ setzen; dann ist $|y| = 1$ und folglich

$$\sup_{x \in X} \frac{|Ax|}{|x|} = \sup_{|y|=1} |Ay| = \sup_{|y| \leqq 1} |Ay| = |A|.$$

Ferner erkennen wir hieraus: $|A|$ *ist die kleinste aller Zahlen* C, *für die* (3) *gilt*. Offenbar ist $|A| = 0$ nur für $A = 0$.

III. *Aus* $A, B \in B(X, Y)$ *folgt* $\alpha A \in B(X, Y)$ *und* $A + B \in B(X, Y)$, *und es ist*

$$|\alpha A| = |\alpha|\,|A|, \quad |A + B| \leqq |A| + |B|.$$

Der Beweis folgt aus den Beziehungen

$$\frac{|\alpha A x|}{|x|} = |\alpha| \frac{|Ax|}{|x|}, \quad \frac{|(A+B)x|}{|x|} \leqq \frac{|Ax|}{|x|} + \frac{|Bx|}{|x|} \leqq |A| + |B|.$$

Somit ist $B(X, Y)$ *ein normierter Raum.*

IV. *Mit* Y *ist auch* $B(X, Y)$ *vollständig.*

Beweis. Ist $\{A_n\}$ eine Fundamentalfolge des Raumes $B(X, Y)$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $N(\varepsilon)$, so daß $|A_n - A_m| < \varepsilon$ für alle $n, m > N(\varepsilon)$ gilt. Hieraus folgt für jedes $x \in X$

$$|A_n x - A_m x| = |(A_n - A_m)x| < \varepsilon |x| \qquad \text{für} \quad n, m > N(\varepsilon). \tag{4}$$

Demzufolge ist $\{A_n x\}$ eine Fundamentalfolge aus Y, die auf Grund der Vollständigkeit von Y einen Limes in Y hat. Wir setzen

$$Ax = \lim_{n \to \infty} A_n x.$$

Der so definierte Operator A aus X in Y ist offenbar linear. Wir werden beweisen, daß A zu $B(X, Y)$ gehört und Limes der Folge $\{A_n\}$ ist. Damit ist dann die Vollständigkeit des Raumes $B(X, Y)$ bewiesen.

Für $n \to \infty$ erhalten wir aus (4)

$$|Ax - A_m x| \leqq \varepsilon |x| \quad \text{für alle} \quad m > N(\varepsilon).$$

Folglich gilt $A - A_m \in B(X, Y)$ und

$$|A - A_m| \leqq \varepsilon \quad \text{für} \quad m > N(\varepsilon). \tag{5}$$

Dann ist aber $A = A_m + (A - A_m) \in B(X, Y)$. Aus (5) folgt außerdem $|A - A_m| \to 0$ für $m \to \infty$, womit der Satz IV bewiesen ist.

Wir betrachten jetzt den Fall $X = Y$, d. h. den Fall beschränkter Operatoren in X, die für alle $x \in X$ definiert sind. Die Gesamtheit dieser Operatoren werde mit $\mathfrak{B}(X)$ bezeichnet (also $\mathfrak{B}(X) = B(X, X)$). Ergänzend zu den Sätzen III und IV gilt dann:

V. *Aus* $A, B \in \mathfrak{B}(X)$ *folgt* $AB \in \mathfrak{B}(X)$, *und es ist*

$$|AB| \leqq |A||B|.$$

Der Beweis beruht auf der Abschätzung

$$\frac{|ABx|}{|x|} \leqq \frac{|A||Bx|}{|x|} \leqq \frac{|A||B||x|}{|x|} = |A||B|.$$

VI (S. Banach [1]). *Ist A ein beschränkter linearer Operator, der den vollständigen normierten Raum X umkehrbar eindeutig auf den vollständigen normierten Raum Y abbildet, so ist der inverse Operator A^{-1} auf Y beschränkt.*

Beweis. Nach Voraussetzung bildet A den Raum X umkehrbar eindeutig auf den Raum Y ab. Demzufolge existiert der inverse Operator A^{-1} und ist auf ganz Y definiert. Zu beweisen ist lediglich seine Beschränktheit. Hierzu bezeichnen wir die Gesamtheit aller Vektoren $y \in Y$, für die $|A^{-1}y| \leqq n|y|$ ist, mit Y_n. Offenbar gilt dann

$$Y = \bigcup_{n=1}^{\infty} Y_n.$$

Da der vollständige Raum Y eine Menge zweiter Kategorie ist (vgl. § 2, Nr. 13, Satz III), ist wenigstens eine der Mengen Y_n, etwa Y_{n_0}, in Y nicht nirgends dicht. Dann gibt es eine abgeschlossene Kugel $\overline{S_0}$, in der $\overline{S_0} \cap Y_{n_0}$ überall dicht ist, d. h.

$$\overline{S_0} = \overline{\overline{S_0} \cap Y_{n_0}}. \tag{6}$$

Wir nehmen nun eine abgeschlossene Kugel $\overline{S_1}$ mit dem Mittelpunkt $y_1 \in Y_{n_0}$ und dem Radius r_1, die ganz in S_0 liegt. Weiter sei y ein beliebiges Element aus Y mit der Norm $|y| = r_1$. Da $|(y_1 + y) - y_1)| = r_1$ ist, gilt $y_1 + y \in \overline{S_1}$. Auf Grund von (6) schließen wir hieraus, daß es eine Folge von Elementen $z_k \in \overline{S_0} \cap Y_{n_0}$ gibt, die gegen $y_1 + y$ konvergiert. Dann konvergiert aber die Folge $\{u_k\}$, $u_k = z_k - y_1$, gegen y. Offenbar darf angenommen werden, daß alle z_k aus $\overline{S_1}$ sind und folglich $|u_k| \leqq r_1$ gilt. Außerdem gilt $|u_k| \to |y| = r_1$. Daher dürfen wir fernerhin annehmen, daß $|u_k| \geqq \frac{r_1}{2}$ für alle k gilt. Es sei also

$$\frac{r_1}{2} \leqq |u_k| \leqq r_1. \tag{7}$$

Aus $z_k, y_1 \in Y_{n_0}$ folgt

$$|A^{-1}u_k| = |A^{-1}z_k - A^{-1}y_1| \leqq |A^{-1}z_k| + |A^{-1}y_1| \leqq n_0(|z_k| + |y_1|). \tag{8}$$

Außerdem ist

$$|z_k| = |u_k + y_1| \leqq |u_k| + |y_1| \leqq r_1 + |y_1|,$$

und daher ergibt sich aus (7) und (8) die Abschätzung

$$|A^{-1}u_k| \leqq n_0(r_1 + 2|y_1|) \leqq \frac{2n_0(r_1+2|y_1|)}{r_1}|u_k|. \tag{9}$$

Nun sei N die kleinste ganze Zahl, die noch größer als

$$\frac{2n_0(r_1+2|y_1|)}{r_1}$$

ist. Dann bedeutet (9), daß $u_k \in Y_N$ ist. Da y ein beliebiges Element der Sphäre $|y| = r_1$ war, haben wir bewiesen, daß jedes Element dieser Sphäre Limes einer Folge aus Y_N ist.

Jetzt sei y ein beliebiges, von Null verschiedenes Element. Dann gehört das Element $y' = \frac{r_1}{|y|}y$ zu der Sphäre, und es gibt eine Folge $\{u_k'\}$, $u_k' \in Y_n$, die gegen y' konvergiert. Dann konvergiert aber die Folge der $u_k = \frac{|y|}{r_1}u_k'$ gegen y. Außerdem gilt

$$|A^{-1}u_k| = \frac{|y|}{r_1}|A^{-1}u_k'| \leqq \frac{|y|}{r_1}N|u_k'| = N|u_k|,$$

also $u_k \in Y_N$. Damit haben wir bewiesen, daß Y_N in Y dicht ist. Auf Y_N gilt die Ungleichung

$$|A^{-1}y| \leqq N|y|.$$

Wir nehmen nun ein beliebiges Element $y_0 \in Y$ und setzen $|y_0| = c$. Da Y_N mit der Kugel $|y| < c$ eine Menge gemeinsam hat, die in dieser Kugel dicht ist, existiert ein Element $y_1 \in Y_N$, für das

$$|y_0 - y_1| \leqq \frac{c}{2}, \quad |y_1| < c,$$

gilt. Wenden wir die vorhergehende Überlegung auf $y_0 - y_1$ an Stelle von y_0 an, so ergibt sich die Existenz eines $y_2 \in Y_N$, das der Bedingung

$$|y_0 - y_1 - y_2| \leqq \frac{c}{2^2}, \quad |y_2| < \frac{c}{2},$$

genügt. Durch Fortsetzung des Verfahrens erkennt man, daß es in Y_N Elemente $y_1, y_2, y_3, \ldots$ gibt, für die

$$|y_0 - (y_1 + y_2 + \cdots + y_k)| \leqq \frac{c}{2^k}, \quad |y_k| < \frac{c}{2^{k-1}},$$

ist. Hieraus folgt

$$y_0 = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k = y_1 + y_2 + y_3 + \cdots.$$

Wir setzen nun $x_k = A^{-1}y_k$. Aus der Abschätzung

$$|x_k| = |A^{-1}y_k| \leqq N|y_k| < \frac{Nc}{2^{k-1}}$$

folgt dann die absolute Konvergenz der Reihe $x_0 = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots$ sowie die Beziehung

$$Ax_0 = A\left(\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} x_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} Ax_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} y_k = y_0.$$

Folglich gilt

$$|A^{-1}y_0| = |x_0| \leqq |x_1| + |x_2| + \cdots \leqq Nc\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \cdots\right) = 2Nc = 2N|y_0|,$$

also $|A^{-1}y| \leqq 2N|y|$ für alle $y \in Y$, womit die Beschränktheit des inversen Operators A^{-1} bewiesen ist.

VII. *Ist X ein linearer Raum, der sowohl bezüglich der Norm $|x|$ als auch bezüglich der Norm $|x|_1$ vollständig ist, und gilt*

$$|x|_1 \geqq |x| \quad \textit{für alle} \quad x \in X, \tag{10}$$

so gibt es eine Konstante C derart, daß

$$|x|_1 \leqq C|x|$$

ist.

Beweis. Wir bezeichnen den als BANACHschen Raum mit der Norm $|x|$ bzw. $|x|_1$ betrachteten linearen Raum X mit X bzw. X_1. Der durch die Gleichung $Ax = x$ definierte Operator A bildet X_1 umkehrbar auf X ab. Er ist linear und wegen (10) beschränkt, so daß nur noch der Satz VI anzuwenden bleibt.

Zwei Normen $|x|$ und $|x|_1$ eines linearen Raumes X sollen *äquivalent* genannt werden, wenn es zwei positive Zahlen C_1 und C_2 gibt, für die

$$C_1|x| \leqq |x|_1 \leqq C_2|x|$$

ist. Offenbar bestimmen zwei äquivalente Normen in X ein und dieselbe Topologie. Wie man leicht sieht, gilt auch die Umkehrung, d. h., zwei Normen, die ein und dieselbe Topologie des Raumes X bestimmen, sind äquivalent. Der Satz VII besagt, daß die seinen Voraussetzungen genügenden Normen $|x|$ und $|x|_1$ äquivalent sind.

5. Beschränkte lineare Funktionale. Der konjugierte Raum. Ein lineares Funktional $f(x)$ über einem normierten Raum X heißt *beschränkt*, wenn es eine Zahl C gibt, so daß

$$|f(x)| \leqq C|x| \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{D}_f$$

gilt. Beschränkte lineare Funktionale sind Spezialfälle beschränkter linearer Operatoren, weil sie Operatoren aus X in Y sind, wobei $Y = \mathfrak{C}$ der Raum der Skalare ist (vgl. § 3, Nr. 1). Daher gelten die in Nr. 4 für beschränkte Operatoren erhaltenen Ergebnisse auch für beschränkte Funktionale. Insbesondere ist die Gesamtheit $B(X, \mathfrak{C})$ der beschränkten linearen Funktionale, die auf dem ganzen Raum X definiert sind, ein normierter Raum, wobei die Norm $|f|$ eines zu $B(X, \mathfrak{C})$ gehörenden Funktionals durch

$$|f| = \sup_{|x| \leqq 1} |f(x)| = \sup_{x \in X} \frac{|f(x)|}{|x|}$$

definiert wird. Dieser Raum wird der zu X *konjugierte Raum* genannt und mit X' bezeichnet.

Der zu X' konjugierte Raum wird mit X'' bezeichnet. Man nennt X'' den zu X *bikonjugierten* Raum. Entsprechend definiert man den dritten, vierten, ... konjugierten Raum.

Da der aus allen Skalaren bestehende Raum $\mathfrak{C}$ vollständig ist, gilt nach Satz IV aus Nr. 4 der Satz

I. *Der konjugierte Raum (der beschränkten linearen Funktionale) ist vollständig.*

Wenden wir Theorem 2 aus § 1, Nr. 9, und die dort formulierte Folgerung auf das konvexe Funktional $p(x) = |x|$ an, so erhalten wir folgende Sätze:

II. *Jedes beschränkte lineare Funktional, das auf einem Teilraum eines normierten Raumes X gegeben ist, kann ohne Änderung seiner Norm zu einem auf dem ganzen Raum definierten linearen Funktional fortgesetzt werden.*

III. *Zu jedem Vektor $x \in X$ gibt es ein Funktional $f \in X'$ mit den Eigenschaften*

$$f(x) = |x| \quad \textit{und} \quad |f| = 1.$$

Daher gilt:

IV. *Ist $f(x) = 0$ für jedes Funktional $f \in X'$, so ist $x = 0$.*

Wir setzen nun mit einem festen $x \in X$

$$F_x(f) = f(x), \quad f \in X'.$$

Dann ist F_x offenbar ein lineares Funktional über X'. Dieses Funktional ist beschränkt, weil

$$|F_x(f)| = |f(x)| \leqq |x|\,|f| \tag{1}$$

gilt. Folglich gehört F_x zu X''.

Aus (1) folgt $|F_x| \leqq |x|$. Andererseits steht in (1) auf Grund des Satzes III wenigstens für ein $f \in X'$ das Gleichheitszeichen. Folglich ist $|F_x| = |x|$, und wir haben den Satz

V. *Die Zuordnung $x \to F_x$ ist eine isometrische Abbildung von X in X''.*

Aus diesem Grund können die Vektoren x einerseits und die durch sie erzeugten Funktionale $F_x(f)$ andererseits miteinander identifiziert und X als Teilmenge von X'' angesehen werden. Ist hierbei $X = X''$, so wird der Raum X *reflexiv* (oder *regulär*) genannt. Die Reflexivität eines Raumes X bedeutet also, daß jedes beschränkte lineare Funktional $F(f)$ über X', d. h. jedes $F \in X''$, in der Form

$$F(f) = f(x)$$

geschrieben werden kann, wobei x ein fester Vektor aus X ist.

6. Vollstetige Operatoren. Es sei X ein vollständiger normierter Raum. Ein Operator A in X heißt *vollstetig*, wenn er eine beschränkte Menge stets in eine relativ kompakte Menge abbildet.

I. *Jeder vollstetige Operator ist beschränkt.*

Anderenfalls gäbe es nämlich eine Folge von Elementen x_n mit

$$|x_n| = 1, \quad |A x_n| > n,$$

und A würde die beschränkte Menge $\{x_n\}$ in die offenbar nicht relativ kompakte Menge $\{Ax_n\}$ abbilden.

Es sei darauf hingewiesen, daß die Umkehrung nicht gilt. Beispielsweise ist der in einem unendlichdimensionalen Raum erklärte Einheitsoperator wohl beschränkt, aber gewiß nicht vollstetig, weil er die Einheitssphäre auf sich abbildet, d. h. auf eine Menge, die nicht relativ kompakt ist (vgl. Nr. 1, Satz V).

II. *Ist A ein vollstetiger Operator und B ein auf ganz X definierter beschränkter Operator, so sind die Operatoren AB und BA ebenfalls vollstetig.*

Beweis. Es sei $\{x_n\}$ eine beschränkte Folge. Da A vollstetig ist, kann man aus $\{x_n\}$ eine Teilfolge $\{x'_n\}$ aussuchen, für die $\{Ax'_n\}$ konvergiert. Auf Grund der Beschränktheit von B konvergiert dann auch die Folge $\{BAx'_n\}$. Folglich ist der Operator BA vollstetig. Um zu zeigen, daß auch AB vollstetig ist, nehmen wir wieder eine beschränkte Folge $\{x_n\}$. Dann ist auch $\{Bx_n\}$ beschränkt. Folglich ist $\{ABx_n\}$ relativ kompakt, d. h., AB ist vollstetig.

Ähnlich wie Satz II beweist man den Satz

III. *Sind A_1 und A_2 vollstetige Operatoren, so ist auch $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ ein vollstetiger Operator (α_1, α_2 Skalare).*

Ferner gilt der Satz

IV. *Ist $\{A_n\}$ eine Folge vollstetiger Operatoren mit der Eigenschaft*

$$|A - A_n| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

so ist der Operator A ebenfalls vollstetig.

Beweis. Es sei $K = K_c$ die in X durch die Ungleichung $|x| \leqq c$ definierte Kugel. Wir setzen $\varepsilon_n = |A - A_n| c$. Für $x \in K$ gilt dann

$$|(A - A_n)x| \leqq |A - A_n| c = \varepsilon_n.$$

Demnach bildet die relativ kompakte Menge $\{A_n K\}$ ein ε_n-Netz für die Menge AK, wobei ε_n für $n \to \infty$ gegen Null strebt. Hieraus folgt nach Satz II aus § 2, Nr. 14, daß die Menge AK relativ kompakt ist, d. h., A ist vollstetig.

Im folgenden Satz werden Beispiele vollstetiger Operatoren angegeben.

V. *Gilt*

$$\sum_{i,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < +\infty,$$

so ist der im Raum[1] l^2 *durch*

$$y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \qquad (i = 1, 2, 3, \ldots) \tag{1}$$

definierte Operator A vollstetig.

Beweis. Es sei A_n der Operator, der jedem Vektor

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots\}$$

den Vektor

$$y^{(n)} = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots\}$$

[1] Vgl. Nr. 1, Beispiel 3.

zuordnet, wobei die y_i durch (1) erklärt sind. Dann bildet A_n jede beschränkte Menge aus l^2 in eine beschränkte Menge des n-dimensionalen euklidischen Raumes ab, d. h. in eine relativ kompakte Menge. Folglich ist A_n vollstetig. Andererseits gilt

$$|(A - A_n)\, x|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |y_i|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2,$$

also

$$|A - A_n| \leqq \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty,$$

so daß nur noch Satz IV anzuwenden bleibt.

7. Analytische Vektorfunktionen mit Werten in einem vollständigen normierten Raum. Der Begriff der analytischen Vektorfunktionen mit Werten in einem linearen topologischen Raum wurde bereits definiert (vgl. § 3, Nr. 12). Insbesondere wissen wir also, was unter einer analytischen Vektorfunktion mit Werten in einem normierten Raum zu verstehen ist: Eine Vektorfunktion $x(\lambda)$, deren Werte in einem normierten Raum X liegen, heißt in einem Gebiet G der komplexen λ-Ebene *analytisch*, wenn der Limes

$$x'(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda \to 0} \frac{x(\lambda + \Delta\lambda) - x(\lambda)}{\Delta\lambda}$$

(im Sinne der durch die Norm definierten Topologie von X) in jedem Punkt $\lambda \in G$ existiert.

I (CAUCHYscher Integralsatz). *Ist die Vektorfunktion $x(\lambda)$ im Innern einer geschlossenen rektifizierbaren* JORDAN-*Kurve Γ analytisch und auf Γ stetig, so gilt*

$$\int_\Gamma x(\lambda)\, d\lambda = 0.$$

Beweis. Mit Hilfe der üblichen Überlegungen zeigt man zunächst unter Berücksichtigung der Vollständigkeit von X, daß das Integral einer stetigen Vektorfunktion längs einer rektifizierbaren JORDAN-Kurve im Sinne der Topologie des normierten Raumes X existiert. Wir setzen nun

$$y = \int_\Gamma x(\lambda)\, d\lambda.$$

Dann gilt für jedes beschränkte lineare Funktional f die Beziehung

$$f(y) = \int_\Gamma f(x(\lambda))\, d\lambda = 0, \tag{1}$$

weil $f(x(\lambda))$ eine Zahlenfunktion ist, die im Innern von Γ analytisch und auf Γ stetig ist. Daher ist der klassische CAUCHYsche Satz auf $f(x(\lambda))$ anwendbar, und wir können auf Grund der willkürlichen Wahl von f aus (1) schließen, daß $y = 0$ sein muß (vgl. Nr. 5, Satz IV).

Entsprechend beweist man den Satz

II (CAUCHYsche Integralformel). *Ist die Vektorfunktion $x(\lambda)$ im Innern einer geschlossenen rektifizierbaren* JORDAN-*Kurve Γ analytisch und auf Γ stetig, so*

gilt für jeden im Innern von Γ liegenden Punkt λ die Formel

$$x(\lambda) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{x(\xi)}{\xi - \lambda}\, d\xi. \tag{2}$$

Aus (2) folgt der Satz

III. *Eine Vektorfunktion $x(\lambda)$, die im Innern eines Kreises $|\lambda - \lambda_0| < r$ analytisch ist, ist dort unendlich oft differenzierbar und als Summe einer absolut konvergenten* TAYLOR*schen Reihe*

$$x(\lambda) = x_0 + (\lambda - \lambda_0)\, x_1 + (\lambda - \lambda_0)^2 x_2 + \cdots \tag{3}$$

mit den Koeffizienten

$$x_n = \frac{1}{n!}\, x^{(n)}(\lambda_0) \tag{4}$$

darstellbar. Der Konvergenzradius R dieser Reihe ist einerseits gleich dem Abstand des Punktes λ_0 von dem am nächsten gelegenen singulären Punkt der Funktion $x(\lambda)$ und andererseits (nach dem CAUCHY-HADAMARD*schen Satz) gleich*

$$R = \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|x_n|}}. \tag{5}$$

Beweis. Ist die Funktion $x(\lambda)$ im Kreis $|\lambda - \lambda_0| < r$ analytisch, so ist sie auf jeder Kreislinie $|\lambda - \lambda_0| = r_1 < r$ stetig. Daher ist die Zahlenfunktion $|x(\lambda)|$ auf der Kreislinie $|\lambda - \lambda_0| = r_1 < r$ stetig und somit beschränkt. Hieraus schließen wir, daß die Reihe

$$\frac{x(\xi)}{\xi - \lambda} = \frac{x(\xi)}{\xi - \lambda_0} \cdot \frac{1}{1 - \dfrac{\lambda - \lambda_0}{\xi - \lambda_0}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x(\xi)}{(\xi - \lambda_0)^{n+1}}\, (\lambda - \lambda_0)^n$$

für $|\lambda - \lambda_0| < r_1 < r$ gleichmäßig auf der Kreislinie $|\xi - \lambda_0| = r_1$ konvergiert. Durch gliedweises Integrieren erhalten wir hieraus unter Berücksichtigung der Formel (2) sowie der aus (2) durch Differenzieren entstehenden Formeln die Gültigkeit der Entwicklung (3) mit den Koeffizienten (4). Hierbei konvergiert die TAYLORsche Reihe (3) für $|\lambda - \lambda_0| < r$ absolut.

Gilt umgekehrt die Entwicklung (3) mit den Koeffizienten (4) in einem Kreis $|\lambda - \lambda_0| < r$, so folgt durch gliedweises Integrieren sofort die Gültigkeit der Beziehung (2) für jede JORDAN-Kurve Γ, die ganz im Innern dieses Kreises liegt. Hieraus ergibt sich schließlich, daß $x(\lambda)$ im Innern des Kreises $|\lambda - \lambda_0| < r$ analytisch ist.

Wie man leicht sieht, gelten die Sätze I bis III auch in beliebigen vollständigen lokal konvexen Räumen, nur ist die Formel (5) dann durch

$$R = \inf_{p} \frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} \sqrt[n]{p(x_n)}} \tag{6}$$

zu ersetzen; die untere Grenze ist in bezug auf alle konvexen Funktionale p eines ausreichenden Systems, das die Topologie von X bestimmt, zu nehmen.

§ 5. Hilbertsche Räume

1. Definition des Hilbertschen Raumes. Ein Vektorraum R über C heißt *euklidisch*, wenn über ihm eine mit $\langle x, y\rangle$ bezeichnete Funktion der beiden Veränderlichen x und y mit Werten in C definiert ist, die folgende Eigenschaften hat:

1. $\langle x, x\rangle \geqq 0$; $\langle x, x\rangle = 0$ nur für $x = 0$;
2. $\langle y, x\rangle = \overline{\langle x, y\rangle}$;
3. $\langle \lambda x, y\rangle = \lambda\langle x, y\rangle$;
4. $\langle x_1 + x_2, y\rangle = \langle x_1, y\rangle + \langle x_2, y\rangle$.

Die Funktion $\langle x, y\rangle$ selbst wird *skalares* (oder auch *inneres*) *Produkt* der Elemente x und y genannt.

Aus den Eigenschaften 1 bis 4 folgen sofort die Formeln

$$\langle x, \lambda y\rangle = \bar{\lambda}\langle x, y\rangle, \quad \langle x, y_1 + y_2\rangle = \langle x, y_1\rangle + \langle x, y_2\rangle.$$

In jedem euklidischen Raum gilt die sogenannte SCHWARZ*sche Ungleichung*

$$|\langle x, y\rangle|^2 \leqq \langle x, x\rangle\langle y, y\rangle. \tag{1}$$

Offenbar gilt sie für $y = 0$; für $y \neq 0$ folgt sie unmittelbar aus

$$\langle x, x\rangle - \bar{\lambda}\langle x, y\rangle - \lambda\overline{\langle x, y\rangle} + \lambda\bar{\lambda}\langle y, y\rangle = \langle x - \lambda y, x - \lambda y\rangle \geqq 0$$

für $\lambda = \dfrac{\langle x, y\rangle}{\langle y, y\rangle}$.

In einem euklidischen Raum läßt sich durch

$$|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle} \tag{2}$$

eine Norm einführen; denn dafür gilt:

$$|x| \geqq 0;$$
$$|x| = 0 \text{ genau dann, wenn } x = 0 \text{ ist};$$
$$|\lambda x| = |\lambda||x|;$$
$$|x + y| \leqq |x| + |y|$$

(vgl. § 4, Nr. 1). Die ersten drei Eigenschaften sind trivial, während die letzte aus der SCHWARZschen Ungleichung folgt:

$$\begin{aligned}|x + y|^2 &= \langle x + y, x + y\rangle = \langle x, x\rangle + \langle x, y\rangle + \langle y, x\rangle + \langle y, y\rangle \\ &\leqq \langle x, x\rangle + 2\sqrt{\langle x, x\rangle\langle y, y\rangle} + \langle y, y\rangle = (|x| + |y|)^2.\end{aligned}$$

Der Raum R wird durch die Definition (2) also tatsächlich zu einem normierten Raum.

Unter Umständen hat man über einem linearen Raum R eine Funktion $\langle x, y\rangle$ zu betrachten, die wohl den Bedingungen 2 bis 4, aber nicht der Bedingung 1 genügt. Eine derartige Funktion heißt *bilineare hermitesche*

Form über R. Eine bilineare hermitesche Form $\langle x, y\rangle$ wird *positiv definit* genannt, wenn stets $\langle x, x\rangle \geqq 0$ ist. Offenbar bleibt die Ungleichung (1) für positiv definite hermitesche bilineare Formen $\langle x, y\rangle$ gültig, so daß $p(x) = \langle x, x\rangle$ ein konvexes Funktional ist. Mit dem in § 4, Nr. 1, formulierten Satz I gelangen wir daher zu folgendem Ergebnis:

I. *Ist $\langle x, y\rangle$ eine positiv definite bilineare hermitesche Form über einem linearen Raum R und $\mathfrak{M}$ der Teilraum der Elemente x aus R, für die $\langle x, x\rangle = 0$ ist, so definiert die Formel*

$$\langle \xi, \eta\rangle = \langle x, y\rangle, \quad x \in \xi,\ y \in \eta,$$

ein skalares Produkt in $R/\mathfrak{M}$.

Offenbar kann die Formel (1) auch in der Gestalt

$$|\langle x, y\rangle| \leqq |x|\,|y|$$

geschrieben werden, woraus folgt, daß *das skalare Produkt $\langle x, y\rangle$ eine stetige Funktion der beiden Veränderlichen x und y ist* (in der durch die Norm in R definierten Topologie); es ist nämlich

$$\begin{aligned} |\langle x + \varDelta x, y + \varDelta y\rangle - \langle x, y\rangle| &= |\langle x, \varDelta y\rangle + \langle \varDelta x, y\rangle + \langle \varDelta x, \varDelta y\rangle| \\ &\leqq |x|\,|\varDelta y| + |y|\,|\varDelta x| + |\varDelta x|\,|\varDelta y|. \end{aligned} \tag{3}$$

Ein im Sinne der Norm $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ vollständiger euklidischer Raum heißt HILBERT*scher Raum.*

HILBERTsche Räume werden im folgenden mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet werden.

II. *Jeder euklidische Raum R kann zu einem* HILBERT*schen Raum vervollständigt werden.*

Denn R ist ein normierter Raum mit der Norm $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ und kann daher zu einem vollständigen normierten Raum $\tilde{R}$ vervollständigt werden (Satz II aus § 4, Nr. 1). Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß die Definition des skalaren Produkts $\langle x, y\rangle$ auf $\tilde{R}$ derart fortgesetzt werden kann, daß auch weiterhin $|x| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ ist.

Es seien $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ zwei Fundamentalfolgen in R, die gegen x_0 bzw. y_0 ($x_0, y_0 \in \tilde{R}$) konvergieren. Wird in (3) nacheinander $x = x_n$, $y = y_n$ und $x + \varDelta x = x_m$, $y + \varDelta y = y_m$ gesetzt, so folgt, daß $\{\langle x_n, y_n\rangle\}$ eine Fundamentalfolge von Zahlen ist und daher einen Limes hat. Wir setzen

$$\langle x_0, y_0\rangle = \lim_{n\to\infty} \langle x_n, y_n\rangle.$$

Wie aus (3) sofort folgt, hängt $\langle x_0, y_0\rangle$ hierbei nicht von der jeweiligen Wahl der gegen x_0 und y_0 strebenden Fundamentalfolgen $\{x_n\}$ und $\{y_n\}$ ab. Gehen wir in den Beziehungen

$$\langle y_n, x_n\rangle = \overline{\langle x_n, y_n\rangle}, \quad \langle \lambda x_n, y_n\rangle = \lambda \langle x_n, y_n\rangle,$$

$$\langle x_n + y_n, z_n\rangle = \langle x_n, z_n\rangle + \langle y_n, z_n\rangle \quad (z_n \in R,\ z_n \to z_0 \in \tilde{R})$$

und

$$|x_n| = \sqrt{\langle x_n, x_n\rangle}$$

zur Grenze über, so erkennen wir, daß $\langle x_0, y_0\rangle$ den Bedingungen 2 bis 4 genügt und $|x_0| = \sqrt{\langle x_0, x_0\rangle}$ für alle $x_0, y_0 \in \tilde{R}$ ist. Wegen $\langle x_0, x_0\rangle = |x_0|^2$ ist aber auch die Bedingung 1 erfüllt.

Ist $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum eines HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}$, so ist das in $\mathfrak{H}$ definierte Skalarprodukt insbesondere auf $\mathfrak{M}$ definiert. Da aber $\mathfrak{M}$ in bezug auf die durch das Skalarprodukt definierte Norm vollständig ist, gilt der Satz

III. *Jeder abgeschlossene Teilraum eines* HILBERT*schen Raumes ist ebenfalls ein* HILBERT*scher Raum.*

Beispiel. Der Raum l^2 (vgl. § 4, Nr. 1, Beispiel 3) wird zu einem HILBERTschen Raum, wenn das skalare Produkt zweier Elemente $x = \{x_n\}$ und $y = \{y_n\}$ durch

$$\langle x, y\rangle = \sum_{n=1}^{\infty} x_n \bar{y}_n$$

definiert wird; die Konvergenz der Reihe ergibt sich aus

$$|x_n \bar{y}_n| \leqq \frac{1}{2}(|x_n|^2 + |y_n|^2).$$

Andere Beispiele für HILBERTsche Räume werden weiter unten in Nr. 4 und in § 6 angegeben.

2. Projektion eines Vektors auf einen Teilraum. Zwei Vektoren eines euklidischen Raumes R heißen zueinander *orthogonal*, in Zeichen $x \perp y$, wenn ihr skalares Produkt gleich Null ist. Zwei Teilmengen S_1 und S_2 eines euklidischen Raumes R werden zueinander *orthogonal* genannt, wenn jeder Vektor der einen Menge zu jedem Vektor der anderen Menge orthogonal ist. Dafür schreiben wir $S_1 \perp S_2$. Wie man leicht nachprüft, *ist die Gesamtheit aller Vektoren, die zu einer Teilmenge $S \subset R$ orthogonal sind, ein abgeschlossener Teilraum in R.* Dieser Teilraum wird *orthogonales Komplement* von S in R genannt und mit $R - S$ bezeichnet.

I (Die Ungleichung von BEPPO LEVI). *Ist $\mathfrak{M}$ ein Teilraum eines euklidischen Raumes R und x ein Vektor in R, der von $\mathfrak{M}$ den Abstand d hat, so gilt für je zwei Vektoren $y_1, y_2 \in \mathfrak{M}$*

$$|y_1 - y_2| \leqq \sqrt{|x - y_1|^2 - d^2} + \sqrt{|x - y_2|^2 - d^2}. \tag{1}$$

Beweis. Wir setzen $z_1 = x - y_1$ und $z_2 = x - y_2$. Für jedes komplexe $\lambda \neq 1$ gehört dann der Vektor

$$\frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda}$$

zu $\mathfrak{M}$, so daß

$$\left| x - \frac{y_1 - \lambda y_2}{1 - \lambda} \right|^2 \geqq d^2$$

ist, d. h., es gilt

$$|z_1 - \lambda z_2|^2 \geqq d^2 |1 - \lambda|^2, \tag{2}$$

$$[\langle z_1, z_1\rangle - d^2] - \bar{\lambda}[\langle z_1, z_2\rangle - d^2] - \lambda[\langle z_2, z_1\rangle - d^2] + \lambda\bar{\lambda}[\langle z_2, z_2\rangle - d^2] \geqq 0. \tag{3}$$

Offenbar gilt (2) und damit (3) auch für $\lambda = 1$. Wiederholen wir die bereits auf Seite 97 durchgeführte Überlegung, so finden wir

$$|\langle z_1, z_2\rangle - d^2|^2 \leqq [\langle z_1, z_1\rangle - d^2][\langle z_2, z_2\rangle - d^2]. \tag{4}$$

Nun gilt aber

$$\begin{aligned}|y_1 - y_2|^2 = |z_1 - z_2|^2 = \langle z_1 - z_2, z_1 - z_2\rangle = |z_1|^2 + |z_2|^2 - \langle z_1, z_2\rangle - \langle z_2, z_1\rangle \\ = [|z_1|^2 - d^2] + [|z_2|^2 - d^2] - [\langle z_1, z_2\rangle - d^2] - [\langle z_2, z_1\rangle - d^2] \\ \leqq [|z_1|^2 - d^2] + [|z_2|^2 - d^2] + 2|\langle z_1, z_2\rangle - d^2|.\end{aligned}$$

Folglich ist wegen (4)

$$\begin{aligned}|y_1 - y_2|^2 \leqq [|z_1|^2 - d^2] + [|z_2|^2 - d^2] + 2\sqrt{[|z_1|^2 - d^2][|z_2|^2 - d^2]} \\ = \left(\sqrt{|z_1|^2 - d^2} + \sqrt{|z_2|^2 - d^2}\right)^2,\end{aligned}$$

woraus die Ungleichung (1) folgt.

II. *Ist $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum eines* HILBERT*schen Raumes $\mathfrak{H}$ und x ein beliebiger Vektor aus $\mathfrak{H}$, so gibt es in $\mathfrak{H}$ einen und nur einen Vektor x', für den $x - x' \perp \mathfrak{M}$ ist.*

Beweis. Wir setzen

$$d = \inf_{y \in \mathfrak{M}} |x - y|.$$

Dann gibt es eine Folge von Vektoren $y_n \in \mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft

$$d = \lim_{n \to \infty} |x - y_n|. \tag{5}$$

Die Ungleichung von BEPPO LEVI

$$|y_n - y_m| \leqq \sqrt{|x - y_n|^2 - d^2} + \sqrt{|x - y_m|^2 - d^2}$$

zeigt, daß $\{y_n\}$ eine Fundamentalfolge ist und daher einen Limes besitzt, den wir mit x' bezeichnen. Da $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, gehört x' zu $\mathfrak{M}$. Gehen wir in (5) zur Grenze über, so wird $d = |x - x'|$. Um zu zeigen, daß $x - x' \perp \mathfrak{M}$, d. h., daß $\langle x - x', y\rangle = 0$ für alle $y \in \mathfrak{M}$ ist, setzen wir $x - x' = x''$ und

$$t = -\frac{\langle x'', y\rangle}{\langle y, y\rangle}. \tag{6}$$

Da $x' - ty \in \mathfrak{M}$ ist, gilt

$$\begin{aligned}d^2 \leqq |x - (x' - ty)|^2 = |x'' + ty|^2 = \langle x'' + ty, x'' + ty\rangle \\ = \langle x'', x''\rangle + \bar{t}\langle x'', y\rangle + t\langle y, x''\rangle + t\bar{t}\langle y, y\rangle.\end{aligned}$$

Durch Einsetzen von t aus (6) erhalten wir hieraus wegen $\langle x'', x''\rangle = d^2$ die Ungleichung

$$-\frac{|\langle x'', y\rangle|^2}{\langle y, y\rangle} \geqq 0.$$

Folglich ist $\langle x'', y\rangle = 0$.

Es bleibt noch die Eindeutigkeit des Vektors x' zu zeigen.

Angenommen, es gäbe einen weiteren derartigen Vektor $y' \in \mathfrak{M}$ mit $x - y' \perp \mathfrak{M}$. Wir setzen $x - y' = y''$. Dann ist $x' + x'' = y' + y''$ und folglich

$$x' - y' = y'' - x''$$

mit $x' - y' \in \mathfrak{M}$ und $y'' - x'' \perp \mathfrak{M}$. Demnach ist $x' - y'$ zu sich selbst orthogonal, d. h.

$$\langle x' - y', x' - y' \rangle = 0.$$

Folglich muß $x' - y' = 0$, also $x' = y'$ sein.

Der eindeutig bestimmte Vektor $x' \in \mathfrak{M}$, für den $x - x' \perp \mathfrak{M}$ ist, wird die *Projektion des Vektors x auf den Teilraum* $\mathfrak{M}$ genannt.

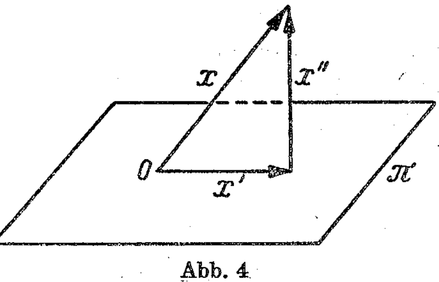


Abb. 4

Die Projektion eines Vektors läßt sich besonders leicht im dreidimensionalen Raum deuten.

Mit $\mathfrak{M}$ werde etwa die Gesamtheit aller der Vektoren bezeichnet, die vom Koordinatenursprung ausgehen und sämtlich in einer Ebene π liegen (Abb. 4). Dann stellt die Formel $x = x' + x''$ gerade die Zerlegung des Vektors x in die beiden Komponenten x' und x'' dar, von denen die eine in π liegt und die andere senkrecht auf π steht.

In diesem Fall stimmt also die Definition der Projektion mit der üblichen Definition der Projektion eines Vektors auf eine Ebene überein.

Offenbar kann Satz II auch folgendermaßen formuliert werden.

II'. *Ist $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum eines* Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}$, so kann jeder Vektor $x \in \mathfrak{H}$ auf genau eine Weise in der Gestalt $x = x' + x''$ mit $x' \in \mathfrak{M}$ und $x'' \in \mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ dargestellt werden.*

Ist insbesondere $x \perp \mathfrak{H} - \mathfrak{M}$, so ist auch $x'' = x - x' \perp \mathfrak{H} - \mathfrak{M}$. Da andererseits $x'' \in \mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ ist, muß $x'' = 0$ und $x = x' \in \mathfrak{M}$ sein; mit anderen Worten:

III. *Ein abgeschlossener Teilraum $\mathfrak{M}$ ist das orthogonale Komplement seines orthogonalen Komplements $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$,*

$$\mathfrak{H} - (\mathfrak{H} - \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}. \tag{7}$$

Wir erwähnen noch nachstehende wichtige Folgerung aus Satz III.

III'. *Ein Teilraum $\mathfrak{M}$ ist dann und nur dann dicht in $\mathfrak{H}$, wenn es in $\mathfrak{H}$ außer dem Nullvektor keinen zu $\mathfrak{M}$ orthogonalen Vektor gibt.*

Beweis. Die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{M}$ ist ein abgeschlossener Teilraum in $\mathfrak{H}$, der genau dann mit $\mathfrak{H}$ übereinstimmt, wenn $\mathfrak{M}$ in $\mathfrak{H}$ dicht ist. Ist $\mathfrak{M}$ also dicht in $\mathfrak{H}$, so ist jeder Vektor x, der orthogonal zu $\mathfrak{M}$ ist, auch orthogonal zu $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{H}$ und daher gleich dem Nullvektor. Umgekehrt gilt: Ist jeder Vektor x, der zu $\mathfrak{M}$ (und damit auch zu $\overline{\mathfrak{M}}$) orthogonal ist, gleich dem Nullvektor, so muß $\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{M}} = \{0\}$ sein, woraus unter Berücksichtigung von (7) folgt, daß $\overline{\mathfrak{M}} = \mathfrak{H} - (\mathfrak{H} - \overline{\mathfrak{M}}) = \mathfrak{H} - \{0\} = \mathfrak{H}$ ist.

3. Beschränkte lineare Funktionale über einem Hilbertschen Raum.

Satz von F. Riesz. *Jedes beschränkte lineare Funktional $f(x)$ über einem* Hilbert*schen Raum $\mathfrak{H}$ läßt sich eindeutig in der Gestalt*

$$f(x) = \langle x, y \rangle \tag{1}$$

darstellen, wobei y ein fester Vektor aus $\mathfrak{H}$ ist. Hierbei gilt

$$|f| = |y|. \tag{2}$$

Umgekehrt wird durch die Formel (1) *für jedes $y \in \mathfrak{H}$ ein beschränktes lineares Funktional über $\mathfrak{H}$ definiert.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit aller Vektoren x, für die $f(x) = 0$ ist. Offenbar ist $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum in $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, so gilt $f(x) = 0$ für alle $x \in \mathfrak{H}$, und (1) wird durch $y = 0$ erfüllt. Es bleibt der Fall $\mathfrak{M} \neq \mathfrak{H}$ zu untersuchen. Nach Satz III aus Nr. 2 ist dann $\mathfrak{H} - \mathfrak{M} \neq \{0\}$, so daß es in $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ einen Vektor $z \neq 0$ gibt. Offenbar ist $f(z) \neq 0$, weil z sonst zu $\mathfrak{M}$ gehören würde. Der Vektor $u = x - \frac{f(x)}{f(z)} z$ liegt in $\mathfrak{M}$, weil

$$f(u) = f(x) - \frac{f(x)}{f(z)} f(z) = 0$$

ist. Folglich gilt $u \perp z$, d. h. $\langle u, z\rangle = 0$, also

$$\langle x, z\rangle - \frac{f(x)}{f(z)} \langle z, z\rangle = 0.$$

Hieraus folgt aber

$$f(x) = \left\langle x, \frac{\overline{f(z)}\, z}{\langle z, z\rangle} \right\rangle,$$

so daß der Vektor $y = \frac{\overline{f(z)}}{\langle z, z\rangle} z$ der Beziehung (1) genügt.

Daß y eindeutig bestimmt ist, erkennt man sofort. Wäre nämlich auch $f(x) = \langle x, y'\rangle$, so würde $\langle x, y - y'\rangle = 0$ für alle $x \in \mathfrak{H}$ sein. Nimmt man insbesondere $x = y - y'$, so hätte man $y - y' = 0$, also $y = y'$.

Es bleibt die Formel (2) zu beweisen. Aus (1) folgt

$$|f(x)| = |\langle x, y\rangle| \leqq |x|\,|y|.$$

Da das Gleichheitszeichen für $x = y$ gilt, ist $|f| = |y|$. Die letzte Aussage des Satzes I ist offenbar trivial (vgl. die letzte Ungleichung).

Der Satz von F. RIESZ besagt, daß eine isometrische Zuordnung $f \longleftrightarrow y$ zwischen den beschränkten linearen Funktionalen f über $\mathfrak{H}$ und den Vektoren $y \in \mathfrak{H}$ existiert. Werden also die Funktionale f mit den sie erzeugenden Vektoren y identifiziert, so wird $\mathfrak{H}' = \mathfrak{H}$, d. h., *der* HILBERT*sche Raum stimmt mit seinem konjugierten Raum überein.*

Eine auf einem Teilraum $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ definierte bilineare Form $\langle x, y\rangle_1$ heißt *beschränkt*, wenn

$$|\langle x, y\rangle_1| \leqq C\,|x|\,|y| \tag{3}$$

ist, wobei C eine Konstante bezeichnet. Dem Satz von F. RIESZ entnehmen wir die

Folgerung. *Jede beschränkte bilineare Form $\langle x, y\rangle_1$, die auf einem in $\mathfrak{H}$ dichten Teilraum $\mathfrak{H}_1$ definiert ist, läßt sich eindeutig als skalares Produkt*

$$\langle x, y\rangle_1 = \langle x, A\,y\rangle, \qquad x, y \in \mathfrak{H}_1, \tag{4}$$

schreiben, wobei A ein beschränkter linearer Operator in $\mathfrak{H}$ mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}$ ist. Demzufolge läßt sich $\langle x, y\rangle_1$ derart zu einer im ganzen Raum $\mathfrak{H}$ definierten beschränkten bilinearen Form fortsetzen, daß die Ungleichung (3) *im ganzen Raum gilt.*

Beweis. Auf Grund der Ungleichung (3) stellt die Form $\langle x, y\rangle_1$ für festes y ein beschränktes lineares Funktional über $\mathfrak{H}_1$ dar. Sie kann folglich auf eindeutige Weise zu einem beschränkten linearen Funktional über $\mathfrak{H}$ fortgesetzt werden (vgl. § 4, Nr. 4, Satz II). Nach dem Satz von F. Riesz gibt es ein $y' \in \mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft, daß $\langle x, y\rangle_1 = \langle x, y'\rangle$ ist. Außerdem gilt hierbei

$$|y'| \leqq C|y|. \tag{5}$$

Wir setzen $y' = Ay$. Der so definierte Operator A ist offenbar linear. Wegen (5) ist er auch beschränkt, wobei $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}_1$ ist. Folglich kann er zu einem beschränkten linearen Operator mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{H}$ fortgesetzt werden, wobei die Ungleichung (5) gültig bleibt. Hierbei gilt

$$\langle x, Ay\rangle = \langle x, y'\rangle = \langle x, y\rangle_1 \quad \text{für alle} \quad x, y \in \mathfrak{H}_1.$$

Die letzte Aussage der Folgerung folgt daraus, daß $\langle x, Ay\rangle$ für alle x und y aus $\mathfrak{H}$ definiert und $|A| \leqq C$ ist.

4. Orthogonalsysteme von Vektoren in einem Hilbertschen Raum. Eine Menge von Vektoren eines Hilbertschen Raumes heißt ein *Orthogonalsystem*, wenn je zwei verschiedene Vektoren dieser Menge zueinander orthogonal sind.

I. *Ist* $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ *ein Orthogonalsystem, so gilt*

$$|x_1 + x_2 + \cdots + x_n|^2 = |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2.$$

Für $j \neq k$ ist nämlich $\langle x_j, x_k\rangle = 0$ und daher

$$\begin{aligned} |x_1 + x_2 + \cdots + x_n|^2 &= \langle x_1 + x_2 + \cdots + x_n, x_1 + x_2 + \cdots + x_n\rangle \\ &= \langle x_1, x_1\rangle + \langle x_2, x_2\rangle + \cdots + \langle x_n, x_n\rangle \\ &= |x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots + |x_n|^2. \end{aligned}$$

II. *Ist* $\{x_n\}$ *ein abzählbares Orthogonalsystem, so konvergiert die Vektorreihe*

$$x_1 + x_2 + x_3 + \cdots \tag{1}$$

genau dann, wenn die Zahlenreihe

$$|x_1|^2 + |x_2|^2 + |x_3|^2 + \cdots \tag{2}$$

konvergiert.

Beweis. Es sei s_n die aus den ersten n Gliedern der Reihe (1) bestehende Summe und σ_n die entsprechende Partialsumme der Reihe (2). Dann gilt nach Satz I

$$\begin{aligned} |s_{n+p} - s_n|^2 &= |x_{n+1} + \cdots + x_{n+p}|^2 \\ &= |x_{n+1}|^2 + \cdots + |x_{n+p}|^2 = \sigma_{n+p} - \sigma_n, \end{aligned}$$

so daß $\{s_n\}$ genau dann eine Fundamentalfolge in $\mathfrak{H}$ ist, wenn $\{\sigma_n\}$ eine Fundamentalfolge von Zahlen ist.

Ein Vektor x heißt *normiert*, falls $|x| = 1$ ist. Ist $x \neq 0$, so ist $y = \frac{x}{|x|}$ normiert. Der Übergang von x zu y wird *Normierung* von x genannt. Ein Orthogonalsystem, dessen sämtliche Vektoren normiert sind, heißt *orthonormiertes System*.

Ist e ein Element eines orthonormierten Systems, so versteht man unter dem FOURIER*koeffizienten* eines Vektors x bezüglich des Elements e das skalare Produkt

$$\alpha = \langle x, e \rangle.$$

III. *Sind $e_1, e_2, \ldots, e_n$ Vektoren eines orthonormierten Systems und sind*

$$\alpha_k = \langle x, e_k \rangle \quad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{3}$$

die entsprechenden FOURIER*koeffizienten, so gilt*

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leqq |x|^2. \tag{4}$$

Beweis. Wir setzen

$$y = x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k.$$

Aus (3) folgt sofort $y \perp e_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Daher bilden die Vektoren $\alpha_1 e_1, \ldots, \alpha_k e_k$ und y zusammen ein Orthogonalsystem. Wegen Satz I ist also

$$|x|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k e_k|^2 + |y|^2 = \sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 + |y|^2,$$

woraus

$$\sum_{k=1}^{n} |\alpha_k|^2 \leqq |x|^2$$

folgt. Die Ungleichung (4) ist die sogenannte BESSEL*sche Ungleichung*. Aus ihr ergibt sich unmittelbar:

IV. *Jeder Vektor x hat höchstens abzählbar viele von Null verschiedene* FOURIER*koeffizienten in bezug auf ein gegebenes orthonormiertes System.*

Ferner gilt

V. *Bilden $e_1, e_2, e_3, \ldots$ ein abzählbares orthonormiertes System in $\mathfrak{H}$ und sind $\alpha_k = \langle x, e_k \rangle$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ die* FOURIER*koeffizienten des Vektors $x \in \mathfrak{H}$, so konvergiert die Reihe*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k \tag{5}$$

in $\mathfrak{H}$, und die Differenz $x - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$ ist zu allen Vektoren $e_1, e_2, \ldots$ orthogonal.

Beweis. Aus Satz II und Formel (4) folgt die Konvergenz der Reihe (5). Weiter ist

$$\langle x - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k e_k, e_p \rangle = 0 \quad \text{für} \quad n > p.$$

Gehen wir in dieser Gleichung zur Grenze über, so erkennen wir unter Berücksichtigung der Stetigkeit des skalaren Produkts (vgl. Nr. 1), daß

$$\langle x - \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, e_p \rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad p = 1, 2, \ldots$$

ist.

Nun sei $\{e_\nu\}$ ein beliebiges orthonormiertes System in $\mathfrak{H}$ (der Index ν durchlaufe eine beliebige Menge). Nach Satz IV gibt es zu jedem $x \in \mathfrak{H}$ im System $\{e_\nu\}$ höchstens abzählbar viele Elemente, für die $\langle x, e_\nu \rangle \neq 0$ ist. Dies seien die Elemente e_{ν_k} $(k = 1, 2, 3, \ldots)$. Wir vereinbaren nun, $\sum_\nu \alpha_\nu e_\nu$ anstelle von $\sum_k \alpha_{\nu_k} e_{\nu_k}$ zu schreiben. Nach Satz V konvergiert diese Reihe, und der Vektor $x - \sum_\nu \alpha_\nu e_\nu$ ist zu allen e_ν orthogonal.

Ein orthonormiertes System heißt *vollständig*, wenn es keinen von Null verschiedenen Vektor gibt, der zu allen Vektoren dieses Systems orthogonal ist. Die Vollständigkeit eines Systems bedeutet demnach, daß es unmöglich ist, dieses System durch Hinzunahme neuer Elemente zu einem umfassenderen orthonormierten System zu ergänzen.

Nach Nr. 2, Satz III, gilt:

VI. *Ein orthonormiertes System ist dann und nur dann vollständig, wenn der von ihm aufgespannte Teilraum in $\mathfrak{H}$ dicht ist.*

VII. *In jedem (vom Nullraum verschiedenen)* HILBERT*schen Raum gibt es ein vollständiges orthonormiertes System.*

Beweis. Wir betrachten alle möglichen orthonormierten Systeme aus $\mathfrak{H}$. Im Fall $\mathfrak{H} \neq \{0\}$ gibt es sicher derartige Systeme; man braucht etwa nur an die aus einem einzigen normierten Element bestehenden Systeme zu denken. Nun seien $\{e_\nu\}$ und $\{e'_\mu\}$ zwei derartige Systeme. Wir schreiben $\{e_\nu\} \prec \{e'_\mu\}$, wenn jedes e_ν zugleich ein e'_μ ist. Auf diese Weise wird die Gesamtheit aller orthogonalen Systeme aus $\mathfrak{H}$ zu einer halbgeordneten Menge, die den Voraussetzungen des ZORNschen Lemmas genügt (vgl. hierzu Anhang I); die obere Grenze einer linear geordneten Menge von orthonormierten Systemen ist nämlich das orthonormierte System, welches man durch Vereinigung aller orthonormierten Systeme dieser Menge erhält. Aus dem ZORNschen Lemma folgt aber, daß es in $\mathfrak{H}$ ein maximales orthonormiertes System gibt. Dieses System ist in $\mathfrak{H}$ sicher vollständig.

Bemerkung. Im Fall eines separablen HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}$ kann die Anwendung des ZORNschen Lemmas vermieden werden. Um dies einzusehen, betrachten wir eine Folge $\{x_n\}$, die in $\mathfrak{H}$ dicht ist. Aus dieser Folge streichen wir jeden Vektor x_n, der sich als Linearkombination der vorangehenden Vektoren $x_1, \ldots, x_{n-1}$ darstellen läßt. Wir erhalten dann eine neue endliche oder unendliche Folge $\{y_n\}$, in der kein Vektor linear durch die vorhergehenden Vektoren ausgedrückt werden kann. Ihre lineare Hülle enthält die Folge $\{x_n\}$ und ist demnach in $\mathfrak{H}$ dicht.

Es sei $\mathfrak{M}_n$ der von den Vektoren $y_1, y_2, \ldots, y_n$ aufgespannte Teilraum. Mit y'_{n+1} bezeichnen wir die Projektion von y_{n+1} auf $\mathfrak{M}_n$. Ferner setzen wir[1])

$$e_1 = \frac{1}{|y_1|} y_1, \quad e_{n+1} = \frac{1}{|y_{n+1} - y'_{n+1}|}(y_{n+1} - y'_{n+1}), \quad n = 1, 2, \ldots. \tag{6}$$

Dann bilden die Vektoren $\{e_n\}$ ein endliches oder abzählbares orthonormiertes System, dessen lineare Hülle mit der linearen Hülle des Systems $\{y_n\}$ übereinstimmt und daher in $\mathfrak{H}$ dicht ist. Folglich ist das System $\{e_n\}$ nach Satz VI in $\mathfrak{H}$ vollständig. Gleichzeitig haben wir die folgende Aussage bewiesen:

VIII. *In einem separablen* HILBERT*schen Raum gibt es stets ein höchstens abzählbares vollständiges orthonormiertes System.*

Offenbar gilt auch die Umkehrung, d. h.:

Gibt es in einem HILBERT*schen Raum $\mathfrak{H}$ ein höchstens abzählbares vollständiges orthonormiertes System $\{e_n\}$, so ist $\mathfrak{H}$ separabel.* Die endlichen Linearkombinationen der Vektoren $\{e_n\}$ mit rationalen Koeffizienten bilden nämlich eine abzählbare Menge, die in $\mathfrak{H}$ dicht ist.

IX. *Für ein orthonormiertes System $\{e_\nu\}$ aus $\mathfrak{H}$ sind folgende Aussagen äquivalent:*

1. *$\{e_\nu\}$ ist in $\mathfrak{H}$ vollständig;*
2. *jeder Vektor $x \in \mathfrak{H}$ läßt sich in der Gestalt*

$$x = \sum_\nu \alpha_\nu e_\nu \tag{7}$$

mit $\alpha_\nu = \langle x, e_\nu \rangle$ darstellen;

3. *für jeden Vektor $x \in \mathfrak{H}$ ist*

$$|x|^2 = \sum_\nu |\alpha_\nu|^2; \tag{8}$$

4. *für je zwei Vektoren $x, y \in \mathfrak{H}$ ist*

$$\langle x, y \rangle = \sum_\nu \alpha_\nu \bar{\beta}_\nu, \quad \alpha_\nu = \langle x, e_\nu \rangle, \quad \beta_\nu = \langle y, e_\nu \rangle. \tag{9}$$

Beweis. Das System $\{e_\nu\}$ sei vollständig. Wie oben bewiesen wurde (vgl. den Beweis von Satz V), ist der Vektor $x - \sum_\nu \alpha_\nu e_\nu$ zu allen e_ν orthogonal und daher gleich Null. Aus der Aussage 1 folgt also die Aussage 2. Es gelte nun die Aussage 2. Wir multiplizieren die Gleichung (7) skalar mit y. Unter Berück-

[1]) Die Konstruktion der Vektoren e_n nach den Formeln (6) ist als SCHMIDT*sches Orthogonalisierungsverfahren* bekannt. Wir überlassen dem Leser den Beweis der Formeln

$$e_n = \frac{1}{\sqrt{D_{n-1} D_n}} \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_2, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_1 \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y_1, y_{n-1} \rangle & \langle y_2, y_{n-1} \rangle & \cdots & \langle y_n, y_{n-1} \rangle \end{vmatrix}$$

mit

$$D_n = \begin{vmatrix} \langle y_1, y_1 \rangle & \langle y_2, y_1 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_1 \rangle \\ \langle y_1, y_2 \rangle & \langle y_2, y_2 \rangle & \cdots & \langle y_n, y_2 \rangle \\ \cdot & \cdot & \cdots & \cdot \\ \langle y_1, y_n \rangle & \langle y_2, y_n \rangle & \cdots & \langle y_n, y_n \rangle \end{vmatrix}.$$

sichtigung der Stetigkeit des skalaren Produkts erhalten wir dann die Beziehung (9), d. h., aus der Aussage 2 folgt die Aussage 4.

Die Aussage 4 sei richtig. Wird in (9) einfach $y = x$ gesetzt, so entsteht die Beziehung (8), d. h., aus (4) folgt (3). Schließlich gelte die Aussage 3. Es sei x ein Vektor, der zu allen e_ν orthogonal ist. Dann ist $\alpha_\nu = 0$ für alle ν und folglich wegen $|x|^2 = 0$ auch $x = 0$. Der Nullvektor ist somit der einzige Vektor, der zu allen e_ν orthogonal ist, d. h., $\{e_\nu\}$ ist vollständig. Aus der Aussage 3 folgt also die Aussage 1, womit Satz IX vollständig bewiesen ist.

X. *Alle vollständigen orthonormierten Systeme eines* HILBERT*schen Raumes haben dieselbe Mächtigkeit.*

Beweis. In einem Raum endlicher Dimension stellt ein vollständiges orthonormiertes System eine Basis dieses Raumes dar, so daß die Anzahl der Systemvektoren gleich der Dimension des Raumes ist. Wir können uns daher im folgenden auf HILBERTsche Räume $\mathfrak{H}$ beschränken, die nicht endlichdimensional sind.

Es seien $\{e_\nu\}$ und $\{e'_\mu\}$ zwei vollständige orthonormierte Systeme in $\mathfrak{H}$ und a bzw. b ihre Mächtigkeiten. Bei festem ν ist das skalare Produkt $\langle e_\nu, e'_\mu\rangle$ für wenigstens ein μ von Null verschieden (weil $\{e'_\mu\}$ vollständig ist). Andererseits gibt es nach Satz IV höchstens abzählbar viele derartige μ. Wir ordnen nun jedem e_ν diejenigen e'_μ zu, für die $\langle e_\nu, e'_\mu\rangle \neq 0$ ist. Diese Zuordnung stellt dann eine Abbildung von $\{e_\nu\}$ auf $\{e'_\mu\}$ dar, die mindestens eindeutig und höchstens abzählbar mehrdeutig ist. Folglich ist $a \geqq b$. Aus Symmetriegründen folgt $a \leqq b$, so daß $a = b$ ist.

Die Mächtigkeit eines vollständigen orthonormierten Systems aus $\mathfrak{H}$ heißt die *Dimension* von $\mathfrak{H}$ und wird mit dim $\mathfrak{H}$ bezeichnet.

Ein Operator A von einem HILBERTschen Raum $\mathfrak{H}_1$ in einen HILBERTschen Raum $\mathfrak{H}_2$ wird *isometrisch* genannt, wenn er das skalare Produkt invariant läßt, d. h., wenn $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$ für alle $x, y \in \mathfrak{D}_A$ ist. Ein isometrischer Operator in $\mathfrak{H}$ heißt *unitär*, wenn $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{R}_A = \mathfrak{H}$ ist. Man spricht von *isometrischen* HILBERTschen Räumen $\mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{H}_2$, wenn es einen isometrischen Operator A gibt, für den $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}_1$ und $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{H}_2$ ist. In diesem Fall sagt man, A vermittle eine *isometrische Abbildung von* $\mathfrak{H}_1$ *auf* $\mathfrak{H}_2$.[1])

Vom Standpunkt der abstrakten Theorie der HILBERTschen Räume werden zwei isometrische HILBERTsche Räume als nicht wesentlich verschieden angesehen.

XI. HILBERT*sche Räume sind dann und nur dann isometrisch, wenn sie dieselbe Dimension haben.*

---

[1]) Der früher für metrische Räume erklärte Begriff der Isometrie ist für den HILBERTschen Raum mit dem hier definierten Isometriebegriff äquivalent, da sich das innere Produkt durch die Norm ausdrücken läßt:

$$\langle x, y\rangle = \frac{1}{4}\left(\|x+y\|^2 - \|x-y\|^2 + i\|x+iy\|^2 - i\|x-iy\|^2\right).$$

Die Invarianz der Entfernung und damit der Norm zieht aber auch die Invarianz des Skalarprodukts nach sich. — *Anm. d. Red.*

Beweis. Natürlich ist die Bedingung notwendig. Um zu erkennen, daß sie überdies auch hinreichend ist, nehmen wir zwei Hilbertsche Räume $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$ gleicher Dimension. Es seien $\{e'_\nu\}$ und $\{e''_\mu\}$ vollständige orthonormierte Systeme aus $\mathfrak{H}'$ bzw. $\mathfrak{H}''$. Nach Voraussetzung haben diese Systeme die gleiche Mächtigkeit, so daß für beide Systeme dieselbe Indexmenge genommen werden darf. Jedem Vektor $f' = \sum_\nu \alpha_\nu e'_\nu$ aus $\mathfrak{H}'$ ordnen wir den mit denselben Fourierkoeffizienten gebildeten Vektor $f'' = \sum_\nu \alpha_\nu e''_\nu$ aus $\mathfrak{H}''$ zu. Nach Satz II und den Formeln (8) und (9) stellt diese Zuordnung eine isometrische Abbildung des Raumes $\mathfrak{H}'$ auf den ganzen Raum $\mathfrak{H}''$ dar. Demzufolge sind $\mathfrak{H}'$ und $\mathfrak{H}''$ tatsächlich isometrisch.

Beispiel. Es sei $\{\nu\}$ eine Menge der Mächtigkeit $\mathfrak{a}$. Wir betrachten alle möglichen Zahlenfunktionen $x = \{x_\nu\}$, $\nu \in \{\nu\}$, mit folgenden Eigenschaften:

1. Nur abzählbar viele Elemente x_ν sind von Null verschieden;
2. die Reihe $\sum_\nu |x_\nu|^2$ konvergiert.

Die Gesamtheit dieser Funktionen $x = \{x_\nu\}$ werde mit $l^2_{\mathfrak{a}}$ bezeichnet. Mit Hilfe der Formeln

$$\alpha x = \{\alpha x_\nu\}, \quad x + y = \{x_\nu + y_\nu\}, \quad \langle x, y\rangle = \sum_\nu x_\nu \bar{y}_\nu$$

definieren wir eine Multiplikation von Elementen $l^2_{\mathfrak{a}}$ mit Zahlen sowie Addition und skalare Multiplikation von Elementen aus $l^2_{\mathfrak{a}}$ miteinander. Durch Wiederholen der üblichen Überlegungen (vgl. das Beispiel aus Nr. 1) kann man zeigen, daß $l^2_{\mathfrak{a}}$ ein Hilbertscher Raum ist. Ein vollständiges orthonormiertes System von $l^2_{\mathfrak{a}}$ ergibt sich ganz einfach dadurch, daß $e_{\nu_0} = \{\delta_{\nu\nu_0}\}$, $\delta_{\nu\nu_0} = 0$ für $\nu \neq \nu_0$ und $\delta_{\nu_0\nu_0} = 1$, gesetzt wird. Dieses System hat die Mächtigkeit $\mathfrak{a}$, so daß $l^2_{\mathfrak{a}}$ ein Hilbertscher Raum der Dimension $\mathfrak{a}$ ist.

Dieses Beispiel zeigt: *Es gibt Hilbertsche Räume beliebiger Dimension.*

5. Orthogonale Summe von Teilräumen. Mit $\mathfrak{M}_\nu$ bezeichnen wir irgendwelche abgeschlossenen, zueinander orthogonalen Teilräume eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$. Unter der *orthogonalen Summe* der Teilräume $\mathfrak{M}_\nu$ wird der kleinste abgeschlossene Teilraum verstanden, der sämtliche $\mathfrak{M}_\nu$ enthält. Wir bezeichnen ihn mit $\sum_\nu \oplus \mathfrak{M}_\nu$. Liegen endlich oder abzählbar viele Teilräume vor, etwa $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ oder $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$, so sind auch die Bezeichnungen

$$\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n$$

bzw.

$$\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \cdots$$

üblich.

Wir fragen jetzt, aus welchen Vektoren die orthogonale Summe besteht.

I. *Die orthogonale Summe $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n$ von endlich vielen Teilräumen ist die Gesamtheit aller Vektoren*

$$x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n, \quad x_k \in \mathfrak{M}_k.$$

Beweis. Jeder dieser Vektoren gehört sicher zu $\mathfrak{M}$. Umgekehrt sei x ein Vektor aus $\mathfrak{M}$. Es bezeichne x_k die Projektion von x auf $\mathfrak{M}_k$. Dann gehört der Vektor $x - (x_1 + \cdots + x_n)$ einerseits zu $\mathfrak{M}$, andererseits ist er zu jedem $\mathfrak{M}_k$

und daher auch zu $\mathfrak{M}$ orthogonal; denn dieser Vektor kann als Summe

$$(x - x_k) + (-x_1) + \cdots + (-x_{k-1}) + (-x_{k+1}) + \cdots + (-x_n)$$

dargestellt werden, in der jeder Summand zu $\mathfrak{M}_k$ orthogonal ist. Folglich ist dieser Vektor gleich dem Nullvektor, d. h., es ist $x = x_1 + \cdots + x_n$.

II. *Die orthogonale Summe* $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \cdots$ *von abzählbar vielen Teilräumen ist die Gesamtheit aller Vektoren*

$$x = x_1 + x_2 + x_3 + \cdots, \qquad x_k \in \mathfrak{M}_k,$$

wobei die Reihe konvergiert.

Beweis. Jeder dieser Vektoren gehört sicher zu $\mathfrak{M}$. Umgekehrt sei x ein Vektor aus $\mathfrak{M}$ und x' die Projektion von x auf $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n$; nach Satz I ist $x' = x_1 + \cdots + x_n$ mit $x_k \in \mathfrak{M}_k$. Hieraus folgt

$$|x_1 + \cdots + x_n|^2 = |x'|^2 \leqq |x|^2;$$

also ist

$$|x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 \leqq |x|^2.$$

Demzufolge konvergiert die Reihe $|x_1|^2 + |x_2|^2 + \cdots$, also auch die Reihe $x_1 + x_2 + \cdots$. Die Differenz $x - (x_1 + x_2 + \cdots)$ gehört zu $\mathfrak{M}$ und ist orthogonal zu jedem $\mathfrak{M}_k$, also auch zu $\mathfrak{M}$, so daß sie den Nullvektor darstellt.

III. *Die orthogonale Summe* $\mathfrak{M} = \sum_\nu \oplus \mathfrak{M}_\nu$ *von beliebig vielen Teilräumen ist die Gesamtheit aller Vektoren* $x = \sum_\nu x_\nu$, *wobei*

1. $x_\nu \in \mathfrak{M}_\nu$;
2. x_ν *nur für höchstens abzählbar unendlich viele* ν *von Null verschieden ist;*
3. $\sum_\nu x_\nu$ *konvergiert.*

Beweis. Offenbar gehört jeder dieser Vektoren zu $\mathfrak{M}$. Umgekehrt sei x ein Vektor aus $\mathfrak{M}$. Dann ist x Limes endlicher Linearkombinationen von Vektoren aus den $\mathfrak{M}_\nu$. Daher gehört x zu der orthogonalen Summe von abzählbar vielen Teilräumen $\mathfrak{M}_\nu$, so daß man nur Satz II anzuwenden braucht.

Sind $x = \sum_\nu x_\nu$ und $y = \sum_\nu y_\nu$ Vektoren aus $\mathfrak{M} = \sum_\nu \oplus \mathfrak{M}_\nu$, so ist offenbar

$$\alpha x = \sum_\nu \alpha x_\nu, \quad x + y = \sum_\nu (x_\nu + y_\nu), \quad \langle x, y\rangle = \sum_\nu \langle x_\nu, y_\nu\rangle.$$

6. Die direkte Summe von Hilbertschen Räumen. Wir definieren zunächst die direkte Summe von endlich vielen HILBERTschen Räumen. Gegeben seien die HILBERTschen Räume $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$. Mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{H}_n$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Systeme $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, $x_k \in \mathfrak{H}_k$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Durch

$$x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\},$$

$$\alpha x = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots, \alpha x_n\}, \quad \langle x, y\rangle = \langle x_1, y_1\rangle + \langle x_2, y_2\rangle + \cdots + \langle x_n, y_n\rangle$$

$(x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$ und $y = \{y_1, y_2, \ldots, y_n\})$ werden in $\mathfrak{H}$ eine Addition, eine Multiplikation mit einer Zahl und eine skalare Multiplikation definiert. Wie

man leicht zeigt, wird $\mathfrak{H}$ mit diesen Operationen zu einem HILBERTschen Raum. Dieser Raum wird die *direkte Summe* der Räume $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ genannt.

Nun seien abzählbar viele HILBERTsche Räume $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \ldots$ gegeben. Mit $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_3 \oplus \cdots$ werde die Gesamtheit aller abzählbaren Systeme $x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$, $x_k \in \mathfrak{H}_k$, bezeichnet, welche die Eigenschaft haben, daß $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2 < \infty$ ist. Durch

$$x + y = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots\},$$

$$\alpha x = \{\alpha x_1, \alpha x_2, \ldots\}, \quad \langle x, y\rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle x_k, y_k\rangle,$$

wobei $x = \{x_1, x_2, \ldots\} \in \mathfrak{H}$ und $y = \{y_1, y_2, \ldots\} \in \mathfrak{H}$, definieren wir in $\mathfrak{H}$ eine Summe von Vektoren, das Produkt eines Vektors mit einer Zahl und das skalare Produkt von Vektoren. Mit diesen Operationen wird $\mathfrak{H}$ zu einem HILBERTschen Raum, der sogenannten *direkten Summe* der Räume $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \mathfrak{H}_3, \ldots$.

Wir gehen jetzt zum Fall beliebig vieler HILBERTscher Räume über. Insbesondere darf es sich also um überabzählbar viele Räume handeln. Jedem dieser Räume wird ein Index ν zugeordnet und die Gesamtheit dieser ν, die Indexmenge, mit $\mathfrak{N}$ bezeichnet. Ordnen wir jedem ν ein Element x_ν des entsprechenden Raumes $\mathfrak{H}_\nu$ zu, so erhalten wir einen gewissen Komplex $x = \{x_\nu\}$.

Es sei nun $\mathfrak{H}$ die Gesamtheit aller dieser Komplexe $\{x_\nu\}$, die folgenden Bedingungen genügen:

1. In $\{x_\nu\}$ gibt es höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Elemente;
2. die Reihe $\sum |x_\nu|^2$ konvergiert.

Setzen wir schließlich für zwei Elemente $x = \{x_\nu\}$ und $y = \{y_\nu\}$ aus $\mathfrak{H}$

$$x + y = \{x_\nu + y_\nu\}, \quad \alpha x = \{\alpha x_\nu\}, \quad \langle x, y\rangle = \sum_\nu \langle x_\nu, y_\nu\rangle,$$

so wird $\mathfrak{H}$ zu einem HILBERTschen Raum, welcher *direkte Summe* der Räume $\mathfrak{H}_\nu$ genannt und mit $\sum_\nu \oplus \mathfrak{H}_\nu$ bezeichnet wird.

Die Elemente x_{ν_0} eines bei der Bildung der direkten Summe beteiligten Raumes $\mathfrak{H}_{\nu_0}$ können mit denjenigen Komplexen $x = \{x_\nu\}$ identifiziert werden, in welchen $x_\nu = 0$ für $\nu \neq \nu_0$ ist. Dann ist $\mathfrak{H}_{\nu_0}$ Teilraum des Raumes $\mathfrak{H} = \sum_\nu \oplus \mathfrak{H}_\nu$. Verfährt man so für alle $\nu \in \mathfrak{N}$, so wird $\mathfrak{H}$ zur orthogonalen Summe seiner Teilräume $\mathfrak{H}_\nu$.

Natürlich können einige der Räume $\mathfrak{H}_\nu$ oder auch alle miteinander übereinstimmen; so ist etwa $\mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H}$ die aus allen Paaren $\{x_1, x_2\}$, $x_1 \in \mathfrak{H}$ und $x_2 \in \mathfrak{H}$, bestehende Gesamtheit.

7. Der Graph eines Operators. Es sei A ein beliebiger Operator von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$. Die Gesamtheit $\mathfrak{B}_A$ aller Paare $\{x, Ax\}$, $x \in \mathfrak{D}_A$, aus der direkten Summe $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ heißt *Graph des Operators A*.

Der Begriff des Graphen eines Operators ist die naturgemäße Verallgemeinerung des gewöhnlichen Begriffes der graphischen Darstellung einer Funktion $y = f(x)$ einer reellen

Veränderlichen. Die gewöhnliche graphische Darstellung ist ja nichts anderes als die Gesamtheit aller Punkte $(x, f(x))$ der Ebene, die als direkte Summe von zwei eindimensionalen Räumen angesehen werden kann.

Offenbar stimmen zwei Operatoren genau dann miteinander überein, wenn ihre Graphen übereinstimmen.

Eine Menge $S \subset \mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ ist dann und nur dann Graph eines Operators, wenn aus $\{x, y\} \in S$ und $\{x, y'\} \in S$ folgt, daß $y = y'$ ist.

Selbstverständlich genügt jeder Graph dieser Bedingung, weil $y = Ax$ ist; ist die Bedingung erfüllt, so wird umgekehrt durch die Gleichung $y = Ax$ ein Operator A definiert, dessen Graph dann gerade durch S gegeben wird. Wie man leicht erkennt, *ist der Operator A dann und nur dann linear, wenn sein Graph $\mathfrak{B}_A$ ein Teilraum von $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ ist.*

8. Abgeschlossene Operatoren. Abschließung eines Operators. Ein Operator A von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$ heißt *abgeschlossen*, wenn sein Graph $\mathfrak{B}_A$ in $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ abgeschlossen ist.

Die Abgeschlossenheit eines Operators bedeutet demnach, daß aus den Beziehungen

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \quad \{x_n, Ax_n\} \to \{x, y\}$$

die Beziehung $\{x, y\} \in \mathfrak{B}_A$ folgt, also $x \in \mathfrak{D}_A$ und $y = Ax$. Mit anderen Worten: Ist A ein abgeschlossener Operator, so folgt aus

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \quad x_n \to x, \quad Ax_n \to y$$

stets

$$x \in \mathfrak{D}_A \quad \text{und} \quad y = Ax.$$

I. *Jeder beschränkte lineare Operator, der im ganzen Raum $\mathfrak{H}$ definiert ist, ist abgeschlossen.*

Ein derart beschaffener Operator ist nämlich stetig; daher folgt aus $x_n \to x$ stets $Ax_n \to Ax$.[1] Demzufolge ist $Ax = y$ für $Ax_n \to y$.

Der Leser erkennt genau so leicht die Gültigkeit folgender Behauptungen:

II. *Ist A ein abgeschlossener Operator, so ist der Operator $A - \lambda 1$ ebenfalls abgeschlossen.*

III. *Ist der Operator A abgeschlossen und existiert der inverse Operator A^{-1}, so ist A^{-1} ebenfalls abgeschlossen.*

Ist A ein nicht abgeschlossener Operator, so ist nach Definition sein Graph $\mathfrak{B}_A$ in $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ nicht abgeschlossen. Unter gewissen Bedingungen tritt der Fall ein, daß die abgeschlossene Hülle $\overline{\mathfrak{B}_A}$ der Menge $\mathfrak{B}_A$ in $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ ebenfalls Graph eines Operators ist. Dieser Operator wird dann *Abschließung* des Operators A genannt. Wir bezeichnen ihn mit $\tilde{A}$. In diesem Fall sagen wir, der Operator A *läßt sich abschließen.* Nach Definition gilt somit

$$\mathfrak{B}_{\tilde{A}} = \overline{\mathfrak{B}_A}.$$

[1]) Hierin besteht der Unterschied zwischen der Stetigkeit und der Abgeschlossenheit. Ist der Operator A abgeschlossen, so folgt nämlich aus $x_n \to x$, $x_n \in \mathfrak{D}_A$, im allgemeinen nicht, daß Ax_n konvergiert.

Offenbar stellt $\tilde{A}$ die minimale abgeschlossene Fortsetzung von A dar. Es läßt sich leicht eine Bedingung für die Existenz der Abschließung aufstellen, ohne daß der Begriff des Graphen herangezogen wird. Die Menge $\overline{\mathfrak{B}_A}$, welche Graph eines Operators sein soll, besteht aus den Elementen der Gestalt $\{x, Ax\}$, $x \in \mathfrak{D}_A$, und deren Limites. Daher gilt:

IV. *Ein Operator A läßt sich genau dann abschließen, wenn aus*

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \ x'_n \in \mathfrak{D}_A, \quad x_n \to x, \ x'_n \to x, \quad A x_n \to y, \ A x'_n \to y'$$

folgt, daß $y = y'$ ist. In diesem Fall besteht der Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ der Abschließung $\tilde{A}$ genau aus den Vektoren x, für die eine Folge von Elementen $x_n \in \mathfrak{D}_A$ existiert, die folgenden Bedingungen genügt:

1. $x_n \to x$;
2. $A x_n$ *konvergiert.*

Hierbei ist

$$\tilde{A} x = \lim_{n \to \infty} A x_n.$$

Ist A linear, so läßt sich die soeben formulierte Bedingung offenbar etwas abschwächen; es braucht dann nämlich nur gefordert zu werden, daß aus

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \ x_n \to 0, \ A x_n \to y$$

stets $y = 0$ folgt.

9. Der adjungierte Operator. Wir betrachten einen beliebigen Operator A von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$, dessen Definitionsbereich in $\mathfrak{H}_1$ dicht ist. Es kann der Fall eintreten, daß für gewisse $y \in \mathfrak{H}_2$ eine Darstellung der Gestalt

$$\langle A x, y \rangle = \langle x, z \rangle$$

für alle $x \in \mathfrak{D}_A$ gilt.[1]) Es sei nun $\mathfrak{D}^*$ die Gesamtheit aller dieser Vektoren y. Durch

$$A^* y = z$$

definieren wir einen Operator A^* von $\mathfrak{H}_2$ in $\mathfrak{H}_1$, dessen Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{A^*}$ gerade $\mathfrak{D}^*$ ist, $\mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{D}^*$. Dieser Operator A^* werde der *zu A adjungierte* Operator genannt. Der Vektor z ist durch den Vektor y eindeutig festgelegt. Wäre nämlich auch

$$\langle A x, y \rangle = \langle x, z' \rangle,$$

so müßte $\langle x, z - z' \rangle = 0$ sein, d. h., der Vektor $z - z'$ wäre zum Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$ von A orthogonal. Da aber $\mathfrak{D}_A$ in $\mathfrak{H}_1$ dicht sein soll, ist dies nur dann möglich, wenn $z - z' = 0$, also $z = z'$ ist.

Wir sehen hier, daß die Annahme, $\mathfrak{D}_A$ sei dicht in $\mathfrak{H}_1$, wesentlich ist. Anderenfalls wäre der adjungierte Operator nicht eindeutig bestimmt.

Der adjungierte Operator ist stets linear.

I. *Existiert der zu A inverse Operator A^{-1} und sind $\mathfrak{D}_A$ und $\mathfrak{D}_{A^{-1}}$ dicht in $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$, so gilt*

$$(A^{-1})^* = A^{*-1}. \tag{1}$$

[1]) Dies ist nach dem Satz von F. RIESZ genau dann der Fall, wenn $\langle Ax, y \rangle = f_y(x)$ eine beschränkte Linearform in $\mathfrak{D}_A$ ist. — *Anm. d. Red.*

Beweis. Für $x \in \mathfrak{D}_A$ und $y \in \mathfrak{D}_{(A^{-1})^*}$ ist

$$\langle x, y\rangle = \langle A^{-1}Ax, y\rangle = \langle Ax, (A^{-1})^* y\rangle,$$

also

$$(A^{-1})^* y \in \mathfrak{D}_{A^*}$$

und

$$A^*(A^{-1})^* y = y. \tag{2}$$

Andererseits ist für $x \in \mathfrak{D}_{A^{-1}}$ und $y \in \mathfrak{D}_{A^*}$

$$\langle x, y\rangle = \langle AA^{-1}x, y\rangle = \langle A^{-1}x, A^* y\rangle,$$

also

$$A^* y \in \mathfrak{D}_{(A^{-1})^*} \quad \text{und} \quad (A^{-1})^* A^* y = y. \tag{3}$$

Die Gleichungen (2) und (3) bedeuten aber zusammen, daß $(A^{-1})^*$ der zu A^* inverse Operator ist, d. h., die Formel (1) ist richtig.

Der Leser bestätigt sofort auch die anschließend genannten Eigenschaften des adjungierten Operators (hierbei ist vorauszusetzen, daß die Definitionsbereiche aller genannten Operatoren in $\mathfrak{H}_1$ dicht sind; A und B sollen Operatoren von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$ sein):

a) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$;

b) aus $A \subset B$ folgt $A^* \supset B^*$;

c) $(A + B)^* \supset A^* + B^*$.

Ferner gilt, wenn A und B Operatoren in $\mathfrak{H}$ sind,

d) $(AB)^* \supset B^* A^*$;

e) $(A + \lambda 1)^* = A^* + \bar{\lambda} 1$.

Der adjungierte Operator kann auch mit Hilfe eines Graphen beschrieben werden. Wir definieren durch

$$U_1\{x, y\} = \{iy, -ix\}$$

einen Operator U_1 von $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ in $\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$. Offenbar bildet U_1 den Raum $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ isometrisch auf $\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$ ab. Entsprechend definieren wir einen Operator U_2, der $\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$ isometrisch auf $\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2$ abbildet, durch

$$U_2\{y, x\} = \{ix, -iy\}.$$

Wie man leicht sieht, ist

$$U_2 U_1 = 1. \tag{4}$$

Wir wenden nun auf sämtliche Vektoren des Graphen $\mathfrak{B}_A$ den Operator U_1 an. Dadurch erhalten wir die Menge aller Paare $\{iAx, -ix\}$, $x \in \mathfrak{D}_A$. Diese Menge werde mit $\mathfrak{B}'_A$ bezeichnet. Dann ist

$$\mathfrak{B}_{A^*} = (\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1) - \mathfrak{B}'_A, \tag{5}$$

d. h., *der Graph des adjungierten Operators A^* ist das orthogonale Komplement der Menge $\mathfrak{B}'_A$ in $\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$*. Dies besteht nämlich aus genau den Paaren $\{y, z\}$, die den Bedingungen

$$\langle \{iAx, -ix\}, \{y, z\}\rangle = 0$$

für alle $x \in \mathfrak{D}_A$ genügen. Diese Bedingung ist nun aber mit der Bedingung

$$\langle Ax, y\rangle - \langle x, z\rangle = 0$$

gleichwertig, aus der sich

$$y \in \mathfrak{D}_{A^*}, \quad z = A^* y, \quad \{y, z\} \in \mathfrak{B}_{A^*}$$

ergibt.

Da das orthogonale Komplement ein abgeschlossener Teilraum ist, folgt aus (5), daß A^* *stets ein abgeschlossener linearer Operator ist.* Wir werden nun den folgenden wichtigen Satz beweisen.

II (J. v. NEUMANN [2]). *Läßt sich der lineare Operator A, dessen Definitionsbereich dicht ist, zu $\tilde{A}$ abschließen, so gilt*

$$\tilde{A}^* = A^* \tag{6}$$

und

$$A^{**} = \tilde{A}.$$

Ist A abgeschlossen, so gilt also

$$A^{**} = A.$$

Beweis. Da $\mathfrak{B}_{\tilde{A}} = \overline{\mathfrak{B}_A}$ ist, muß $\mathfrak{B}'_{\tilde{A}} = U_1 \overline{\mathfrak{B}_A} = \overline{U_1 \mathfrak{B}_A} = \overline{\mathfrak{B}'_A}$ sein. Dann ist

$$\mathfrak{B}_{\tilde{A}^*} = (\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1) - \mathfrak{B}'_{\tilde{A}} = (\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1) - \mathfrak{B}'_A = \mathfrak{B}_{A^*}.$$

Hieraus folgt (6). Aus (5) entnehmen wir weiter, daß

$$\overline{\mathfrak{B}'_A} = (\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1) - \mathfrak{B}_{A^*}$$

ist. Wir wenden nun auf alle Vektoren der linken und der rechten Seite dieser Beziehung den Operator U_2 an. Wegen (4) bildet er $\overline{\mathfrak{B}'_A}$ auf $\overline{\mathfrak{B}_A}$ ab, außerdem $\mathfrak{B}_{A^*}$ auf $\mathfrak{B}'_{A^*}$, also $(\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1) - \mathfrak{B}_{A^*}$ auf $(\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2) - \mathfrak{B}'_{A^*}$. Folglich ist

$$\overline{\mathfrak{B}_A} = (\mathfrak{H}_1 \oplus \mathfrak{H}_2) - \mathfrak{B}'_{A^*}.$$

Diese Beziehung bedeutet, daß $\overline{\mathfrak{B}_A}$ der Graph von A^{**} ist. Andererseits stellt $\overline{\mathfrak{B}_A}$ als abgeschlossene Hülle der Menge $\mathfrak{B}_A$ den Graph des Operators $\tilde{A}$ dar. Folglich ist $A^{**} = \tilde{A}$. Ist A abgeschlossen, so ist $\tilde{A} = A$ und $A^{**} = A$.

Ein Operator A in einem HILBERTschen Raum heißt *hermitesch*, wenn $\langle Ax, y\rangle = \langle x, Ay\rangle$ für alle $x, y \in \mathfrak{D}_A$ ist (A braucht nicht linear zu sein).

Ein hermitescher Operator, dessen Definitionsbereich in $\mathfrak{H}$ dicht ist, wird *symmetrisch* genannt. Offenbar ist ein Operator A in $\mathfrak{H}$, dessen Definitionsbereich in $\mathfrak{H}$ dicht ist, genau dann symmetrisch, wenn

$$A \subset A^* \tag{7}$$

ist.

Da der adjungierte Operator linear und abgeschlossen ist, können wir aus (7) schließen, daß *sich ein symmetrischer Operator A abschließen läßt und linear ist, wenn $\mathfrak{D}_A$ ein Teilraum ist.*

Ein Operator A in $\mathfrak{H}$ mit in $\mathfrak{H}$ dichtem Definitionsbereich heißt *selbstadjungiert*, wenn $A = A^*$ ist.

Aus dieser Definition folgt unmittelbar, daß *ein selbstadjungierter Operator abgeschlossen ist.* Außerdem erhalten wir aus den Beziehungen a), e) (S. 113) unmittelbar den folgenden Satz.

III. *Ist A ein selbstadjungierter Operator, so ist der Operator $\alpha A + \beta 1$ für alle reellen Zahlen $\alpha \neq 0$ und β ebenfalls selbstadjungiert.*

Ferner gilt:

IV. *Ein symmetrischer Operator A in $\mathfrak{H}$, dessen Wertevorrat $\mathfrak{R}_A$ mit $\mathfrak{H}$ übereinstimmt, ist selbstadjungiert.*

Beweis. Offenbar braucht nur noch gezeigt zu werden, daß $\mathfrak{D}_{A^*} \subset \mathfrak{D}_A$ ist. Ist $y \in \mathfrak{D}_{A^*}$ und $z = A^* y$, so gibt es wegen der Voraussetzung $\mathfrak{R}_A = \mathfrak{H}$ einen Vektor $y' \in \mathfrak{D}_A$, für den $z = A y'$ ist. Hieraus folgt für beliebiges $x \in \mathfrak{D}_A$

$$\langle A x, y\rangle = \langle x, A^* y\rangle = \langle x, A y'\rangle = \langle A x, y'\rangle$$

und $\langle A x, y - y'\rangle = 0$. Da die Gesamtheit aller Vektoren Ax mit $\mathfrak{H}$ übereinstimmt, muß $y - y' = 0$, also $y = y' \in \mathfrak{D}_A$ sein.

V. *Ist A ein selbstadjungierter Operator in $\mathfrak{H}$, so ist $U = (A + i1)(A - i1)^{-1}$ ein unitärer Operator in $\mathfrak{H}$.*

Beweis. Ist A ein selbstadjungierter Operator in $\mathfrak{H}$, so gilt für $x \in \mathfrak{D}_A$

$$\begin{aligned} |A x \pm i x|^2 &= \langle A x, A x\rangle \mp i\langle A x, x\rangle \pm i\langle x, A x\rangle + \langle x, x\rangle \\ &= |A x|^2 + |x|^2. \end{aligned} \tag{8}$$

Daher kann $Ax \pm ix = 0$ nur für $x = 0$ gelten. Demzufolge existiert $U = (A + i1)(A - i1)^{-1}$. Es ist $\mathfrak{R}_{A \pm i1}$ in $\mathfrak{H}$ dicht. Ist nämlich $z \perp \mathfrak{R}_{A+i1}$, so gilt $0 = \langle z, Ax + ix\rangle = \langle z, Ax\rangle - \langle iz, x\rangle$, woraus $z \in \mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{D}_A$ und $Az = iz$ folgt. Dies ist aber, wie wir gerade erkannt haben, nur für $z = 0$ möglich. Um nun zu zeigen, daß $\mathfrak{R}_{A \pm i1} = \mathfrak{H}$ ist, nehmen wir ein $y \in \mathfrak{H}$. Da $\mathfrak{R}_{A+i1}$ in $\mathfrak{H}$ dicht ist, existiert eine Folge $\{y_n\}$ derart, daß

$$y_n = A x_n + i x_n \to y \tag{9}$$

gilt. Wegen (8) ist

$$|y_n - y_m|^2 = |A(x_n - x_m) + i(x_n - x_m)|^2 = |A(x_n - x_m)|^2 + |x_n - x_m|^2.$$

Demnach konvergieren die Folgen $\{x_n\}$ und $\{A x_n\}$ gegen bestimmte Vektoren x bzw. z. Da A abgeschlossen ist, muß $x \in \mathfrak{D}_A$ und $z = Ax$ sein. Wegen (9) ist dann aber $y = Ax + ix \in \mathfrak{R}_{A+i1}$. Folglich ist $\mathfrak{R}_{A+i1} = \mathfrak{H}$. Entsprechend ergibt sich $\mathfrak{R}_{A-i1} = \mathfrak{H}$. Dies bedeutet, daß $\mathfrak{D}_U = \mathfrak{R}_U = \mathfrak{H}$ ist. Außerdem folgt aus (8), daß U isometrisch und daher unitär ist.

In der Tat, aus $y \in \mathfrak{D}_U$ folgt $y \in \mathfrak{D}_{(A-i1)^{-1}}$. Demzufolge ist $y = (A - i1)x$ und $U y = (A + i1)(A - i1)^{-1}(A - i1)x = (A + i1)x$. Die Beziehung (8) bedeutet daher, daß $|Uy|^2 = |y|^2$ ist.

Ein Operator heißt *positiv definit*, wenn

$$\langle A x, x\rangle \geqq 0 \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{D}_A$$

ist.

VI (J. v. Neumann [2]). *Ist A ein abgeschlossener linearer Operator von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$, dessen Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$ in $\mathfrak{H}_1$ dicht ist, so ist $A^* A$ ein positiv definiter selbstadjungierter Operator in $\mathfrak{H}_1$.*

Beweis. Daß A^*A positiv definit ist, folgt unmittelbar aus

$$\langle A^*Ax, x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle \geqq 0 \quad \text{für} \quad x \in \mathfrak{D}_A.$$

Es bleibt also nur noch zu zeigen, daß A^*A selbstadjungiert ist. Hierzu schreiben wir die Beziehung (5) in der Gestalt

$$\mathfrak{B}_A' \oplus \mathfrak{B}_{A^*} = \mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1. \tag{10}$$

Wegen (10) kann jeder der zu $\mathfrak{H}_2 \oplus \mathfrak{H}_1$ gehörenden Vektoren $\{0, -ix\}$, $x \in \mathfrak{H}_1$, in der Gestalt

$$\{0, -ix\} = \{iAy, -iy\} + \{z, A^*z\}, \quad y \in \mathfrak{D}_A, \quad z \in \mathfrak{D}_{A^*},$$

oder auch

$$0 = iAy + z, \quad -ix = -iy + A^*z = -iy - iA^*Ay$$

geschrieben werden. Hieraus folgt $x = (1 + A^*A)y$, so daß der Wertebereich von $1 + A^*A$ mit dem ganzen Raum $\mathfrak{H}_1$ übereinstimmt. Wir werden nun zeigen, daß $A^*A + 1$ symmetrisch ist. Alsdann folgt aus Satz IV, daß $A^*A + 1$ und damit wegen Satz III auch A^*A selbstadjungiert ist.

Offenbar ist $A^*A + 1$ ein hermitescher Operator. Es bleibt also nur zu zeigen, daß $\mathfrak{D}_{A^*A+1}$ in $\mathfrak{H}_1$ dicht ist. Hierzu nehmen wir einen Vektor x_0 aus $\mathfrak{H}_1$, der zu $\mathfrak{D}_{A^*A+1}$ orthogonal ist. Wie oben bewiesen wurde, läßt sich x_0 in der Form $x_0 = (A^*A + 1)y_0$ schreiben, so daß $\langle (A^*A + 1)y_0, y\rangle = 0$ für alle $y \in \mathfrak{D}_{A^*A+1}$ ist. Wird insbesondere $y = y_0$ genommen, so ergibt sich

$$\langle (A^*A + 1)y_0, y_0\rangle = |Ay_0|^2 + |y_0|^2 = 0.$$

Hieraus folgt aber $y_0 = 0$ und $x_0 = (A^*A + 1)y_0 = 0$, d. h., es gibt in $\mathfrak{H}_1$ keinen Vektor $x_0 \neq 0$, der zu $\mathfrak{D}_{A^*A+1}$ orthogonal wäre. Folglich ist $\mathfrak{D}_{A^*A+1}$ dicht in $\mathfrak{H}_1$.

10. Beschränkte Operatoren.

I. *Ist A ein beschränkter Operator von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$, so läßt sich A abschließen; dabei ist $\mathfrak{D}_{\tilde{A}} = \overline{\mathfrak{D}_A}$ und $|\tilde{A}| = |A|$.*

Beweis. Wegen Satz II aus § 4, Nr. 4, kann A auf eindeutige Weise zu einem beschränkten Operator $\tilde{A}$ mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_{\tilde{A}} = \overline{\mathfrak{D}_A}$ und der Norm $|\tilde{A}| = |A|$ fortgesetzt werden. Wie man leicht erkennt, ist $\tilde{A}$ die Abschließung von A.

II. *Die Abschließung eines isometrischen Operators U ist ein isometrischer Operator mit dem Definitionsbereich $\overline{\mathfrak{D}_U}$ und dem Wertevorrat $\overline{\mathfrak{R}_U}$.*

Beweis. Da der isometrische Operator U beschränkt ist, existiert nach Satz I seine Abschließung $\tilde{U}$, wobei $\mathfrak{D}_{\tilde{U}} = \overline{\mathfrak{D}_U}$ ist. Für $x, y \in \mathfrak{D}_{\tilde{U}}$ gibt es Vektoren $x_n, y_n \in \mathfrak{D}_U$ derart, daß $x_n \to x$, $y_n \to y$ ist. Wir gehen nun in der Gleichung $\langle Ux_n, Uy_n\rangle = \langle x_n, y_n\rangle$ zur Grenze über und erhalten $\langle \tilde{U}x, \tilde{U}y\rangle = \langle x, y\rangle$, d. h., $\tilde{U}$ ist isometrisch. Die Beziehung $\mathfrak{R}_{\tilde{U}} = \overline{\mathfrak{R}_U}$ ergibt sich, wenn die Formel $\mathfrak{D}_{\tilde{U}} = \overline{\mathfrak{D}_U}$ auf den inversen Operator U^{-1} angewandt wird.

Da $A^* = \tilde{A}^*$ ist, kann man sich bei der Untersuchung des zu einem beschränkten Operator adjungierten Operators A auf Operatoren beschränken, deren Definitionsbereich der ganze Raum $\mathfrak{H}_1$ ist. Es sei also A ein beschränkter Operator von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$ mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}_1$. Dann ist das lineare Funktional

$$f(x) = \langle A x, y \rangle$$

für alle $y \in \mathfrak{H}_2$ beschränkt, weil

$$|f(x)| = |\langle A x, y \rangle| \leqq |A x| |y| \leqq |A| |x| |y|$$

ist. Nach dem Satz von F. RIESZ (vgl. Nr. 3) gibt es einen Vektor $z \in \mathfrak{H}_1$ derart, daß $f(x) = \langle x, z \rangle$, also

$$\langle A x, y \rangle = \langle x, z \rangle$$

ist. Hierbei gilt überdies

$$|z| \leqq |A| |y|;$$

Demzufolge ist $\mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{H}_2$ und

$$|A^* y| = |z| \leqq |A| |y|,$$

also A^* beschränkt und

$$|A^*| \leqq |A|. \tag{1}$$

Wenden wir dieses Ergebnis auf A^* an, so erkennen wir die Beschränktheit von A^{**} und die Gültigkeit der Ungleichung

$$|A^{**}| \leqq |A^*|.$$

Nun ist aber offenbar

$$A^{**} = A,$$

also $|A| \leqq |A^*|$. Durch Vergleich mit (1) erhalten wir hieraus

$$|A^*| = |A|.$$

Somit gilt:

III. *Ist A ein beschränkter Operator von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$, dessen Definitionsbereich mit $\mathfrak{H}_1$ übereinstimmt, so ist A^* ein beschränkter Operator von $\mathfrak{H}_2$ in $\mathfrak{H}_1$ mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{H}_2$ und der Norm $|A^*| = |A|$. Hierbei gilt:*

α) $A^{**} = A$;

β) $(\alpha A)^* = \bar{\alpha} A^*$;

γ) *sind A, B beschränkte Operatoren von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$, so ist*

$$(A + B)^* = A^* + B^*;$$

δ) *sind A, B beschränkte Operatoren in $\mathfrak{H}$, so ist* $(AB)^* = B^* A^*$.

Die Beziehungen β) bis δ) sind Spezialfälle der Beziehungen a), c), d) aus Nr. 9. Weiter gilt

$$|A^* A| = |A|^2. \tag{2}$$

Einerseits ist nämlich

$$|A|^2 = \sup_{|x|=1} |A x|^2 = \sup_{|x|=1} \langle A x, A x \rangle = \sup_{|x|=1} \langle A^* A x, x \rangle$$
$$\leqq \sup_{|x|=1} |A^* A x| |x| = |A^* A|$$

und andererseits
$$|A^*A| \leqq |A^*||A| = |A|^2.$$

IV. *Ein beschränkter Operator A in $\mathfrak{H}$ mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}$ ist dann und nur dann hermitesch, wenn $A^* = A$ ist.*

Da nämlich $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{H}$ ist, geht die Beziehung $A^* \supset A$ in $A^* = A$ über.

V. *Ein Operator U von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$ mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_U = \mathfrak{H}_1$ ist genau dann isometrisch, wenn*
$$U^* U = 1$$
ist.

Beweis. Ist U isometrisch, so gilt für alle $x, y \in \mathfrak{H}_1$
$$\langle x, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle.$$
Daher ist $Ux \in \mathfrak{D}_{U^*}$ und $U^* Ux = x$, also $U^* U = 1$. Ist umgekehrt $U^* U = 1$, so folgt
$$\langle x, y\rangle = \langle U^* Ux, y\rangle = \langle Ux, Uy\rangle,$$
d. h., U ist isometrisch.

VI. *Ein Operator U von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$ bildet $\mathfrak{H}_1$ genau dann isometrisch auf $\mathfrak{H}_2$ ab, wenn*
$$U^* U = 1_{\mathfrak{H}_1}, \quad U U^* = 1_{\mathfrak{H}_2}$$
ist.

Beweis. Aus $U^* U = 1$ folgt, daß $\mathfrak{D}_U = \mathfrak{H}_1$ ist und U eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{H}_1$ auf $\mathfrak{H}_2$ vermittelt. Aus $UU^* y = y$ folgt andererseits $\mathfrak{R}_U = \mathfrak{H}_2$.

Ein Spezialfall dieses Satzes ist der Satz

VII. *Ein Operator U in $\mathfrak{H}$ ist genau dann unitär, wenn*
$$U^* U = 1, \quad U U^* = 1$$
ist.

Ferner gilt:

VIII. *Ein beschränkter linearer Operator A von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$, der überall in $\mathfrak{H}_1$ definiert ist, ist genau dann vollstetig, wenn A^*A vollstetig ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ergibt sich als Spezialfall des Satzes II aus § 4, Nr. 6. Es bleibt nur noch zu zeigen, daß die Bedingung auch hinreichend ist. Es sei also A^*A vollstetig. Wir nehmen eine beschränkte Folge $\{x_n\}$ von Elementen aus $\mathfrak{H}_1$, $|x_n| < c$. Aus ihr läßt sich eine Teilfolge $\{x'_n\}$ auswählen derart, daß $\{A^*Ax'_n\}$ konvergiert. Dann gilt aber
$$\begin{aligned} |Ax'_n - Ax'_m|^2 &= \langle A(x'_n - x'_m), A(x'_n - x'_m)\rangle \\ &= \langle A^*Ax'_n - A^*Ax'_m, x'_n - x'_m\rangle \\ &\leqq |A^*Ax'_n - A^*Ax'_m||x'_n - x'_m| \\ &\leqq 2c|A^*Ax'_n - A^*Ax'_m| \to 0 \quad \text{für} \quad n, m \to \infty, \end{aligned}$$
so daß die Folge $\{Ax'_n\}$ konvergiert. Demzufolge ist A vollstetig.

IX. *Ist A ein linearer vollstetiger Operator von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$, der überall in $\mathfrak{H}_1$ definiert ist, so ist der adjungierte Operator A^* ebenfalls vollstetig.*

Dieser Satz ergibt sich sofort aus Satz VIII, weil $(A^*)^*A^* = AA^*$ vollstetig ist.

11. Verallgemeinerung auf Operatoren in einem Banachschen Raum. Der Begriff des adjungierten Operators läßt sich in natürlicher Weise auf Operatoren in einem BANACHschen Raum übertragen. Wir wollen hier nur den Fall eines beschränkten linearen Operators A in einem BANACHschen Raum X betrachten, dessen Definitionsbereich mit dem ganzen Raum X übereinstimmt.

In diesem Fall wird durch $f_1(x) = f(Ax)$ für jedes $f \in X'$ ein lineares Funktional $f_1 \in X'$ definiert. Die Zuordnung $f \to f_1$ legt hierbei einen linearen Operator in dem als BANACHschen Raum betrachteten adjungierten Raum X' fest. Dieser Operator wird der zu A *adjungierte* Operator genannt und mit A^* bezeichnet. Per definitionem ist also

$$(A^* f)(x) = f(A x). \tag{1}$$

Die Gleichung (1) läßt sich in einer zweckmäßigeren Form schreiben, wenn wir vereinbaren, statt $f(x)$ von nun ab $\langle x, f\rangle$ zu schreiben; dann bekommt (1) die Form

$$\langle x, A^* f\rangle = \langle A x, f\rangle.$$

Wie man sofort sieht, ist A^* ebenfalls beschränkt; es ist sogar $|A^*| = |A|$. Weiterhin bestätigt man leicht die Gültigkeit der Beziehungen

$$(\alpha A)^* = \alpha A^*, \quad (A + B)^* = A^* + B^*, \quad (A B)^* = B^* A^*.$$

12. Projektionsoperatoren. Es sei $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum eines HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}$. Wir ordnen jedem Vektor $x \in \mathfrak{H}$ seine Projektion x_1 auf $\mathfrak{M}$ zu. Dieser Zuordnung entspricht ein Operator in $\mathfrak{H}$. Dieser werde mit P bezeichnet. Es ist dann per definitionem $Px = x_1$. Man nennt P den *Projektionsoperator* auf $\mathfrak{M}$. Soll hervorgehoben werden, daß P genau auf $\mathfrak{M}$ projiziert, so schreibt man wohl auch $P_{\mathfrak{M}}$ statt P. Wie aus der Definition des Projektionsoperators folgt, ist $|Px| \leqq |x|$, d. h., *Projektionsoperatoren sind beschränkt.*

I. *Ein Projektionsoperator ist hermitesch und linear. Ferner gilt*

$$P^2 = P.$$

Beweis. Wird

$$Px = x_1, \qquad Py = y_1, \qquad x_2 = x - x_1, \qquad y_2 = y - y_1$$

gesetzt, so gilt

$$x_2 \perp x_1,\ y_1, \quad y_2 \perp x_1,\ y_1.$$

Folglich ist

$$\langle Px, y\rangle = \langle x_1, y_1 + y_2\rangle = \langle x_1, y_1\rangle$$

und

$$\langle x, Py\rangle = \langle x_1 + x_2, y_1\rangle = \langle x_1, y_1\rangle.$$

Also ist $\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle$, d. h., P ist hermitesch und linear. Aus $x \in \mathfrak{M}$ folgt sofort $Px_1 = x_1$, d. h., es gilt $P^2 x = Px$ für alle $x \in \mathfrak{H}$. Folglich ist $P^2 = P$.

Umgekehrt gilt:

II. *Ein hermitescher Operator P in $\mathfrak{H}$ mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{H}$, der die Beziehung $P^2 = P$ erfüllt, ist ein Projektionsoperator.*

Beweis. Aus $P^2 = P$ folgt

$$|Px|^2 = \langle Px, Px\rangle = \langle P^2 x, x\rangle = \langle Px, x\rangle \leqq |Px|\,|x|,$$

woraus sich $|Px| \leqq |x|$ ergibt. P ist demnach beschränkt und damit auch stetig. Die Gesamtheit derjenigen Vektoren x, welche der Bedingung

$$Px = x$$

genügen, werde mit $\mathfrak{M}$ bezeichnet. Auf Grund der Stetigkeit des linearen Operators P ist die Menge $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{H}$. Ist x ein beliebiger Vektor, so erhalten wir, wenn $x_1 = Px$ und $x_2 = (1 - P)x$ gesetzt wird, die Beziehungen

$$x = x_1 + x_2 \quad \text{und} \quad Px_1 = P^2x = Px = x_1.$$

Folglich ist $x_1 \in \mathfrak{M}$. Ferner ist $Py = y$ für alle $y \in \mathfrak{M}$ und daher

$$\langle y, x_2\rangle = \langle y, (1-P)x\rangle = \langle (1-P)y, x\rangle = \langle y - Py, x\rangle = 0,$$

also $x_2 \perp \mathfrak{M}$. Dies bedeutet aber, daß $x_1 = Px$ die Projektion von x auf $\mathfrak{M}$ ist, d. h., P ist der Projektionsoperator auf $\mathfrak{M}$.

III. *Das Produkt zweier Projektionsoperatoren $P_{\mathfrak{M}_1}$ und $P_{\mathfrak{M}_2}$ ist dann und nur dann ebenfalls ein Projektionsoperator, wenn $P_{\mathfrak{M}_1}$ und $P_{\mathfrak{M}_2}$ miteinander vertauschbar sind. In diesem Fall gilt*

$$P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}}$$

mit $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$.

Beweis. Ist $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2}$ ein Projektionsoperator, so ist $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2}$ hermitesch, d. h., es gilt

$$P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = (P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2})^* = P^*_{\mathfrak{M}_2} P^*_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1}.$$

Demnach sind $P_{\mathfrak{M}_1}$ und $P_{\mathfrak{M}_2}$ miteinander vertauschbar.

Werden umgekehrt $P_{\mathfrak{M}_1}$ und $P_{\mathfrak{M}_2}$ als miteinander vertauschbar vorausgesetzt, so ist $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2}$ hermitesch und

$$(P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2})^2 = P^2_{\mathfrak{M}_1} P^2_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2}.$$

Diese Beziehung bedeutet aber nach Satz II, daß $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2}$ ein Projektionsoperator ist. Es sei $\mathfrak{M}$ der Teilraum, auf den projiziert wird. Da $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} x \in \mathfrak{M}_1$ für jedes $x \in \mathfrak{H}$ ist, muß $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1$ sein. Entsprechend ist $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_2$. Es gilt also $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$. Ist umgekehrt $x \in \mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2$, so folgt $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} x = P_{\mathfrak{M}_1} x = x$ und hieraus $x \in \mathfrak{M}$. Also gilt $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}$ und somit $\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 = \mathfrak{M}$.

IV. *Zwei Unterräume $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}_2$ sind dann und nur dann orthogonal, wenn*

$$P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = 0$$

ist.

Der Satz folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$\langle P_{\mathfrak{M}_2} x, P_{\mathfrak{M}_1} y\rangle = \langle P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} x, y\rangle,$$

die für beliebige $x, y \in \mathfrak{H}$ gilt.

V. *Die Summe*

$$Q = P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2} + \cdots + P_{\mathfrak{M}_n}$$

endlich vieler Projektionsoperatoren ist dann und nur dann wieder ein Projektionsoperator, wenn

$$P_{\mathfrak{M}_j} P_{\mathfrak{M}_k} = 0 \quad \textit{für} \quad j \neq k \tag{1}$$

ist, d. h., wenn die Unterräume $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ *paarweise orthogonal sind. In diesem Fall ist*

$$P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2} + \cdots + P_{\mathfrak{M}_n} = P_{\mathfrak{M}}$$

mit

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n.$$

Beweis. Ist die Bedingung (1) erfüllt, so gilt $Q^2 = Q$, wie man sofort erkennt. Demnach ist Q ein Projektionsoperator. Umgekehrt sei Q ein Projektionsoperator. Zu zeigen ist, daß dann auch die Bedingung (1) erfüllt ist. Für Q als Projektionsoperator und beliebiges $x \in \mathfrak{H}$ gilt zunächst

$$|x|^2 \geqq \langle Qx, x\rangle = \sum_{l=1}^{n} \langle P_{\mathfrak{M}_l} x, x\rangle \geqq \langle P_{\mathfrak{M}_j} x, x\rangle + \langle P_{\mathfrak{M}_k} x, x\rangle,$$

so daß

$$|P_{\mathfrak{M}_j} x|^2 + |P_{\mathfrak{M}_k} x|^2 \leqq |x|^2$$

ist. Wird hier $x = P_{\mathfrak{M}_k} y$ gesetzt, so erhält man

$$|P_{\mathfrak{M}_j} P_{\mathfrak{M}_k} y|^2 + |P_{\mathfrak{M}_k} y|^2 \leqq |P_{\mathfrak{M}_k} y|^2.$$

Es ist also $|P_{\mathfrak{M}_j} P_{\mathfrak{M}_k} y| = 0$ und $P_{\mathfrak{M}_j} P_{\mathfrak{M}_k} = 0$.

Es bleibt nun noch der letzte Teil des Satzes V zu beweisen. Die Bedingung (1) sei erfüllt. Mit $\mathfrak{M}$ werde der Teilraum bezeichnet, auf den Q projiziert. Dann ist für beliebiges $x \in \mathfrak{H}$

$$Qx = P_{\mathfrak{M}_1} x + P_{\mathfrak{M}_2} x + \cdots + P_{\mathfrak{M}_n} x \subset \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n,$$

also

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n. \tag{2}$$

Ist umgekehrt $x \in \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n$, so wird $x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n$ mit $x_k \in \mathfrak{M}_k$. Wegen (1) ist

$$P_{\mathfrak{M}_j} x_k = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad j \neq k, \\ x_k & \text{für} \quad j = k. \end{cases}$$

Hieraus folgt

$$Qx = P_{\mathfrak{M}_1} x + P_{\mathfrak{M}_2} x + \cdots + P_{\mathfrak{M}_n} x = x_1 + x_2 + \cdots + x_n = x,$$

so daß $x \in \mathfrak{M}$ ist. Es gilt demzufolge auch $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n \subset \mathfrak{M}$, woraus durch Vergleich mit (2) nunmehr

$$\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n = \mathfrak{M}$$

folgt.

VI. *Die Beziehung* $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2$ *ist gleichbedeutend mit jeder der beiden Beziehungen*

α) $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2}$;

β) $|P_{\mathfrak{M}_2} x| \leqq |P_{\mathfrak{M}_1} x|$ *für alle* $x \in \mathfrak{H}$.

Beweis. Es gelte $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2$; dann ist $P_{\mathfrak{M}_2} x \subset \mathfrak{M}_1$ und daher

$$P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} x = P_{\mathfrak{M}_2} x \quad \text{für alle} \quad x \in \mathfrak{H}.$$

Demnach ist $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_2}$. Gehen wir auf beiden Seiten dieser Gleichung zum adjungierten Operator über, so ergibt sich $P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2}$.

Aus $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2$ folgt also α). Es gelte nun α). Dann ist

$$|P_{\mathfrak{M}_2} x| = |P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} x| \leqq |P_{\mathfrak{M}_1} x|,$$

d. h., β) gilt, wenn α) gilt. Es gelte schließlich β). Wegen der Beziehung $|x|^2 = |P_{\mathfrak{M}_i} x|^2 + |(1 - P_{\mathfrak{M}_i}) x|^2$ stimmt der Teilraum $\mathfrak{M}_i$ $(i = 1, 2)$ mit der Gesamtheit aller Vektoren x, für die $|x| = |P_{\mathfrak{M}_i} x|$ ist, überein. Nun folgt aber aus β), daß $|x| = |P_{\mathfrak{M}_1} x|$ gilt, wenn $|x| = |P_{\mathfrak{M}_2} x|$ ist. Aus $x \in \mathfrak{M}_2$ folgt also $x \in \mathfrak{M}_1$, d. h., es ist tatsächlich $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$.

VII. *Die Differenz $P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2}$ zweier Projektionsoperatoren ist genau dann ein Projektionsoperator, wenn $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$ ist. In diesem Fall gilt*

$$P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}.$$

Beweis. Aus $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$ folgt nach Satz VI die Beziehung

$$P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2}.$$

Es ist also $(P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2})^2 = P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2}$, so daß $P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2}$ ein Projektionsoperator ist. Nun sei umgekehrt $P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}}$ ein Projektionsoperator; $P_{\mathfrak{M}}$ projiziere auf $\mathfrak{M}$. Dann ist

$$P_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2} + P_{\mathfrak{M}} \tag{3}$$

und damit nach Satz V

$$0 = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}} = P_{\mathfrak{M}_2}(P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2}) = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2}.$$

Hieraus folgt mit Satz VI nun, daß $\mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1$ ist. Außerdem folgt aus (3) die Gleichung $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}$. Es ist also $\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2$.

VIII. *Sind $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ abzählbar viele paarweise zueinander orthogonale Teilräume, so konvergiert die Reihe*

$$P_{\mathfrak{M}_1} x + P_{\mathfrak{M}_2} x + P_{\mathfrak{M}_3} x + \cdots \tag{4}$$

für alle Vektoren $x \in \mathfrak{H}$, und ihre Summe ist gleich $P_{\mathfrak{M}} x$, wobei

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_3 \oplus \cdots$$

ist.

Beweis. Wird $P_{\mathfrak{M}_k} x = x_k$ gesetzt, so sind die Vektoren x_k paarweise zueinander orthogonal, und es ist

$$\begin{aligned} |x_1|^2 + \cdots + |x_n|^2 &= \langle P_{\mathfrak{M}_1} x, x\rangle + \cdots + \langle P_{\mathfrak{M}_n} x, x\rangle \\ &= \langle P_{\mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n} x, x\rangle = |x|^2. \end{aligned}$$

Demzufolge konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2$ und daher auch die Reihe (4). Wir bezeichnen ihre Summe mit Px. Die Beziehungen

$$\begin{aligned} \langle P_{\mathfrak{M}_1} x + \cdots + P_{\mathfrak{M}_n} x, y\rangle &= \langle x, P_{\mathfrak{M}_1} y + \cdots + P_{\mathfrak{M}_n} y\rangle \\ &= \langle P_{\mathfrak{M}_1} x + \cdots + P_{\mathfrak{M}_n} x, P_{\mathfrak{M}_1} y + \cdots + P_{\mathfrak{M}_n} y\rangle \end{aligned}$$

bringen zum Ausdruck, daß $P_{\mathfrak{M}_1} + \cdots + P_{\mathfrak{M}_n}$ ein Projektionsoperator ist (vgl. die Sätze I und II). Gehen wir in ihnen zur Grenze über, so ergibt sich

$$\langle Px, y\rangle = \langle x, Py\rangle = \langle Px, Py\rangle.$$

Folglich ist $P = P^* = P^2$, also P ein Projektionsoperator. Es sei $P = P_{\mathfrak{M}}$. Offenbar gilt $Px \subset \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots$, und daher ist

$$\mathfrak{M} \subset \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots. \tag{5}$$

Umgekehrt sei nun $x \in \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots$. Setzen wir $x = x_1 + x_2 + \cdots$, $x_k \in \mathfrak{M}_k$, so sehen wir sofort, daß $Px = x$ ist. Folglich ist $x \in \mathfrak{M}$. Somit gilt $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \subset \mathfrak{M}$, woraus durch Vergleich mit (5) schließlich

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots$$

folgt.

Mit Hilfe entsprechender Überlegungen beweist man den Satz

IX. *Ist $\{\mathfrak{M}_\nu\}$ ein System von paarweise orthogonalen Teilräumen, so enthält die Reihe*

$$\sum_\nu P_{\mathfrak{M}_\nu} x$$

für jeden Vektor x nur abzählbar viele von Null verschiedene Glieder, sie konvergiert, und ihre Summe ist gleich $P_{\mathfrak{M}} x$ mit $\mathfrak{M} = \sum_\nu \oplus \mathfrak{M}_\nu$.

13. Reduzierbarkeit. Es sei $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum in $\mathfrak{H}$ und P der Projektionsoperator auf $\mathfrak{M}$. Wir sagen, der Teilraum $\mathfrak{M}$ *reduziere* den Operator A, wenn mit $x \in D_A$ auch $Px \in \mathfrak{D}_A$ ist und

$$APx = PAx$$

gilt.

I. *Ein beschränkter Operator A, der im ganzen Raum $\mathfrak{H}$ definiert ist, wird dann und nur dann von einem abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{M}$ reduziert, wenn A mit dem Projektionsoperator auf $\mathfrak{M}$ vertauschbar ist.*

Dieser Satz ergibt sich unmittelbar aus der Definition der Reduzierbarkeit.

II. *Ein beschränkter hermitescher Operator A, der auf ganz $\mathfrak{H}$ definiert ist, wird dann und nur dann von einem abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{M}$ reduziert, wenn $\mathfrak{M}$ bezüglich A invariant ist, d. h., wenn aus $x \in \mathfrak{M}$ stets $Ax \in \mathfrak{M}$ folgt.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingung ist trivial. Wir wollen zeigen, daß die Bedingung auch hinreichend ist. Es sei also $\mathfrak{M}$ invariant bezüglich A. Aus $P_{\mathfrak{M}} x \in \mathfrak{M}$ folgt $AP_{\mathfrak{M}} x \in \mathfrak{M}$. Folglich gilt $P_{\mathfrak{M}} A P_{\mathfrak{M}} x = AP_{\mathfrak{M}} x$ für alle x, d. h., es ist

$$P_{\mathfrak{M}} A P_{\mathfrak{M}} = A P_{\mathfrak{M}}. \tag{1}$$

Gehen wir nun auf beiden Seiten dieser Gleichung zum adjungierten Operator über, so erhalten wir

$$P_{\mathfrak{M}} A P_{\mathfrak{M}} = P_{\mathfrak{M}} A. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt zusammen $AP_{\mathfrak{M}} = P_{\mathfrak{M}} A$, so daß A und $P_{\mathfrak{M}}$ miteinander vertauschbar sind. Dies bedeutet aber nach Satz I, daß A von $\mathfrak{M}$ reduziert wird.

14. Partiell isometrische Operatoren. Ein Operator U von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$ heißt *partiell isometrisch,* wenn er auf einem abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{M}$ des Raumes $\mathfrak{H}_1$ isometrisch und in dessen orthogonalem Komplement $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{M}$

gleich Null ist. Der Teilraum $\mathfrak{M}$ heißt *Anfangsbereich*, der Wertevorrat $\mathfrak{N} = \mathfrak{R}_U$ in $\mathfrak{H}_2$ *Endbereich* des Operators U. Wie man leicht nachprüft, ist $U^* U = P_{\mathfrak{M}}$ und $U U^* = P_{\mathfrak{N}}$, wobei $P_{\mathfrak{M}}$ und $P_{\mathfrak{N}}$ die Projektionsoperatoren in $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ auf $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{N}$ sind.

In der Tat ist $U^* U$ ein selbstadjungierter Operator in $\mathfrak{H}_1$, der in $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{M}$ gleich dem Nulloperator ist. Daher gilt stets $U^* U x \in \mathfrak{M}$. Für $x \in \mathfrak{M}$ ist also auch $x - U^* U x \in \mathfrak{M}$. Andererseits haben wir

$$\langle x, y\rangle = \langle U x, U y\rangle = \langle U^* U x, y\rangle, \quad \langle x - U^* U x, y\rangle = 0$$

für alle $x \in \mathfrak{M}$ und $y \in \mathfrak{M}$. Demnach ist der Vektor $x - U^* U x$ orthogonal zu $\mathfrak{M}$. Dann gilt aber $x = U^* U x$, d. h. $U^* U = 1$ auf $\mathfrak{M}$, und es ist $U^* U = P_{\mathfrak{M}}$. Ganz entsprechend wird bewiesen, daß $U U^* = P_{\mathfrak{N}}$ ist. Gleichzeitig erkennen wir, daß U^* ein partiell isometrischer Operator von $\mathfrak{H}_2$ in $\mathfrak{H}_1$ mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{N}$ und dem Endbereich $\mathfrak{M}$ ist.

Ein Operator U ist genau dann partiell isometrisch, wenn eine der folgenden Bedingungen erfüllt ist:

1. *$U^* U$ ist ein Projektionsoperator;*
2. *$U U^* U = U$;*
3. *$U U^*$ ist ein Projektionsoperator;*
4. *$U^* U U^* = U^*$.*

B e w e i s. Ist U ein partiell isometrischer Operator mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{M}$, so ist $U^* U = P_{\mathfrak{M}}$ ein Projektionsoperator, so daß die Bedingung 1 erfüllt ist. Es sei jetzt $U^* U$ ein Projektionsoperator und $\mathfrak{M}$ der Teilraum $\mathfrak{H}$, auf den $U^* U$ projiziert. Dann ist $U^* U x = 0$ für $x \in \mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ und folglich auch

$$|U x|^2 = \langle U^* U x, x\rangle = 0, \quad U x = 0.$$

Andererseits gelten für $x \in \mathfrak{M}$ die Beziehungen

$$U^* U x = x, \quad |U x|^2 = \langle U^* U x, x\rangle = \langle x, x\rangle = |x|^2,$$

so daß U ein partiell isometrischer Operator ist. Die Gültigkeit der Beziehung 2 läßt sich unmittelbar nachprüfen. Gilt sie, so ergibt sich aus ihr durch Linksmultiplikation mit U^* die Beziehung $(U^* U)^2 = U^* U$, d. h., es gilt die Bedingung 1. Die Bedingungen 3 und 4 schließlich ergeben sich, wenn U durch U^* ersetzt wird.

15. Matrixdarstellung eines Operators. Gegeben seien zwei Mengen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$. Dem Element α der Menge $\mathfrak{A}$ sei der Raum $\mathfrak{H}_\alpha$ und dem Element β der Menge $\mathfrak{B}$ der Raum $\mathfrak{H}'_\beta$ zugeordnet. Wir fragen uns, auf welche Weise sich die beschränkten Operatoren von $\mathfrak{H} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{H}_\alpha$ in $\mathfrak{H}' = \sum_{\beta \in \mathfrak{B}} \oplus \mathfrak{H}'_\beta$ mit Hilfe beschränkter Operatoren von $\mathfrak{H}_\alpha$ in $\mathfrak{H}'_\beta$ darstellen lassen.

Es sei A ein solcher Operator und $x^{(\alpha_0)} = \{x_\alpha\}$ ein Element mit $x_\alpha = 0$ für $\alpha \neq \alpha_0$. Ferner sei $A x^{(\alpha_0)} = \{y_\beta\}$. Dann nimmt die Ungleichung

$$|A x|^2 \leqq C^2 |x|^2 \tag{1}$$

für $x = x^{(\alpha_0)}$ die Gestalt $\sum_{\beta \in \mathfrak{B}} |y_\beta|^2 \leqq C^2 |x_{\alpha_0}|^2$ an. Hieraus folgt

$$|y_{\beta_0}| \leqq C |x_{\alpha_0}|. \tag{2}$$

Wir setzen nun

$$A_{\beta_0 \alpha_0} x_{\alpha_0} = y_{\beta_0}.$$

Auf Grund der Ungleichung (2) ist $A_{\alpha_0 \beta_0}$ ein beschränkter Operator von $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$ in $\mathfrak{H}'_{\beta_0}$. Es gilt

$$A\, x^{(\alpha_0)} = \{A_{\beta_0 \alpha_0} x_{\alpha_0}\}.$$

Somit entspricht dem Operator A die Matrix $\|A_{\beta\alpha}\|$, deren Elemente beschränkte Operatoren von $\mathfrak{H}_\alpha$ in $\mathfrak{H}'_\beta$ sind.

Wir wollen die Eigenschaften dieser Matrix näher untersuchen. Jedes Element x aus $\mathfrak{H}$ kann in der Form

$$x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} x^{(\alpha)}$$

dargestellt werden, wobei in der Summe höchstens abzählbar viele von Null verschiedene Glieder stehen. Aus dieser Darstellung folgt wegen der Stetigkeit von A die Beziehung

$$A\, x = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} A\, x^{(\alpha)} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \{A_{\beta\alpha} x_\alpha\} = \Big\{\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_{\beta\alpha} x_\alpha\Big\}, \tag{3}$$

mit der die Bedingung (1) für die Beschränktheit von A die Gestalt

$$\sum_{\beta \in \mathfrak{B}} \Big|\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} A_{\beta\alpha} x_\alpha\Big|^2 \leqq C^2 \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} |x_\alpha|^2 \tag{4}$$

annimmt. Eine Matrix $\|A_{\beta\alpha}\|$, die einer Ungleichung der Gestalt (4) genügt, heiße *beschränkt*.

Durch die Gleichung (3) wird eine umkehrbar eindeutige Zuordnung $A \sim \|A_{\beta\alpha}\|$ zwischen der Gesamtheit aller beschränkten Operatoren A von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}'$ und der Gesamtheit aller beschränkten Matrizen $\|A_{\beta\alpha}\|$ von Operatoren von $\mathfrak{H}_\alpha$ in $\mathfrak{H}'_\beta$ gegeben. Hierbei ist die Norm eines Operators A per definitionem die kleinste Zahl C, für die noch die Ungleichung (4) gilt.

Ist $\|A_{\beta\alpha}\|$ insbesondere eine Diagonalmatrix, d. h. eine Matrix, für die $A_{\beta\alpha} = 0$ für $\beta \neq \alpha$ ist, so bekommt die Ungleichung (4) die Gestalt

$$\sum_\alpha |A_{\alpha\alpha} x_\alpha|^2 \leqq C^2 \sum_\alpha |x_\alpha|^2.$$

Es sei nun

$$C' = \sup_\alpha |A_{\alpha\alpha}|.$$

Dann wird

$$|A_{\alpha\alpha} x_\alpha|^2 \leqq |A_{\alpha\alpha}|^2 |x_\alpha|^2 \leqq C'^2 |x_\alpha|^2,$$

also

$$\sum_\alpha |A_{\alpha\alpha} x_\alpha|^2 \leqq C'^2 \sum_\alpha |x_\alpha|^2.$$

Hieraus folgt

$$|A|^2 \leqq C'^2.$$

Andererseits gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein α_0 derart, daß

$$|A_{\alpha_0\alpha_0}|^2 > C'^2 - \varepsilon$$

ist. Demzufolge existiert ein Vektor $x^0_{\alpha_0} \in \mathfrak{H}_{\alpha_0}$, für den

$$|A_{\alpha_0\alpha_0} x^0_{\alpha_0}|^2 > (C'^2 - \varepsilon)\, |x^0_{\alpha_0}|^2$$

ist. Wir behaupten jetzt, daß C'^2 die kleinste aller Zahlen C^2 ist, für welche die Ungleichung (4) gilt. Anderenfalls wäre nämlich die Ungleichung (4) für $C^2 = C'^2 - \varepsilon$, $x_\alpha = x^0_{\alpha_0}$, $x_\alpha = 0$ für $\alpha \neq \alpha_0$ nicht erfüllt. Demnach stimmt C' mit der Norm von A überein, d. h., es ist

$$|A| = C' = \sup_\alpha |A_{\alpha\alpha}|.$$

Aus

$$A \sim \|A_{\beta\alpha}\|, \quad B \sim \|B_{\beta\alpha}\| \quad \textit{und} \quad C \sim \|C_{\beta\alpha}\|$$

folgt

$$A + B \sim \|A_{\beta\alpha} + B_{\beta\alpha}\|, \quad aA \sim \|aA_{\beta\alpha}\|,$$

$$A^* \sim \|A^*_{\alpha\beta}\|, \quad CA \sim \left\|\sum_{\beta \in \mathfrak{B}} C_{\gamma\beta} A_{\beta\alpha}\right\|,$$

wobei die Reihe $\sum_{\beta \in \mathfrak{B}} C_{\gamma\beta} A_{\beta\alpha} x_\alpha$ *für jeden Vektor* $x_\alpha \in \mathfrak{H}$ *stark konvergiert.*

Alle diese Beziehungen lassen sich unmittelbar nachprüfen. Wir überlassen daher dem Leser den Beweis.

Wir wollen jetzt noch den Fall betrachten, daß alle Räume $\mathfrak{H}_\alpha$ und $\mathfrak{H}'_\beta$ eindimensional sind. In jedem der Räume $\mathfrak{H}_\alpha$ und $\mathfrak{H}'_\beta$ nehmen wir einen Einheitsvektor e_α bzw. e'_β. Wegen $A_{\beta\alpha} e_\alpha \in \mathfrak{H}'_\beta$ ist $A_{\beta\alpha} e_\alpha$ ein Multiplum von e'_β: Es sei etwa

$$A_{\beta\alpha} e_\alpha = a_{\beta\alpha} e'_\beta.$$

Der Operator $A_{\beta\alpha}$ ist dann eindeutig durch die Zahl $a_{\beta\alpha}$ definiert, so daß die Matrix $\|A_{\beta\alpha}\|$ und damit auch der Operator A eindeutig durch die aus den Zahlen $a_{\beta\alpha}$ gebildete Matrix $\|a_{\beta\alpha}\|$ definiert ist. Jeder Vektor $x \in \mathfrak{H}$ hat die Form

$$x = \{\xi_\alpha e_\alpha\},$$

wobei höchstens abzählbar viele Zahlen ξ_α von Null verschieden sind und $\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2 < \infty$ ist. Demzufolge schreibt sich die Formel (3) in der Gestalt

$$A x = \left\{\left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} a_{\beta\alpha} \xi_\alpha\right) e'_\beta\right\}.$$

Die oben formulierten Eigenschaften der Zuordnung $A \sim \|A_{\beta\alpha}\|$ bedeuten jetzt, daß die Addition von Operatoren, die Multiplikation von Operatoren mit einer Zahl sowie die Multiplikation von Operatoren untereinander denselben Operationen mit den Matrizen $\|a_{\beta\alpha}\|$ entsprechen.

§ 6. Integration auf einem lokal bikompakten Raum

1. Grundbegriffe. Problemstellung. Es sei T ein lokal bikompakter Hausdorffscher Raum. Mit L werde die Gesamtheit aller komplexwertigen Funktionen $x(t)$ bezeichnet, die auf T stetig und jeweils außerhalb einer bikompakten Menge gleich Null sind. Ferner sei L^r die Gesamtheit aller reellwertigen und L^+ die Gesamtheit der nichtnegativen reellwertigen Funktionen aus L. Soll hervorgehoben werden, daß L, L^r und L^+ sich auf T beziehen, so werden wir $L(T)$, $L^r(T)$ und $L^+(T)$ statt L, L^r und L^+ schreiben.

Offenbar ist L ein komplexer und L^r ein reeller linearer Raum. Der Raum L^r enthält mit $x = x(t)$ auch $|x| = |x(t)|$ und $x \cap 1 = \min\{x(t), 1\}$. Daher gehören mit $x = x(t)$ und $y = y(t)$ auch

$$x \cap y = \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|)$$

und

$$x \cup y = \max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|)$$

zu L^r. Sind x und y aus L^+ und ist $c \geqq 0$, so gehören auch cx, $x + y$, $x \cap y$ und $x \cup y$ zu L^+.

Ein lineares Funktional $I(x)$ über L, das der Bedingung

$$I(x) \geqq 0 \quad \text{für} \quad x \in L^+$$

genügt, heiße *Integral* auf L. Offenbar gilt $I(x) \leqq I(y)$ für $x \leqq y$, wenn $I(x)$ ein Integral ist.

Das Grundproblem besteht darin, ein derartiges Funktional $I(x)$ auf einen Funktionenraum fortzusetzen, der umfassender als L ist. Wird für T beispielsweise das Intervall $[0, 1]$ mit der gewöhnlichen Topologie und für $I(x)$ das Riemannsche Integral $\int_0^1 x(t)\,dt$ genommen, so führt das im folgenden beschriebene Fortsetzungsverfahren zum Lebesgueschen Integral über dem Intervall $[0, 1]$.

2. Grundeigenschaften des Integrals. Unter dem *Träger* einer Funktion $x(t) \in L$ werde die kleinste bikompakte Menge $Q_x \subset T$ verstanden, außerhalb welcher $x(t) = 0$ ist. Wir setzen

$$\|x\| = \sup_{t \in Q_x} |x(t)| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

In den folgenden Sätzen bezeichnet $I(x)$ stets ein Integral auf L. Durch $\langle x_1, x_2 \rangle = I(x_1 \bar{x}_2)$ wird offenbar eine positiv definite bilineare hermitesche Form über L definiert (vgl. § 5, Nr. 1).

I. *Für jede Funktion $x \in L$ gilt*

$$|I(x)| \leqq I(|x|). \tag{1}$$

Beweis. Zuerst sei $x \in L^r$. Dann ist $-|x| \leqq x \leqq |x|$ und daher auch $-I(|x|) \leqq I(x) \leqq I(|x|)$, womit der Beweis für Funktionen aus L^r bereits erbracht ist. Für ein $x = x_1 + i x_2$ mit $x_1, x_2 \in L^r$ wird $I(x) = I(x_1) + i I(x_2)$ mit reellen $I(x_1)$ und $I(x_2)$. Wir setzen $\theta = \arg I(x)$ und $e^{-i\theta} x = y_1 + i y_2$ mit $y_1, y_2 \in L^r$. Dann ist $|y_1| \leqq |x|$, und die Behauptung folgt aus

$$|I(x)| = I(e^{-i\theta} x) = I(y_1) + i I(y_2) = I(y_1) \leqq I(|y_1|) \leqq I(|x|).^{1)}$$

[1]) Die ursprüngliche Fassung des Beweises wurde nach einem Vorschlag von E. Hewitt durch die vorliegende ersetzt. — *Anm. d. Red.*

II. *Zu jeder bikompakten Menge $Q \subset T$ gibt es eine nur von Q abhängige Konstante C_Q derart, daß die Ungleichung*

$$|I(x)| \leqq C_Q \|x\| \tag{2}$$

für alle diejenigen $x \in L^r$ gilt, welche der Bedingung $Q_x \subset Q$ genügen.

Beweis. Auf Grund des Urysohnschen Lemmas (vgl. § 2, Nr. 8) gibt es eine Funktion $y_Q(t) \in L^+$, die nirgends größer als Eins, auf Q aber gleich Eins ist. Aus $-y_Q\|x\| \leqq x \leqq y_Q\|x\|$ folgt nun $-\|x\| I(y_Q) \leqq I(x) \leqq \|x\| I(y_Q)$, d. h., die Ungleichung (2) gilt für $C_Q = I(y_Q)$.

III. *Ist X eine nach unten gerichtete Menge bezüglich der durch das Zeichen $\leqq$ definierten Halbordnung der Funktionen $x(t) \in L^+$ und ist*

$$\inf_{x \in X} x = 0, \tag{3}$$

so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $x_\varepsilon \in X$ derart, daß $x(t) < \varepsilon$ für alle Funktionen $x(t)$ aus X ist, die der Bedingung $x(t) \leqq x_\varepsilon(t)$ genügen, und daher ist

$$\inf_{x \in X} I(x) = 0. \tag{4}$$

Beweis. Für $x \in X$ und festes ε werde $T_x = \{t : x(t) \geqq \varepsilon\}$ gesetzt. Dann sind die Mengen T_x sämtlich bikompakt. Außerdem gilt $T_{x_2} \subset T_{x_1}$ für $x_2 \leqq x_1$, und wegen (3) ist der Durchschnitt aller T_x leer. Auf Grund von Satz I aus § 2, Nr. 6, gibt es eine Funktion $x_\varepsilon \in X$, für die $T_{x_\varepsilon} = \emptyset$ ist. Dann muß aber auch $T_x = \emptyset$ für alle $x \leqq x_\varepsilon$, $x \in X$, sein. Man kann also für $0 < \varepsilon < 1$ die x_ε so wählen, daß sie ihren Träger Q_{x_ε} in einer festen bikompakten Menge $Q_1 = Q_{x_1}$ haben. Es ist also $x(t) < \varepsilon$ für alle $x \leqq x_\varepsilon$. Für $\varepsilon < 1$, $x < x_\varepsilon$ gilt $Q_x \subset Q_{x_\varepsilon} \subset Q_{x_1}$, so daß aus (2) jetzt $I(x) \leqq C_{Q_{x_1}} \varepsilon$ folgt. Hieraus schließen wir auf das Bestehen der Beziehung (4).

3. Fortsetzung des Integrals auf von unten halbstetige Funktionen. Im folgenden bezeichnet $x(t)$ eine reellwertige Funktion, die auch die Werte $+\infty$ und $-\infty$ annehmen darf. Eine solche Funktion $x(t)$ heiße *von unten halbstetig*, wenn es zu jedem Punkt t_0 und jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(t_0)$ gibt, so daß[1])

$$x(t) \geqq x(t_0) - \varepsilon \quad \text{für alle} \quad t \in U(t_0)$$

ist. Entsprechend werde eine Funktion $x(t)$ *von oben halbstetig* genannt, wenn es zu jedem t_0 und zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $V(t_0)$ gibt, so daß

$$x(t) \leqq x(t_0) + \varepsilon \quad \text{für alle} \quad t \in V(t_0)$$

ist. Offenbar ist jede stetige reelle Funktion sowohl von unten als auch von oben halbstetig.

---

[1]) Es sei $a + \infty = +\infty + a = +\infty$, wenn a endlich oder gleich $+\infty$ ist; ferner sei $a - \infty = -\infty + a = -\infty$, wenn a endlich oder gleich $-\infty$ ist. Die Bedingung (1) bedeutet demnach im Fall $x(t_0) = +\infty$, daß $x(t) = +\infty$ für $t \in U(t_0)$ ist.

Wir bezeichnen nun die Gesamtheit aller nichtnegativen Funktionen, die von unten halbstetig sind, mit M^+ und die Gesamtheit aller nichtnegativen Funktionen, die von oben halbstetig sind, mit N^+.

I. 1. *Ist* $\alpha \geqq 0$, *so gehört mit* x *auch* αx *zu* M^+;[1])
2. *aus* $x_1, \ldots, x_n \in M^+$ *folgt* $x_1 \cap \ldots \cap x_n \in M^+$;
3. *für* $X \subset M^+$ *ist* $\sup_{x \in X} x(t) \in M^+$ *und* $\sum_{x \in X} x(t) \in M^+$.

Beweis. Die Aussage 1 ist trivial. Aus $x_k(t) \geqq x_k(t_0) - \varepsilon$ für $t \in U_k(t_0)$ $(k = 1, \ldots, n)$ folgt

$$(x_1 \cap \ldots \cap x_n)(t) \geqq (x_1 \cap \ldots \cap x_n)(t_0) - \varepsilon \quad \text{für} \quad t \in \bigcap_{k=1}^{n} U_k(t_0),$$

womit auch die Richtigkeit der Aussage 2 bewiesen ist. Wir setzen nun $c = \sup_{x \in X} x(t_0)$. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es dann eine Funktion $x_0(t) \in X$, für die $x_0(t_0) > c - \frac{\varepsilon}{2}$ ist, und eine Umgebung $U(t_0)$ mit der Eigenschaft, daß $x_0(t) > c - \frac{\varepsilon}{2} - \frac{\varepsilon}{2} = c - \varepsilon$ für $t \in U(t_0)$ ist. Für $t \in U(t_0)$ gilt dann

$$\sup_x x(t) \geqq x_0(t) > c - \varepsilon.$$

Folglich ist $\sup_x x(t) \in M^+$, womit die Aussage 3 bewiesen ist. Offenbar gehört die Summe endlich vieler Funktionen aus M^+ ebenfalls zu M^+. Nun hat man unter der Summe beliebig vieler Funktionen die obere Grenze der Summen aus endlich vielen dieser Funktionen zu verstehen. Demzufolge gehört die Summe auch in diesem Fall zu M^+.

II. *Jede Funktion* $x(t)$ *aus* M^+ *bildet die obere Grenze der Gesamtheit* Y_x *aller Funktionen* $y \in L^+$, *die der Bedingung* $y \leqq x$ *genügen.*

Beweis. Der Satz ist trivial für Punkte, in denen $x(t)$ gleich Null ist. Ist aber $x(t_0) > 0$, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(t_0)$, in der $x(t) > x(t_0) - \varepsilon$ ist. Andererseits gibt es auf Grund des Urysohnschen Lemmas eine Funktion $y_0(t) \in L^+$ mit dem Träger $Q_{y_0} \subset U(t_0)$, die den Bedingungen $y_0(t_0) = x(t_0) - \varepsilon$ und $y_0(t) \leqq x(t_0) - \varepsilon$ genügt. Da aber $0 \leqq y_0 \leqq x$ ist und ε beliebig klein genommen werden kann, folgt hieraus die gesuchte Beziehung $\sup_{y \in Y_x} y(t_0) = x(t_0)$.

Unter dem *oberen Integral* $\bar{I}(x)$ einer Funktion $x(t) \in M^+$ werde fortan der Ausdruck

$$\bar{I}(x) = \sup_{y \in Y_x} I(y)$$

verstanden, wobei Y_x die Menge aller Funktionen $y \in L^+$ bezeichnet, für die $y \leqq x$ ist. Für $x \in L^+$ enthält Y_x die Funktion x, so daß $\bar{I}(x) = I(x)$ wird. Weiter folgen aus der Definition des oberen Integrals unmittelbar die Beziehungen

$$\bar{I}(x_1) \leqq \bar{I}(x_2) \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x_2 \quad \text{und} \quad x_1, x_2 \in M^+ \tag{2}$$

und

$$\bar{I}(cx) = c\bar{I}(x) \quad \text{für} \quad x \in M^+ \quad \text{und} \quad c > 0.$$

[1]) Wir vereinbaren: $0 \cdot \pm\infty = 0$, $a \cdot \pm\infty = \pm\infty$ für $a > 0$, $a \cdot \pm\infty = \mp\infty$ für $a < 0$.

III. *Es sei X eine beliebige nach oben gerichtete Menge (bezüglich der durch $\leqq$ definierten Halbordnung) in M^+. Dann ist*

$$\bar{I}(\sup_{x \in X} x) = \sup_{x \in X} \bar{I}(x).$$

Beweis. Wir setzen $x_0 = \sup_{x \in X} x$. Für $X \subset L^+$ und $x_0 \in L^+$ folgt die Behauptung aus Satz III, Nr. 2, weil dann $\inf_{x \in X} (x_0 - x) = 0$ und damit

$$I(x_0) - \sup_{x \in X} I(x) = \inf_{x \in X} I(x_0 - x) = 0$$

ist. Jetzt sei X eine beliebige Menge in M^+. Wegen (2) ist $\bar{I}(x_0) \geqq \bar{I}(x)$ für alle $x \in X$ und daher $\bar{I}(x_0) \geqq \sup_{x \in X} \bar{I}(x)$. Wir haben also nur noch die umgekehrte Ungleichung zu beweisen. Nach der Definition von $\bar{I}(x_0)$ genügt es zu zeigen, daß $I(y_0) \leqq \sup_{x \in X} \bar{I}(x)$ für alle $y_0 \in Y_{x_0}$ ist, d. h. für alle $y_0 \in L^+$, die der Ungleichung $y_0 \leqq x_0$ genügen. Hierzu bezeichnen wir mit Y die Vereinigung aller Y_x, $x \in X$. Offenbar ist $Y \subset Y_{x_0}$ und

$$x_0 = \sup_{x \in X} x = \sup_{x \in X} (\sup_{y \in Y_x} y) = \sup_{y \in Y} y. \tag{3}$$

Nun sei $y_0 \in Y_{x_0}$, also $y_0 \leqq x_0$. Aus (3) folgt dann

$$y_0 = y_0 \cap x_0 = \sup_{y \in Y} (y_0 \cap y).$$

Hieraus ergibt sich unter Berücksichtigung der Bemerkung zu Anfang dieses Beweises die Beziehung

$$I(y_0) = \sup_{y \in Y} I(y_0 \cap y).$$

Zusammen mit (3) erhalten wir hiermit schließlich

$$I(y_0) = \sup_{y \in Y} I(y_0 \cap y) \leqq \sup_{y \in Y} I(y) = \sup_{x \in X} \sup_{y \in Y_x} I(y) = \sup_{x \in X} \bar{I}(x),$$

womit der Satz vollständig bewiesen ist.

IV. Aus $x_1, x_2 \in M^+$ folgt $\bar{I}(x_1 + x_2) = \bar{I}(x_1) + \bar{I}(x_2)$.

Beweis. Ist $y_1 \leqq x_1$, $y_2 \leqq x_2$ und $y_1, y_2 \in L^+$, so gilt $y_1 + y_2 \leqq x_1 + x_2$ und $\sup (y_1 + y_2) = x_1 + x_2$. Hieraus folgt wegen Satz III dann

$$\bar{I}(x_1 + x_2) = \sup [I(y_1) + I(y_2)] = \bar{I}(x_1) + \bar{I}(x_2).$$

V. *Für $X \subset M^+$ gilt $\bar{I}\left(\sum_{x \in X} x\right) = \sum_{x \in X} \bar{I}(x)$.*

Beweis. Für endliche Summen ergibt sich die Behauptung durch Induktion aus Satz IV. Wegen Satz III gilt die Behauptung dann aber auch für eine beliebige Summe; denn diese ist obere Grenze von endlichen Summen.

4. Oberes Integral einer beliebigen nichtnegativen reellen Funktion. Wir betrachten beliebige nichtnegative reelle Funktionen $x(t)$, die auch den Wert $+\infty$ annehmen dürfen. Ist $x(t)$ eine solche Funktion, so bezeichne Z_x die Gesamtheit aller Funktionen $z(t)$ aus M^+, die der Bedingung $z(t) \geqq x(t)$ genügen. Dann ist Z_x sicher nicht leer; denn die Funktion $z(t) = +\infty$ für alle $t \in T$ gehört zu Z_x. Unter dem *oberen Integral* $\bar{I}(x)$ verstehen wir nun den Wert

$$\bar{I}(x) = \inf_{z \in Z_x} \bar{I}(z).$$

Aus $x \in M^+$ folgt $x \in Z_x$. Daher stimmt diese Definition des oberen Integrals für alle $x \in M^+$ mit der oben gegebenen überein. Aus der Definition folgt unmittelbar

$$\bar{I}(x_1) \leqq \bar{I}(x_2) \quad \text{für} \quad x_1 \leqq x_2 \tag{1}$$

und

$$\bar{I}(cx) = c\bar{I}(x) \quad \text{für} \quad c \geqq 0. \tag{2}$$

Außerdem gilt

$$\bar{I}(x_1 + x_2) \leqq \bar{I}(x_1) + \bar{I}(x_2); \tag{3}$$

denn für $z_1 \geqq x_1$, $z_2 \geqq x_2$ gilt $z_1 + z_2 \geqq x_1 + x_2$, also

$$\bar{I}(x_1 + x_2) \leqq \bar{I}(z_1 + z_2) = \bar{I}(z_1) + \bar{I}(z_2).$$

Geht man hier in bezug auf z_1 und z_2 zur unteren Grenze über, so entsteht (3).

Erwähnt seien noch folgende Eigenschaften des oberen Integrals.

I. *Für jede nicht fallende Folge von Funktionen* $x_n \geqq 0$ *gilt*

$$\bar{I}\left(\sup_n x_n\right) = \sup_n \bar{I}(x_n). \tag{4}$$

Beweis. Da $x_n \leqq \sup_n x_n$ ist, gilt $\bar{I}(x_n) \leqq \bar{I}\left(\sup_n x_n\right)$ und damit auch $\sup_n \bar{I}(x_n) \leqq \bar{I}\left(\sup_n x_n\right)$. Es genügt somit, die umgekehrte Ungleichung zu beweisen. Sie ist trivial, falls $\sup_n \bar{I}(x_n) = +\infty$ ist. Es sei also $\sup_n \bar{I}(x_n) < +\infty$. Wir nehmen eine beliebige positive Zahl ε. Nach der Definition des oberen Integrals gibt es Funktionen $z_n \in M^+$, für die $z_n > x_n$ und $\bar{I}(z_n) < \bar{I}(x_n) + \frac{\varepsilon}{2^n}$ ist. Wir setzen $u_1 = z_1$ und $u_n = z_1 \cup z_2 \cup \cdots \cup z_n$ $(n > 1)$. Dann ist $u_{n+1} \geqq u_n$, $u_n \geqq x_n$ und $u_{n+1} + u_n \cap z_{n+1} = u_n \cup z_{n+1} + u_n \cap z_{n+1} = u_n + z_{n+1}$, woraus $\bar{I}(u_{n+1}) + \bar{I}(u_n \cap z_{n+1}) = \bar{I}(u_n) + \bar{I}(z_{n+1})$ folgt. Demnach gilt

$$\begin{aligned} \bar{I}(u_{n+1}) &= \bar{I}(u_n) + \bar{I}(z_{n+1}) - \bar{I}(u_n \cap z_{n+1}) \leqq \bar{I}(u_n) + \bar{I}(z_{n+1}) - \bar{I}(x_n) \\ &\leqq \bar{I}(u_n) + \bar{I}(x_{n+1}) - \bar{I}(x_n) + \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}. \end{aligned}$$

Addieren wir diese Ungleichungen für $n = 1, 2, \ldots, m-1$, so erhalten wir $\bar{I}(u_m) \leqq \bar{I}(x_m) + \varepsilon$.

Folglich gilt nach Satz III aus Nr. 3

$$\sup_m \bar{I}(x_m) + \varepsilon \geqq \bar{I}\left(\sup_m u_m\right) \geqq \bar{I}\left(\sup_m x_m\right).$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, gilt also tatsächlich die Formel (4).

Offenbar kann (4) auch in der Gestalt

$$\bar{I}\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} \bar{I}(x_n) \tag{5}$$

geschrieben werden.

II. *Für endlich oder abzählbar viele Funktionen* $x_n \geqq 0$ *gilt*

$$\bar{I}\left(\sum_n x_n\right) \leqq \sum_n \bar{I}(x_n). \tag{6}$$

Beweis. Für endlich viele Summanden erhält man die Behauptung aus (3) durch Induktion. Für abzählbar viele Summanden ergibt sie sich, indem man (5) auf die endliche Summe $\sum_{k=1}^{n} x_k$ anstelle von x_n anwendet.

Eine Funktion $x(t) \geqq 0$ heiße *Nullfunktion*, wenn $\bar{I}(x) = 0$ ist. Aus (1), (2), (4) und (6) schließen wir:

III. *Gilt* $0 \leqq x_1 \leqq x_2$ *und ist* x_2 *eine Nullfunktion, so sind auch* x_1 *und* αx_2 *für* $\alpha \geqq 0$ *Nullfunktionen. Die obere Grenze einer nichtfallenden Folge von Nullfunktionen ist eine Nullfunktion. Die Summe von endlich oder abzählbar vielen Nullfunktionen ist eine Nullfunktion.*

5. Äußeres Maß einer Menge. Die *charakteristische Funktion* ξ_A einer Menge $A \subset T$ wird folgendermaßen definiert:

$$\xi_A(t) = \begin{cases} 1 & \text{für } t \in A, \\ 0 & \text{für } t \notin A. \end{cases}$$

Die Zahl $\bar{\mu}(A) = \bar{I}(\xi_A)$ heißt *äußeres Maß* der Menge A.

Für $A_1 \subset A_2$ gilt $\xi_{A_1} \leqq \xi_{A_2}$. Auf Grund von (1) aus Nr. 4 ist also

$$\bar{\mu}(A_1) \leqq \bar{\mu}(A_2) \quad \text{für} \quad A_1 \subset A_2. \tag{1}$$

Ferner ergibt sich aus $\xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots} \leqq \xi_{A_1} + \xi_{A_2} + \cdots$ und Nr. 4, Satz II, daß für endlich oder abzählbar viele Mengen $A_1, A_2, \ldots$ stets

$$\bar{\mu}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \leqq \bar{\mu}(A_1) + \bar{\mu}(A_2) + \cdots \tag{2}$$

gilt. Aus $A_1 \subset A_2 \subset A_3 \subset \ldots$ folgt auf entsprechende Weise $\xi_{A_1} \leqq \xi_{A_2} \leqq \ldots$ und $\xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots} = \sup_n \xi_{A_n}$. Wendet man nun Satz I aus Nr. 4 an, so folgt

$$\bar{\mu}(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \lim_n \bar{\mu}(A_n) \quad \text{für} \quad A_1 \subset A_2 \subset \ldots. \tag{3}$$

I. *Ist* $\mathfrak{B}$ *eine beliebige Familie paarweise disjunkter offener Mengen* $V \subset T$, *so gilt*

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{V \in \mathfrak{B}} V\right) = \sum_{V \in \mathfrak{B}} \bar{\mu}(V). \tag{4}$$

Die Behauptung folgt unmittelbar aus Nr. 3, Satz V, weil die charakteristische Funktion einer offenen Menge von unten halbstetig ist.[1])

Entsprechend schließen wir aus Nr. 3, Satz III:

II. *Ist $\mathfrak{V}$ eine (im Sinne der Inklusion) gerichtete Familie von offenen Mengen, so gilt*

$$\bar{\mu}\left(\bigcup_{V \in \mathfrak{V}} V\right) = \sup_{V \in \mathfrak{V}} \bar{\mu}(V).$$

III. *Das äußere Maß jeder bikompakten Menge Q ist endlich.*

Auf Grund des Urysohnschen Lemmas gibt es nämlich eine Funktion $y \in L^+$, die nirgends größer als Eins und auf Q gleich Eins ist. Dann ist aber $\xi_Q \leqq y$ und daher

$$\bar{\mu}(Q) = \bar{I}(\xi_Q) \leqq \bar{I}(y) = I(y) < +\infty.$$

IV. *Das äußere Maß $\bar{\mu}(A)$ jeder Menge A ist die untere Grenze der äußeren Maße $\bar{\mu}(U)$ aller offenen Mengen $U \supset A$.*

Beweis. Die Aussage ist trivial, wenn $\bar{\mu}(A) = +\infty$ ist. Es sei also $\bar{\mu}(A) < +\infty$. Dann gibt es für jedes ε mit $0 < \varepsilon < 1$ eine Funktion $x \in M^+$ derart, daß $\xi_A(t) \leqq x(t)$ und $\bar{I}(x) < \bar{\mu}(A) + \varepsilon$ ist. Wir setzen

$$U = \{t : x(t) > 1 - \varepsilon\}.$$

Wegen $x \in M^+$ ist U, wie man leicht sieht, offen. Andererseits gilt $x \geqq (1-\varepsilon)\,\xi_U$ und daher

$$\bar{\mu}(U) \leqq \frac{1}{1-\varepsilon}\,\bar{I}(x) < \frac{1}{1-\varepsilon}\,[\bar{\mu}(A) + \varepsilon].$$

Da ε beliebig ist, folgt hieraus die Behauptung.

Eine Menge A heißt *Nullmenge*, wenn $\bar{\mu}(A) = 0$ ist. Aus (1) und (2) schließen wir:

V. *Jede Teilmenge einer Nullmenge ist eine Nullmenge. Die Vereinigung von endlich oder abzählbar vielen Nullmengen ist eine Nullmenge.*

Außerdem gilt:

VI. *Eine Funktion $x(t) \geqq 0$ ist genau dann eine Nullfunktion, wenn $A = \{t : x(t) > 0\}$ eine Nullmenge ist.*

Beweis. Es sei $x(t)$ eine Nullfunktion. Da dann $\xi_A \leqq \sup\limits_n nx$ ist, gilt $\bar{\mu}(A) \leqq \sup\limits_n n\bar{I}(x) = \sup 0 = 0$. Ist umgekehrt A eine Nullmenge, so folgt aus $x \leqq \sup\limits_n n\,\xi_A$ sofort $\bar{I}(x) \leqq \sup\limits_n n\bar{I}(\xi_A) = 0$.

---

[1]) Ist nämlich $t_0 \in V$, so gibt es eine Umgebung $U(t_0)$, für die $U(t_0) \subset V$ gilt. Daher ist

$$\xi_V(t) = 1 > 1 - \varepsilon = \xi_V(t_0) - \varepsilon \quad \text{für} \quad t \in U(t_0);$$

ist jedoch $t_0 \notin V$, so gilt für beliebiges $t \in T$

$$\xi_V(t) > \xi_V(t_0) - \varepsilon = -\varepsilon.$$

Entsprechend zeigt man, daß ξ_A nach oben halbstetig ist, wenn A abgeschlossen ist.

VII. *Ist* $\bar{I}(x) < +\infty$, *so ist* $A = \{t : x(t) = +\infty\}$ *eine Nullmenge.*

Aus $\xi_A \leqq \frac{1}{n} x$ folgt nämlich

$$\bar{\mu}(A) = \bar{I}(\xi_A) \leqq \frac{1}{n} \bar{I}(x)$$

und hieraus für $n \to \infty$ dann $\bar{\mu}(A) = 0$.

6. Äquivalente Funktionen. Wir sagen, eine Eigenschaft gelte *fast überall auf der Menge* T, wenn die Gesamtheit aller Punkte $t \in T$, für welche diese Eigenschaft nicht gilt, eine Nullmenge ist.

Zwei komplexe Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$, die überall definiert und endlich sind, sollen *äquivalent* genannt werden, in Zeichen $x_1 \sim x_2$, wenn $x_1(t) = x_2(t)$ fast überall auf T gilt. Aus Nr. 5, Satz V, folgt sofort, daß es sich dabei um eine Äquivalenzrelation im üblichen Sinne handelt (vgl. S. 21), so daß die Menge aller komplexen Funktionen, die überall definiert und endlich sind, in Klassen untereinander äquivalenter Funktionen zerfällt.

Wie man leicht sieht, gilt mit $x_1 \sim x_2$ und $y_1 \sim y_2$ auch $cx_1 \sim cx_2$ (für beliebiges komplexes c) und $x_1 + y_1 \sim x_2 + y_2$.

Wir haben bis jetzt Funktionen $x(t)$ betrachtet, die für alle $t \in T$ definiert sind. Für die weiteren Überlegungen sind darüber hinaus auch solche Funktionen zu betrachten, die lediglich fast überall auf T definiert und endlich sind. Zwei solche Funktionen heißen wieder *äquivalent*, in Zeichen $x_1 \sim x_2$, wenn $x_1(t) = x_2(t)$ fast überall auf T gilt. Die Gesamtheit der fast überall auf T definierten und endlichen Funktionen zerfällt dann in Klassen ξ von untereinander äquivalenten Funktionen.

Jede dieser Klassen enthält Funktionen, die überall definiert und endlich sind. Wir definieren die Summe $\xi + \eta$ von Klassen ξ, η bzw. das Produkt $c\xi$ einer Klasse ξ mit einer komplexen Zahl c als diejenige Klasse, welche die Summe $x + y$ bzw. das Produkt cx enthält, wobei $x \in \xi$ und $y \in \eta$ überall definierte und endliche Funktionen sind. Aus unseren obigen Überlegungen folgt, daß diese Definitionen nicht von der Wahl von x und y abhängen.

Offenbar sind hierbei alle Axiome des linearen Raumes erfüllt, so daß die Klassen der untereinander äquivalenten, fast überall definierten Funktionen einen linearen Raum bilden.

Wir erweitern jetzt die Definition des oberen Integrals $\bar{I}(x)$ auf alle Funktionen $x(t) \geqq 0$, die fast überall auf T definiert sind. Hierzu setzen wir einfach $\bar{I}(x) = \bar{I}(y)$, wobei y eine beliebige, der Funktion x äquivalente nichtnegative überall definierte endliche Funktion ist.

Diese Definition ist von der Wahl der Funktion $y \sim x$ unabhängig. Sind nämlich y_1 und y_2 überall definiert und endlich und gilt $y_1 \sim x$ und $y_2 \sim x$, so ist $y_1 \sim y_2$ und folglich $\bar{I}(|y_1 - y_2|) = 0$. Da $y_1 \leqq y_2 + |y_1 - y_2|$ ist, folgt

$$\bar{I}(y_1) \leqq \bar{I}(y_2) + \bar{I}(|y_1 - y_2|) = \bar{I}(y_2).$$

Entsprechend gilt $\bar{I}(y_2) \leqq \bar{I}(y_1)$. Folglich ist $\bar{I}(y_1) = \bar{I}(y_2)$.

Nun prüft man leicht nach, daß auch für diesen umfassenderen Begriff des oberen Integrals die in Nr. 4 aufgezählten Eigenschaften gültig bleiben, z. B.: Gilt $x_1 \leqq x_2$ fast überall, so ist $\bar{I}(x_1) \leqq \bar{I}(x_2)$ usw.

Wir definieren nun $\bar{I}(|\xi|)$ durch die Formel

$$\bar{I}(|\xi|) = \bar{I}(|x|) \quad \text{für} \quad x \in \xi.$$

Auch diese Definition hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten $x \in \xi$ ab; aus $x_1 \sim x_2$ folgt nämlich $|x_1| \sim |x_2|$, so daß, wie oben bewiesen wurde, $\bar{I}(|x_1|) = \bar{I}(|x_2|)$ ist. Hierbei gelten auf Grund von (1), (2) und (3) aus Nr. 4 die Beziehungen

$$\bar{I}(|c\xi|) = |c|\,\bar{I}(|\xi|) \qquad \bar{I}(|\xi + \eta|) \leqq \bar{I}(|\xi| + |\eta|) \leqq \bar{I}(|\xi|) + \bar{I}(|\eta|). \tag{1}$$

Aus Nr. 5, Satz VI, folgt

$$\bar{I}(|\xi|) = 0 \quad \text{genau dann, wenn } \xi = 0 \text{ ist.} \tag{2}$$

7. Die Räume $\mathcal{L}^1$ und L^1. Wir bezeichnen mit $\mathcal{L}^1$ die Gesamtheit aller Klassen ξ von untereinander äquivalenten komplexen Funktionen $x(t)$, die für fast alle $t \in T$ definiert sind und der Bedingung $\bar{I}(|x|) < +\infty$ genügen. $\mathcal{L}^1$ ist ein linearer Raum; auf Grund von (1) aus Nr. 6 gilt für $\xi_1 \in \mathcal{L}^1$, $\xi_2 \in \mathcal{L}^1$ nämlich

$$\bar{I}(|c\xi_1|) = |c|\,\bar{I}(|\xi_1|) < +\infty,$$
$$\bar{I}(|\xi_1 + \xi_2|) \leqq \bar{I}(|\xi_1| + |\xi_2|) \leqq \bar{I}(|\xi_1|) + \bar{I}(|\xi_2|) < +\infty.$$

Durch $\|\xi\|_1 = \bar{I}(|\xi|)$ wird in $\mathcal{L}^1$ eine Norm definiert. Die beiden Ungleichungen und Formel (2) aus Nr. 6 zeigen, daß dann alle Normaxiome erfüllt sind, und $\mathcal{L}^1$ wird zu einem normierten Raum.

Im folgenden wird es nicht nötig sein, zwischen untereinander äquivalenten Funktionen zu unterscheiden. Jede Klasse ξ kann dann durch eine beliebige Funktion $x \in \xi$ ersetzt werden, und es darf $\|x\|_1 = \bar{I}(|x_1|)$ anstelle von $\|\xi\|_1$ geschrieben werden.

Ist (x_n) eine beliebige Folge von fast überall definierten Funktionen, so daß $x_n(t)$ nur auf einer Nullmenge A_n nicht definiert ist, so sind alle Funktionen sicher auf der Menge $T - \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ definiert; dabei ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ eine Nullmenge.

I. *Ist $x_n \in \mathcal{L}^1$ und konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_1$, so gilt:*

a) *Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n(t)$ konvergiert fast überall absolut;*

b) *die Funktion*

$$s(t) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} x_n(t), & \textit{wenn alle } x_n(t) \textit{ definiert sind und die Reihe konvergiert,} \\ 0 & \textit{sonst,} \end{cases}$$

ist ein Element von $\mathcal{L}^1$;

c) *die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ konvergiert bezüglich der Norm gegen s.*

Beweis. Auf Grund von (6) aus Nr. 4 gilt

$$\bar{I}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\bar{I}(|x_n|) = \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_1 < +\infty.$$

Hieraus schließt man unter Berücksichtigung von Satz VII aus Nr. 5, daß die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}|x_n(t)|$ fast überall auf T konvergiert.

Ferner gilt $|s| \leqq \sum_{n=1}^{\infty}|x_n|$ fast überall auf T. Folglich ist

$$\bar{I}(|s|) \leqq \bar{I}\left(\sum_{n=1}^{\infty}|x_n|\right) \leqq \sum_{n=1}^{\infty}\|x_n\|_1 < +\infty,$$

also $s \in \mathscr{L}^1$.

Schließlich entnimmt man der fast überall auf T geltenden Ungleichung $\left|s - \sum_{k=1}^{n} x_k\right| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty}|x_k|$, daß

$$\left\|s - \sum_{k=1}^{n} x_k\right\| \leqq \sum_{k=n+1}^{\infty}\|x_k\|_1 \to 0$$

für $n \to \infty$, d. h., die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} x_k$ konvergiert bezüglich der Norm gegen s.

II. *Der Raum $\mathscr{L}^1$ ist vollständig.*

Beweis. Es sei (x_n) eine Fundamentalfolge aus $\mathscr{L}^1$. Dann läßt sich eine Teilfolge (x_{n_k}) auswählen derart, daß $\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_1 \leqq \frac{1}{2^{k+1}}$ gilt. Dann konvergiert die Reihe $\|x_{n_1}\|_1 + \|x_{n_2} - x_{n_1}\|_1 + \cdots$. Demzufolge konvergiert die Reihe $x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + (x_{n_3} - x_{n_2}) + \cdots$ bezüglich der Norm gegen ein Element $x \in \mathscr{L}^1$, d. h., es gilt $\|x - x_{n_k}\|_1 \to 0$ für $k \to \infty$. Da die Ausgangsfolge (x_n) eine Fundamentalfolge ist, gilt auch $\|x - x_n\|_1 \to 0$ für $n \to \infty$, womit die Vollständigkeit von $\mathscr{L}^1$ bewiesen ist.

Bemerkung. Aus diesem Beweis und Satz I folgt: *Ist $x_n \in \mathscr{L}^1$ und gilt $\|x - x_n\|_1 \to 0$, so existiert eine Teilfolge $(x_{n_k}(t))$, so daß $x_{n_k}(t) \to x(t)$ für fast alle $t \in T$.*

Der Raum $\mathscr{L}^1$ enthält L als Teilraum. Folglich ist die abgeschlossene Hülle von L in $\mathscr{L}^1$ ein bezüglich der Norm $\|x\|_1$ vollständiger Teilraum von $\mathscr{L}^1$. Wir bezeichnen ihn mit L^1. Dann ist L in L^1 dicht. Die zu L^1 gehörenden Funktionen $x(t)$ sollen *summierbar* genannt werden.

Auf Grund der Ungleichung (1) aus Nr. 2 gilt

$$|I(x)| \leqq \|x\|_1 \tag{1}$$

für alle $x \in L$. Dies bedeutet, daß $I(x)$ ein beschränktes lineares Funktional über L ist und folglich auf eindeutige Weise bei Erhaltung der Ungleichung (1) zu einem beschränkten linearen Funktional über L^1 fortgesetzt werden kann (vgl. § 4, Nr. 4, Satz III). Wir bezeichnen dieses Funktional wieder mit $I(x)$ und nennen es das *Integral* der Funktion $x \in L^1$.

Wie man leicht sieht, *ist jede Nullfunktion $x(t)$ summierbar, und zwar ist* $I(|x|) = 0$; eine Nullfunktion kann nämlich als Limes einer Folge von Funktionen $x_n = 0$, die zu L gehören, aufgefaßt werden (Limes bezüglich der Norm $\| \ \|_1$).

Die Gesamtheit aller reellen Funktionen $x(t) \in L^1$ ist ein reeller linearer Teilraum von L^1, den wir den *reellen Raum* L^1 nennen.

Aus dem Vorhergehenden folgt, daß auch *der reelle Raum L^1 vollständig ist.*

III. *Ist $x \in L^1$, so gilt $|x| \in L^1$ und*

$$|I(x)| \leqq I(|x|). \tag{2}$$

Beweis. Es sei $x_n \in L$, und es gelte $\| x - x_n \|_1 \to 0$. Aus

$$\| x| - |x_n \| \leqq |x - x_n| \text{ folgt } \| |x| - |x_n| \|_1 \leqq \| x - x_n \|_1 \to 0.$$

Da $|x_n| \in L^+$ ist, folgt hieraus $|x| \in L^1$. Geht man in der Ungleichung $|I(x_n)| \leqq I(|x_n|)$ zur Grenze über, so erhält man unter Berücksichtigung der Stetigkeit von $I(x)$ bezüglich der Norm $\| x \|_1$ sofort die Ungleichung (2).

IV. *Aus $x \in L^1$ und $x \geqq 0$ folgt*

$$I(x) = \bar{I}(x) = \| x \|_1. \tag{3}$$

Beweis. Zunächst gilt (3) offenbar für alle $x \in L^+$. Da $I(x)$ und $\| x \|_1$ bezüglich der Norm $\| x \|_1$ stetig sind und jedes nichtnegative Element x aus L^1 bezüglich dieser Norm Grenzwert einer Folge von Elementen $x_n \in L^+$ ist (vgl. den Beweis von Satz III), gilt (3) auch für alle nichtnegativen x aus L^1.

Aus Satz III folgt

V. *Mit den reellen Funktionen x und y gehören auch*

$$x \cap y = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|) \quad \textit{und} \quad x \cup y = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \quad \textit{zu } L^1.$$

Ferner gilt der Satz

VI. *Gilt fast überall $x_n \geqq 0$, ist $x_n \in L^1$ und konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} I(x_n)$, so konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} x_n$ in L^1 bezüglich der Norm gegen ein Element $x \in L^1$, und es gilt $I(x) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} I(x_n)$.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus Satz I und der Stetigkeit der Funktion $I(x)$ bezüglich der Norm von L^1.

VII. *Ist x_n eine nichtfallende (nichtwachsende) Folge reeller Funktionen aus L^1 und ist die Folge $I(x_n)$ nach oben (nach unten) beschränkt, so gehört die Grenzfunktion $x = \lim x_n$ zu L^1, und es gilt $I(x) = \lim I(x_n)$.*

Beweis. Wir betrachten den Fall einer nichtfallenden Folge (der Fall einer nichtwachsenden Folge läßt sich auf diesen durch Übergang von x_n, x zu $x_1 - x_n$, $x_1 - x$ zurückführen). Es gilt $x_{n+1} - x_n \geqq 0$ für $n = 1, 2, 3, \ldots$. Dann ist fast überall $x = x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots$, wobei die Reihe $I(x_2 - x_1) + I(x_3 - x_2) + \cdots = \lim I(x_n) - I(x_1)$ konvergiert. Nach Satz VI

ist $x - x_1 = (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots \in L^1$ und $I(x - x_1) = \lim I(x_n) - I(x_1)$, woraus $x \in L^1$ und $I(x) = \lim I(x_n)$ folgt.

VIII. *Eine nach unten halbstetige nichtnegative Funktion $x(t)$ ist genau dann summierbar, wenn $\bar{I}(x) < +\infty$ ist.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung ist klar. Um zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist, nehmen wir $x \in M^+$ und $\bar{I}(x) < +\infty$ an. Auf Grund der Definition von $\bar{I}(x)$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $y \in L^+$ derart, daß $y \leqq x$ und $\bar{I}(x) < I(y) + \varepsilon$ ist. Nun ist aber $x - y$ halbstetig nach unten, und überdies gilt $x - y \geqq 0$. Folglich muß auf Grund von Satz IV aus Nr. 3

$$\bar{I}(x) = \bar{I}(y + x - y) = I(y) + \bar{I}(x - y) \quad \text{und} \quad \bar{I}(x - y) = \bar{I}(x) - I(y) < \varepsilon$$

gelten. Also ist $x - y \in L^1$ und $\|x - y\|_1 < \varepsilon$. Da y zu L^1 gehört und L^1 vollständig ist, liegt x in L^1.

IX. *Eine von oben halbstetige nichtnegative Funktion $x(t)$ ist genau dann summierbar, wenn $\bar{I}(x) < +\infty$ ist.*

Beweis. Es braucht offenbar nur bewiesen zu werden, daß die Bedingung hinreichend ist. Es sei also $x(t)$ eine von oben halbstetige Funktion mit $x(t) \geqq 0$, und es gelte $\bar{I}(x) < +\infty$. Auf Grund der Definition von $\bar{I}(x)$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $y \in M^+$ derart, daß $y \geqq x$ und $I(y) \leqq \bar{I}(x) + \varepsilon$ ist. Dann gilt[1]) $y - x \in M^+$ und $\bar{I}(y - x) < \varepsilon$. Hieraus folgt $y - x \in L^1$. Nun gilt aber fast überall $x = y - (y - x)$, und folglich ist $x \in L^1$.

X. *Ist die nichtnegative Funktion x summierbar, so gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $z \in N^+$ mit bikompaktem Träger und eine Funktion $y \in M^+$ mit der Eigenschaft, daß fast überall $z \leqq x \leqq y$ gilt und $\bar{I}(y - z) < \varepsilon$ ist.*

Beweis. Ist $x \geqq 0$ und $x \in L^1$, so gibt es eine Funktion $u \in L^+$, für die $I(|x - u|) < \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Nach Definition von $\bar{I}$ bedeutet dies, daß es eine Funktion $v \in M^+$ gibt, für die $\bar{I}(v) < \frac{\varepsilon}{2}$ ist und fast überall $|x - u| \leqq v$ gilt. Somit gilt fast überall $-v \leqq x - u \leqq v$ und $(u - v) \cup 0 \leqq x \leqq u + v$, so daß die Funktionen $z = (u - v) \cup 0$ und $y = u + v$ das Gewünschte leisten.[2])

XI. *Zu jeder nichtnegativen summierbaren Funktion $x(t)$ gibt es eine nichtfallende Folge von Funktionen $z_n \in N^+$ mit bikompakten Trägern und eine nichtwachsende Folge von Funktionen $y_n \in M^+$ derart, daß fast überall*

$$\lim_{n \to \infty} z_n \leqq x \leqq \lim_{n \to \infty} y_n$$

---

[1]) Wir setzen hier $y(t) - x(t) = \infty$ in den Punkten $t = t_0$, in denen $y(t_0) = x(t_0) = +\infty$ ist. Wie man leicht sieht, ist dann $y - x$ von unten halbstetig.

[2]) Aus dem Beweis geht hervor, daß für eine überall definierte und endliche Funktion die Beziehung $z \leqq x \leqq y$ überall erfüllt ist.

gilt und

$$I\left(\lim_{n\to\infty} z_n\right) = I(x) = I\left(\lim_{n\to\infty} y_n\right),$$

$$\lim_{n\to\infty} z_n \sim x \sim \lim_{n\to\infty} y_n$$

ist.

Beweis. Wird in Satz X nacheinander $\varepsilon = \frac{1}{n}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ genommen, so erhält man Funktionen $z_n' \in N^+$ mit bikompakten Trägern und Funktionen $y_n' \in M^+$ derart, daß $z_n' \leqq x \leqq y_n'$ und $\bar{I}(y_n' - z_n') < \frac{1}{n}$ gilt. Dann leisten aber die Funktionen

$$z_n = z_1' \cup z_2' \cup \ldots \cup z_n', \quad y_n = y_1' \cap y_2' \cap \ldots \cap y_n'$$

das Gewünschte, weil nach Satz VII

$$I\left(x - \lim_{n\to\infty} z_n\right) = \lim_{n\to\infty} I(x - z_n) \leqq \lim_{n\to\infty} I(y_n - z_n)$$

$$\leqq \lim_{n\to\infty} \bar{I}(y_n' - z_n') \leqq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$$

gilt. Entsprechend ergibt sich $I\left(\lim_{n\to\infty} y_n - x\right) = 0$.

8. Summierbare Mengen. Eine Menge A heißt *summierbar*, wenn ihre charakteristische Funktion $\xi_A(t)$ summierbar ist. In diesem Fall wird die Zahl $\mu(A) = I(\xi_A)$ das *Maß* (genauer, das *I-Maß*) der Menge A genannt. Auf Grund von Satz IV aus Nr. 7 *stimmt das Maß einer summierbaren Menge mit ihrem äußeren Maß* $\bar{\mu}(A)$ *überein,* $\mu(A) = \bar{\mu}(A)$.

I. *Jede Nullmenge ist summierbar und hat das Maß Null.*

Ist nämlich A eine Nullmenge, so ist ξ_A eine Nullfunktion; folglich ist $\xi_A \in L^1$ und $\mu(A) = I(\xi_A) = 0$.

II. *Sind* A_1, A_2 *summierbar und ist* $A_1 \subset A_2$, *so gilt* $\mu(A_1) \leqq \mu(A_2)$.

Die Behauptung folgt unmittelbar aus Nr. 5, Formel (1).

III. *Die Vereinigung von endlich vielen und der Durchschnitt von endlich oder abzählbar vielen summierbaren Mengen sind summierbare Mengen. Für endlich viele paarweise disjunkte summierbare Mengen* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ *gilt*

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \cdots + \mu(A_n).$$

Die Behauptungen folgen unmittelbar aus den Beziehungen

$$\xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \xi_{A_1} \cup \xi_{A_2} \cup \ldots \cup \xi_{A_n},$$

$$\xi_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} = \xi_{A_1} \cap \xi_{A_2} \cap \ldots \cap \xi_{A_n},$$

$$\xi_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n} \searrow \xi_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots},^{1)}$$

$$\xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} = \xi_{A_1} + \xi_{A_2} + \cdots + \xi_{A_n}, \text{ wenn } A_j \cap A_k = \emptyset \text{ für } j \neq k,$$

[1]) Die Symbole $x_n \searrow x$ $(x_n \nearrow x)$ bedeuten, daß x_n eine nichtwachsende (nichtfallende) Folge ist, die gegen x konvergiert.

den Sätzen V und VII aus Nr. 7 sowie der Linearität des Raumes L^1 und des Funktionals $I(x)$.

IV. *Sind die Mengen* $A_1, A_2, \ldots$ *summierbar und konvergiert die Reihe* $\mu(A_1)+\mu(A_2)+\cdots$, *so ist die Menge* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ *summierbar, und es gilt*

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) \leqq \mu(A_1)+\mu(A_2)+\cdots.$$

Sind die Mengen $A_1, A_2, \ldots$ *überdies paarweise disjunkt, so gilt*

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \mu(A_1)+\mu(A_2)+\cdots.$$

Die Behauptungen folgen aus den Beziehungen

$$\xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n} \nearrow \xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots} \leqq \xi_{A_1} + \xi_{A_2} + \cdots,$$
$$\xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots} = \xi_{A_1} + \xi_{A_2} + \cdots, \text{ wenn } A_j \cap A_k = \emptyset \quad \text{für} \quad j \neq k,$$

und den Sätzen V, VI und VII aus Nr. 7.

V. *Sind* A_1, A_2 *summierbar und gilt* $A_1 \supset A_2$, *so ist* $A_1 - A_2$ *summierbar, und es gilt*

$$\mu(A_1 - A_2) = \mu(A_1) - \mu(A_2).$$

Beweis. Aus $A_1 \supset A_2$ folgt

$$\xi_{A_1 - A_2} = \xi_{A_1} - \xi_{A_2},$$

und die Behauptung ergibt sich aus der Linearität von L^1 und $I(x)$.

VI. *Sind* $A_1, A_2, A_3, \ldots$ *summierbar und gilt* $A_1 \supset A_2 \supset A_3 \supset \ldots$, *so ist*

$$\mu(A_1 \cap A_2 \cap \ldots) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_n).$$

Gilt jedoch $A_1 \subset A_2 \subset \ldots$ *und ist* $\lim_{n\to\infty} \mu(A_n)$ *endlich, so ist* $A_1 \cup A_2 \cup \ldots$ *summierbar und*

$$\mu(A_1 \cup A_2 \cup \ldots) = \lim \mu(A_n).$$

Beweis. Im ersten Fall gilt $\xi_{A_n} \searrow \xi_{A_1 \cap A_2 \cap \ldots}$ und im zweiten Fall $\xi_{A_n} \nearrow \xi_{A_1 \cup A_2 \cup \ldots}$, so daß man nur noch Satz VII aus Nr. 7 anzuwenden braucht.

VII. *Eine offene (abgeschlossene) Menge* A *ist summierbar, wenn* $\bar{\mu}(A) < +\infty$ *ist; insbesondere ist jede offene (abgeschlossene) Menge, die in einer bikompakten Menge enthalten ist, summierbar.*

Die charakteristische Funktion einer offenen (abgeschlossenen) Menge ist nämlich nach unten (nach oben) halbstetig, so daß man nur noch die Sätze VIII und IX aus Nr. 7 und den Satz III aus Nr. 5 anzuwenden braucht.

VIII. *Jede bikompakte Menge ist summierbar; jede offene Menge, deren abgeschlossene Hülle bikompakt ist, ist summierbar.*

Diese Behauptung folgt sofort aus Satz VII.

IX. *Für die Summierbarkeit einer Menge* A *ist notwendig und hinreichend, daß es zu jedem* $\varepsilon > 0$ *eine offene Menge* $U \supset A$ *und eine bikompakte Menge*

$Q \subset A$ gibt derart, daß

$$\mu(U - Q) < \varepsilon$$

ist.

Beweis. Die Bedingung ist hinreichend, weil sie bedeutet, daß $\xi_Q \leqq \xi_A \leqq \xi_U$, $I(\xi_U - \xi_Q) < \varepsilon$ und damit

$$\|\xi_A - \xi_Q\|_1 \leqq \|\xi_U - \xi_Q\|_1 = I(\xi_U - \xi_Q) < \varepsilon$$

ist. Mit $\xi_Q \in L^1$ gilt auch $\xi_A \in L^1$.

Nun sei A summierbar. Nach Nr. 5, Satz IV, gibt es eine Menge U, für die $\mu(U) < \mu(A) + \frac{\varepsilon}{2}$ ist. Weiter gibt es auf Grund von Nr. 7, Satz X, eine Funktion $z \in N^+$ mit bikompaktem Träger Q_z derart, daß $z \leqq \xi_A$ (vgl. die Fußnote 2 auf Seite 138) und $I(\xi_A - z) < \frac{\varepsilon}{4}$ ist. Wir setzen $Q = \{t : z(t) \geqq \delta\}$, $\delta > 0$. Dann ist Q eine abgeschlossene Teilmenge von Q_z und daher bikompakt. Es sei $t \in Q$; dann ist $\xi_A(t) \geqq z(t) \geqq \delta > 0$, also $\xi_A(t) = 1$. Daher gilt $Q \subset A$, und die Menge $B = A - Q$ ist summierbar. Aus der Ungleichung $z \leqq \xi_Q + \delta\xi_B$ folgt, daß $I(z) \leqq \mu(Q) + \delta\mu(B) \leqq \mu(Q) + \delta\mu(A)$ ist. Demzufolge ist

$$\mu(A) < I(z) + \frac{\varepsilon}{4} < \mu(Q) + \delta\mu(A) + \frac{\varepsilon}{4}.$$

Wird nun δ so gewählt, daß $\delta\mu(A) < \frac{\varepsilon}{4}$ ist, so leisten die Mengen U und Q das Gewünschte.

Aus Satz IX folgt: *Das Maß jeder summierbaren Menge A ist die obere Grenze der Maße der bikompakten Mengen $Q \subset A$.*

X. *Ist A summierbar, so gibt es eine Folge offener Mengen $U_n \supset A$ und eine endliche oder abzählbare Folge disjunkter bikompakter Mengen $Q_n \subset A$ derart, daß $\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n - A$ und $A - \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n$ Nullmengen sind.*

Beweis. Wir setzen in Satz IX $\varepsilon = \frac{1}{n}$. Auf diese Weise erhalten wir offene Mengen $U_n \supset A$ mit der Eigenschaft $\mu(U_n - A) < \frac{1}{n}$. Daher gilt

$$\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n - A\right) < \frac{1}{n}$$

für alle n, und es muß $\mu\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} U_n - A\right) = 0$ sein.

Die Mengen Q_n konstruieren wir induktiv. Auf Grund von Satz IX (für $\varepsilon = 1$) gibt es ein $Q_1 \subset A$, für das $\mu(A - Q_1) < 1$ ist. Ferner gibt es auf Grund desselben Satzes $\left(\text{für } \varepsilon = \frac{1}{2}\right)$ ein $Q_2 \subset A - Q_1$ mit $\mu(A - Q_1 - Q_2) < \frac{1}{2}$ usw. Falls $A - Q_1 - \cdots - Q_{n-1}$ noch nicht leer ist, erhalten wir nach dem n-ten Schritt eine Menge $Q_n \subset A - Q_1 - \cdots - Q_{n-1}$, für die $\mu(A - Q_1 - \cdots - Q_n)$ kleiner als $\frac{1}{n}$ ist. Da $\mu\left(A - \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) < \frac{1}{n}$ für alle n ist, muß $\mu\left(A - \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) = 0$ sein.

XI. *Ist $\overline{\mu}(A) < \infty$, so ist A in der Vereinigung einer Nullmenge mit endlich oder abzählbar vielen bikompakten Mengen, die zu der Nullmenge disjunkt sind, enthalten.*

Zum Beweis genügt es, den Satz X auf eine summierbare offene Menge $U \supset A$ anzuwenden (vgl. Nr. 5, Satz IX).

9. Meßbare Mengen. Eine Menge A soll *meßbar* genannt werden, wenn ihr Durchschnitt mit jeder bikompakten Menge summierbar ist. Aus dieser Definition und den Sätzen III und VIII aus Nr. 8 folgt, daß *jede summierbare Menge sowie der Raum T meßbar ist.*

I. *Durchschnitt und Vereinigung von endlich oder abzählbar vielen meßbaren Mengen sind meßbar.*

Beweis. Die Mengen A_n seien meßbar. Ist dann Q irgendeine bikompakte Menge, so sind die Mengen $A_n \cap Q$ summierbar. Aus

$$\left(\bigcap_n A_n\right) \cap Q = \bigcap_n (A_n \cap Q)$$

und Nr. 8, Satz III, folgt, daß $\left(\bigcap_n A_n\right) \cap Q$ summierbar ist. Demzufolge ist $\bigcap_n A_n$ meßbar. Weiter schließen wir aus den Beziehungen

$$\left(\bigcup_n A_n\right) \cap Q = \bigcup_n (A_n \cap Q),$$

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} (A_n \cap Q)\right) \leqq \mu(Q)$$

und Nr. 8, Satz VI, daß $\left(\bigcup_n A_n\right) \cap Q$ summierbar und damit $\bigcup_n A_n$ meßbar ist.

II. *Sind A, B meßbar und gilt $A \supset B$, so ist auch $A - B$ meßbar.*

Für jede bikompakte Menge Q gilt nämlich $(A - B) \cap Q = (A \cap Q) - (B \cap Q)$, so daß nur noch Satz V aus Nr. 8 anzuwenden bleibt.

Insbesondere besagt der letzte Satz: *Das Komplement $T - A$ jeder meßbaren Menge A ist meßbar.*

III. *Alle abgeschlossenen und alle offenen Mengen sind meßbar.*

Beweis. Ist A abgeschlossen und Q bikompakt, so ist $A \cap Q$ bikompakt und damit summierbar. Daher sind alle abgeschlossenen Mengen meßbar. Dann sind aber auch alle offenen Mengen als Komplementärmengen der abgeschlossenen Mengen meßbar.

IV. *Ist A meßbar und $\overline{\mu}(A) < +\infty$, so ist A summierbar.*

Beweis. Auf Grund von Nr. 8, Satz XI, gibt es eine Nullmenge A_0 und zu A_0 disjunkte bikompakte Mengen $Q_1, Q_2, \ldots$ derart, daß $A \subset A_0 + \bigcup Q_n$ ist. Dann ist $A = (A \cap A_0) + \bigcup (A \cap Q_n)$, wobei $A \cap A_0$, $A \cap Q_1$, $A \cap Q_2, \ldots$ disjunkte summierbare Mengen sind. Hieraus folgt für beliebiges n

$$\mu(A \cap A_0) + \mu(A \cap Q_1) + \cdots + \mu(A \cap Q_n)$$
$$= \mu[(A \cap A_0) \cup (A \cap Q_1) \cup \ldots \cup (A \cap Q_n)] \leqq \overline{\mu}(A).$$

Folglich konvergiert die Reihe $\mu(A \cap A_0) + \mu(A \cap Q_1) + \mu(A \cap Q_2) + \cdots$, und A ist nach Nr. 8, Satz IV, summierbar.

V. *Ist A meßbar, $A \subset B$ und B summierbar, so ist auch A summierbar.*

Die Behauptung folgt unmittelbar aus Satz IV, weil $\bar{\mu}(A) \leqq \mu(B) < +\infty$ ist.

Eine Menge A heiße *lokale Nullmenge*, wenn ihr Durchschnitt mit jeder bikompakten Menge eine Nullmenge ist. Aus dieser Definition folgt unmittelbar:

VI. *Jede lokale Nullmenge ist meßbar. Vereinigung und Durchschnitt von endlich oder abzählbar vielen lokalen Nullmengen sind ebenfalls lokale Nullmengen.*

Ferner gilt

VII. *Ist A eine lokale Nullmenge und $\bar{\mu}(A) < +\infty$, so ist A eine Nullmenge.*

Der Beweis dieser Behauptung entspricht dem Beweis von Satz IV.

VIII. *Ist A eine lokale Nullmenge, so gilt $\| x\xi_A \|_1 = 0$ und damit $I(x\xi_A) = 0$ für jede Funktion $x \in L^1$.*

Beweis. Die Behauptung ist für Funktionen x aus L sicher richtig, weil $x\xi_A$ in diesem Fall nur auf der Nullmenge $Q_x \cap A$ (wobei Q_x der Träger von x ist) von Null verschieden ist. Nun gibt es aber zu jeder Funktion $x \in L^1$ eine Folge von Funktionen $x_n \in L$ derart, daß $\| x - x_n \|_1 \to 0$. Dann strebt auch $\| x\xi_A - x_n\xi_A \|_1$ gegen Null, und daher ist

$$\|x\xi_A\|_1 \leqq \|x\xi_A - x_n\xi_A\|_1 + \|x_n\xi_A\|_1 = \|x\xi_A - x_n\xi_A\|_1 \to 0,$$

was aber nur für $\| x\xi_A \|_1 = 0$ möglich ist.

Von einer Eigenschaft wollen wir sagen, sie gelte *lokal fast überall auf T*, wenn die Menge aller Punkte t, für die sie nicht gilt, eine lokale Nullmenge ist.

10. Meßbare Funktionen. Wir betrachten jetzt reelle Funktionen $x(t)$, die lokal fast überall definiert und endlich sind. Eine solche Funktion $x(t)$ heiße *meßbar*, wenn die Menge[1] $A = \{t : x(t) > a\}$ für beliebiges reelles a meßbar ist. Offenbar ist jede Konstante eine meßbare Funktion. Weiter folgt aus den Beziehungen

$$\{t : x(t) \leqq a\} = T - \{t : x(t) > a\},$$
$$\{t : a < x(t) \leqq b\} = \{t : x(t) > a\} - \{t : x(t) > b\},$$
$$\{t : x(t) = a\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left\{t : a - \frac{1}{n} < x(t) \leqq a\right\},$$
$$\{t : x(t) < a\} = \{t : x(t) \leqq a\} - \{t : x(t) = a\},$$
$$\{t : x(t) \geqq a\} = \{t : x(t) > a\} + \{t : x(t) = a\}$$

und den Sätzen I und II aus Nr. 9, daß für meßbare Funktionen $x(t)$ auch die folgenden Mengen meßbar sind:

$\{t : x(t) \leqq a\}$, $\{t : a < x(t) \leqq b\}$, $\{t : x(t) = a\}$, $\{t : x(t) < a\}$ und $\{t : x(t) \geqq a\}$.

[1]) Hierbei werden nur diejenigen $t \in T$ berücksichtigt, für die $x(t)$ definiert ist.

Zwei Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ sollen *lokal äquivalent* genannt werden, wenn $\{t : x_1(t) \neq x_2(t)\}$ eine lokale Nullmenge ist.

I. *Sind* $x_1(t)$, $x_2(t)$ *lokal äquivalent und ist* $x_1(t)$ *meßbar, so ist auch* $x_2(t)$ *meßbar.*

Beweis. Wir setzen

$$A_1 = \{t : x_1(t) > a\},\ A_2 = \{t : x_2(t) > a\},\ B = \{t : x_1(t) \neq x_2(t)\}.$$

Auf Grund der Beziehungen $A_2 - A_1 \cap A_2 \subset B$ und $A_1 - A_1 \cap A_2 \subset B$ sind $A_2 - A_1 \cap A_2$ und $A_1 - A_1 \cap A_2$ lokale Nullmengen. Hieraus und aus der Meßbarkeit von A_1 können wir schließen, daß die Mengen

$$A_1 \cap A_2 = A_1 - (A_1 - A_1 \cap A_2) \quad \text{und} \quad A_2 = A_1 \cap A_2 + (A_2 - A_1 \cap A_2)$$

meßbar sind.

II. *Eine Funktion* $x(t)$ *ist meßbar, wenn die Mengen* $\{t : x(t) > r\}$ *für beliebiges rationales* r *meßbar sind.*

Beweis. Es sei a irgendeine reelle Zahl und $\{r_n\}$ eine fallende Folge rationaler Zahlen, die gegen a konvergiert. Dann gilt $\{t : x(t) > a\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t : x(t) > r_n\}$. Folglich ist die Menge $\{t : x(t) > a\}$ meßbar.

III. *Sind* $x_1(t)$ *und* $x_2(t)$ *meßbar, so ist die Menge* $A = \{t : x_1(t) < x_2(t)\}$ *meßbar.*

Beweis. Die Folge $\{r_n\}$ bestehe aus allen rationalen Zahlen. Dann gilt

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} [\{t : x_1(t) < r_n\} \cap \{t : x_2(t) > r_n\}],$$

so daß A tatsächlich meßbar ist.

IV. *Sind* x_1, x_2 *meßbar und ist* c *eine beliebige reelle Zahl, so gilt folgendes:* 1. cx_1 *ist meßbar;* 2. $x_1 + c$ *ist meßbar;* 3. $x_1 + x_2$ *ist meßbar*[1]*;* 4. $|x_1|$ *ist meßbar;* 5. x_1^2 *ist meßbar;* 6. $x_1 x_2$ *ist meßbar;* 7. $\frac{x_1}{x_2}$ *ist meßbar, wenn* x_2 *nur auf einer lokalen Nullmenge gleich Null ist.*

Beweis. Die Behauptung 1 folgt aus den Beziehungen

$$\{t : cx_1 > a\} = \left\{t : x_1 > \frac{a}{c}\right\} \quad \text{für} \quad c > 0,$$

$$\{t : cx_1 < a\} = \left\{t : x_1 < \frac{a}{c}\right\} \quad \text{für} \quad c < 0;$$

für $c = 0$ ist cx_1 natürlich auch meßbar, weil die Konstante Null meßbar ist. Die Behauptung 2 folgt aus

$$\{t : x_1 + c > a\} = \{t : x_1 > a - c\},$$

---

[1]) In den Punkten t, in denen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ keine endlichen Werte annehmen, schreiben wir der Summe $x_1(t) + x_2(t)$ beliebige Werte zu oder sehen sie als nicht definiert an. Da diese Punkte eine lokale Nullmenge bilden, ist die Summe in jedem Fall meßbar.

die Behauptung 3 aus der Beziehung

$$\{t : x_1 + x_2 > a\} = \{t : x_1 > a + (-1)\, x_2\}$$

und Satz III. Weiter ergeben sich die Behauptungen 4 und 5 aus den Beziehungen

$$\{t : |x_1| > a\} = \{t : x_1 > a\} \cup \{t : x_1 < -a\},$$

$$\{t : x_1^2 > a\} = \begin{cases} \{t : x_1 > \sqrt{a}\} \cup \{t : x_1 < -\sqrt{a}\} & \text{für} \quad a \geqq 0, \\ T & \text{für} \quad a < 0. \end{cases}$$

Die Behauptung 6 läßt sich aus der Formel

$$x_1 x_2 = \frac{1}{4} [(x_1 + x_2)^2 - (x_1 - x_2)^2]$$

ablesen. Unter der Voraussetzung, daß x_2 nur auf einer lokalen Nullmenge verschwindet, folgt auf Grund der Beziehungen[1])

$$\left\{t : \frac{1}{x_2} > a\right\} = \left\{t : x_2 < \frac{1}{a}\right\} \qquad \text{für} \quad a > 0,$$

$$\left\{t : \frac{1}{x_2} > a\right\} = \{t : x_2 \geqq 0\} \cup \left\{t : x_2 < \frac{1}{a}\right\} \qquad \text{für} \quad a < 0,$$

$$\left\{t : \frac{1}{x_2} > 0\right\} = \{t : x_2 \geqq 0\} \qquad \text{für} \quad a = 0$$

schließlich, daß $\frac{1}{x_2}$ und damit auch $\frac{x_1}{x_2} = x_1 \cdot \frac{1}{x_2}$ meßbar ist.

V. *Ist die nichtnegative Funktion $x(t)$ meßbar, so ist auch die Funktion $[x(t)]^c$ für beliebiges positives c meßbar.*

In der Tat, es gilt

$$\{t : [x(t)]^c > a\} = \left\{t : x(t) > a^{\frac{1}{c}}\right\} \qquad \text{für} \quad a \geqq 0,$$

$$\{t : [x(t)]^c > a\} = T \qquad \text{für} \quad a < 0.$$

VI. *Ist $x_n(t)$ eine Folge meßbarer Funktionen, die lokal fast überall beschränkt ist, so sind $\sup_n x_n(t)$ und $\inf_n x_n(t)$ meßbar.*

Beweis. Die Meßbarkeit der Funktion $\sup_n x_n(t)$ folgt aus der Beziehung

$$\left\{t : \sup_n x_n(t) > a\right\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{t : x_n(t) > a\},$$

während sich die Meßbarkeit von $\inf_n x_n(t)$ durch Übergang zu $-x_n(t)$ ergibt.

---

[1]) In den Punkten t, in denen $x_2(t) = 0$ ist, setzen wir $\frac{1}{x_2(t)} = +\infty$. Würden wir $\frac{1}{x_2(t)}$ anders definieren, so hätte dies keinen Einfluß auf die Meßbarkeit der Funktion $\frac{1}{x_2(t)}$, weil die Menge der betreffenden Punkte t nach Voraussetzung eine lokale Nullmenge ist.

VII. *Ist $x_n(t)$ eine Folge meßbarer Funktionen, die lokal fast überall gegen einen bestimmten Grenzwert konvergiert, so ist die Grenzfunktion*[1] $x(t)$ *ebenfalls meßbar.*

Diese Behauptung folgt unmittelbar aus der Formel

$$\lim_n x_n(t) = \inf_n \sup_k x_{n+k}(t) = \sup_n \inf_k x_{n+k}(t)$$

und Satz VI.

Eine komplexe Funktion $x(t) = x_1(t) + i x_2(t)$ werde *meßbar* genannt, wenn ihr Real- und Imaginärteil, $x_1(t)$ und $x_2(t)$, meßbar sind.

Aus dieser Definition und den Sätzen IV und V folgt, daß mit x und y auch $|x|$, cx (für beliebiges komplexes c), $x + y$, xy und $\frac{x}{y}$ meßbar sind; im Fall des Quotienten $\frac{x}{y}$ ist zu fordern, daß $\{t : y = 0\}$ eine lokale Nullmenge ist. Ferner bleibt der Satz VII für komplexe Funktionen gültig.

VIII. *Eine Funktion $x(t)$ ist genau dann summierbar, wenn sie meßbar und wenn $\bar{I}(|x|) < +\infty$ ist.*

Beweis. Es sei $x \in L^1$. Dann gibt es eine Folge $x_n \in L$, für die $\|x - x_n\|_1 \to 0$ gilt. Aus dem Beweis der Sätze II und I, Nr. 7, geht hervor, daß es eine Teilfolge $\{x_{n_k}\}$ gibt, die fast überall gegen x konvergiert. Da die x_{n_k} meßbar sind, ist nach Satz VII auch x meßbar. Außerdem gilt $\bar{I}(|x|) = I(|x|) < \infty$ wegen $|x| \in L^1$.

Nun sei umgekehrt x meßbar und $\bar{I}(|x|) < +\infty$. Dann ist $x = y + iz$, wobei y und z reelle meßbare Funktionen sind. Auch gilt $\bar{I}(|y|) < +\infty$ und $\bar{I}(|z|) < +\infty$. Demnach genügt es, reelle Funktionen zu betrachten. Da in diesem Fall $x = x \cup 0 - (-x) \cup 0$ und $\bar{I}(x \cup 0) < +\infty$, $\bar{I}((-x) \cup 0) < +\infty$ gilt, genügt es ferner, wenn nur der Fall $x \geqq 0$ betrachtet wird.

Wir setzen $A = \{t : x(t) > a\}$ mit $a > 0$. Die Menge A ist meßbar. Auf Grund der Ungleichung $\xi_A \leqq \frac{1}{a} x$ gilt ferner $\bar{\mu}(A) \leqq \frac{1}{a} \bar{I}(x) < +\infty$. Folglich ist A summierbar (Nr. 9, Satz IV). Weiter folgt aus der Voraussetzung $\bar{I}(x) < +\infty$, daß $\{t : x(t) = +\infty\}$ eine Nullmenge ist (Nr. 5, Satz VII). Daher können wir die Funktion $x(t)$ als überall definiert und endlich annehmen; sie könnte anderenfalls durch eine ihr äquivalente Funktion mit diesen Eigenschaften ersetzt werden. Wir setzen nun

$$A_{nm} = \{t : 2^{-n} m < x(t) \leqq 2^{-n}(m+1)\}, \quad \xi_{nm} = \xi_{A_{nm}}$$

und

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n} m \, \xi_{nm}.$$

Wie oben bewiesen wurde, sind die Mengen

$$A_{nm} = \{t : x(t) > 2^{-n} m\} - \{t : x(t) > 2^{-n}(m+1)\}$$

---

[1]) Wieder werden nur diejenigen t berücksichtigt, für die $x(t)$ definiert ist.

summierbar, so daß ξ_{nm} zu L^1 gehört. Außerdem gilt $x_n \leqq x$ und daher $\sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n} m I(\xi_{nm}) \leqq \bar{I}(x) < +\infty$. Folglich ist $x_n \in L^1$ (vgl. Nr. 7, Satz VI). Nun gilt aber $x_n \nearrow x$ und $I(x_n) \leqq \bar{I}(x) < +\infty$, so daß auch $x \in L^1$ (vgl. Nr. 7, Satz VI).

IX. *Ist x meßbar und gilt fast überall $|x| \leqq y$ mit $y \in L^1$, so ist auch $x \in L^1$.*

Es gilt nämlich $\bar{I}(|x|) \leqq \bar{I}(y) < +\infty$, so daß die Behauptung aus Satz VIII folgt.

Eine nichtnegative Funktion $x(t)$ heißt LEBESGUE-*summierbar*, wenn die Menge $A = \{t : x(t) > a\}$ für beliebiges $a > 0$ summierbar ist und wenn $\sup \underline{s} = \inf \bar{s} < +\infty$ gilt, wobei $\underline{s} = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \mu(A_k)$, $\bar{s} = \sum_{k=1}^{\infty} c_{k+1} \mu(A_k)$ und

$$A_k = \{t : c_k < x(t) \leqq c_{k+1}\}, \quad 0 < c_1 < c_2 < \cdots < c_n \to +\infty$$

ist[1]); $\sup \underline{s}$ und $\inf \bar{s}$ beziehen sich auf alle möglichen derartigen Systeme von Zahlen $c_1, c_2, \ldots$; den Summen $\underline{s}$ und $\bar{s}$ wird der Wert $+\infty$ zugeschrieben, wenn die entsprechenden Reihen divergieren. Im Fall einer nichtnegativen LEBESGUE-summierbaren Funktion $x(t)$ wird die Zahl $\sup \underline{s} = \inf \bar{s}$ das LEBESGUE-*Integral* der Funktion $x(t)$ genannt und mit $\int_T x(t)\,d\mu$ bezeichnet.

Eine beliebige reelle Funktion $x(t)$ heißt LEBESGUE-summierbar, wenn die Funktionen $x_1 = x \cap 0$ und $x_2 = (-x) \cap 0$ LEBESGUE-summierbar sind. Das LEBESGUE-Integral von $x(t)$ ist per definitionem

$$\int x(t)\,d\mu = \int x_1(t)\,d\mu - \int x_2(t)\,d\mu.$$

Schließlich wird eine komplexe Funktion $x(t) = x_1(t) + i x_2(t)$ LEBESGUE-summierbar genannt, wenn die reellen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(t)$ LEBESGUE-summierbar sind. In diesem Fall setzt man $\int x(t)\,d\mu = \int x_1(t)\,d\mu + i \int x_2(t)\,d\mu$.

Bemerkt sei, daß die Zerlegungen $c = \{c_k\}_{k=1,2,3,\ldots}$ eine gerichtete Menge bilden, die in folgendem Sinne halbgeordnet ist: Man schreibt $c > c'$, wenn die Menge c' der Zerlegungspunkte $c'_1, c'_2, c'_3, \ldots$ eine Teilmenge der Menge c der Zerlegungspunkte $c_1, c_2, c_3, \ldots$ ist. Ist $c > c'$, so gilt für die zugehörigen oberen bzw. unteren Integralsummen $\bar{s}(c) \leqq \bar{s}(c')$ bzw. $\underline{s}(c) \geqq \underline{s}(c')$. Daher ist $\sup \underline{s} = \lim_c \underline{s}$ und $\inf \bar{s} = \lim_c \bar{s}$, so daß für eine LEBESGUE-summierbare nichtnegative Funktion $x(t)$

$$\int x(t)\,d\mu = \lim \underline{s} = \lim \bar{s}$$

gilt.

X. *Ist $x(t) \in L^1$, so ist $x(t)$* LEBESGUE-*summierbar und $I(x) = \int_T x(t)\,d\mu$. Umgekehrt gilt: Ist $x(t)$* LEBESGUE-*summierbar, so ist $x \in L^1$ und*

$$I(x) = \int_T x(t)\,d\mu.$$

---

[1]) $\bar{s}$ und $\underline{s}$ werden die den Zerlegungspunkten $c_1, c_2, c_3, \ldots$ entsprechende *obere* und *untere Integralsumme* genannt.

Beweis. Wie schon beim Beweis von Satz VIII dürfen wir uns auch hier auf den Fall einer Funktion $x \geqq 0$ beschränken, die überall definiert und endlich ist. Es sei $x \in L^1$. Die Größen A_{nm}, ξ_{nm} und x_n mögen dieselbe Bedeutung wie beim Beweis von Satz VIII haben. Außerdem setzen wir noch $y_n = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n}(m+1)\,\xi_{nm}$. Dann gilt $x_n \leqq x \leqq y_n$, $x_n \nearrow x$, $y_n \searrow x$. Wegen

$$y_n - x_n = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n}\xi_{nm} \leqq \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n} m\,\xi_{nm} = x_n \leqq x$$

gilt ferner $\bar{I}(y_n) \leqq 2I(x) < +\infty$. Daher ist $y_n \in L^1$, und es gilt

$$I(x_n) \to I(x), \quad I(y_n) \to I(x) \tag{1}$$

(vgl. Nr. 7, Satz VII). Nun sind aber

$$I(x_n) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n} m\,\mu(A_{nm}), \quad I(y_n) = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n}(m+1)\,\mu(A_{nm}) \tag{2}$$

untere bzw. obere Integralsumme für $x(t)$. Daher bedeutet (1), daß $x(t)$ LEBESGUE-summierbar und $\int x(t)\,d\mu = I(x)$ ist.

Umgekehrt sei nun $x(t)$ LEBESGUE-summierbar. Dann konvergieren die Summen (2) gegen $\int_T x(t)\,d\mu$ (vgl. den Absatz vor Satz X); folglich gilt $\|x - x_n\|_1 = \bar{I}(x - x_n) \leqq I(y_n - x_n) \to 0$. Hieraus folgt $x \in L^1$, also ist $I(x) = \int_T x(t)\,d\mu$.

XI. *Ist $x \in L^1$ und A_n eine Folge summierbarer Mengen mit der Eigenschaft $\mu(A_n) \to 0$, so gilt $I(x\xi_{A_n}) = \int_{A_n} x(t)\,d\mu \to 0$.*[1]

Beweis. Die Funktionen $x\xi_{A_n}$ sind meßbar und auf Grund der Ungleichung $|x\xi_{A_n}| \leqq |x|$ auch summierbar. Nun sei $y \in L$ eine Funktion, für die $\|x - y\|_1$ kleiner als $\frac{\varepsilon}{2}$ ist. Dann gilt

$$\|x\xi_{A_n} - y\xi_{A_n}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und damit} \quad |I(x\xi_{A_n}) - I(y\xi_{A_n})| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Ist andererseits $|y| \leqq c$, so gilt $|y\xi_{A_n}| \leqq c\xi_{A_n}$ und folglich $\|y\xi_{A_n}\|_1 \leqq c\mu(A_n)$. Für hinreichend große n gilt also

$$|I(x\xi_{A_n})| \leqq |I(x\xi_{A_n}) - I(y\xi_{A_n})| + \|y\xi_{A_n}\|_1 < \frac{\varepsilon}{2} + c\mu(A_n) < \varepsilon.$$

XII. *Jede stetige Funktion ist meßbar.*

Ist nämlich $x(t)$ eine reelle stetige Funktion, so sind die Mengen $\{t : x(t) > a\}$ offen und damit meßbar. Dann gilt unsere Behauptung aber auch für jede komplexe Funktion.

Entsprechend beweist man, daß alle fast überall endlichen Funktionen aus M^+ und N^+ meßbar sind.

---

[1]) Ist A eine beliebige meßbare Menge und $x(t)$ eine summierbare Funktion, so wird unter $\int_A x(t)\,d\mu$ die Größe $\int \xi_A(t)\,x(t)\,d\mu$ verstanden.

11. Der reelle Raum L^2. Mit L^2 werde die Gesamtheit aller meßbaren reellen Funktionen $x(t)$ bezeichnet, für die $x^2 \in L^1$ gilt. Hierbei sollen einander äquivalente Funktionen wiederum als nicht verschieden angesehen werden. Mit $x \in L^2$ ist offenbar auch $cx \in L^2$ für alle reellen c. Ferner ist mit $x, y \in L^2$ auch $x + y \in L^2$ wegen $(x+y)^2 \leqq 2x^2 + 2y^2$ (vgl. Nr. 10, Satz IV und IX). Folglich ist L^2 ein linearer Raum.

Aus $x, y \in L^2$ folgt $xy \in L^1$; es gilt nämlich

$$xy = \frac{1}{4}(|x+y|^2 - |x-y|^2).$$

Durch

$$\langle x, y \rangle = I(xy)$$

wird in L^2 ein skalares Produkt definiert; denn wie man sofort sieht, sind hierbei alle Axiome des skalaren Produkts erfüllt. Also ist L^2 nunmehr ein reeller euklidischer Raum, der sogenannte *reelle Raum* L^2. Die durch das skalare Produkt in L^2 festgelegte Norm soll mit $\|x\|_2$ bezeichnet werden, also

$$\|x\|_2 = \sqrt{\langle x, x \rangle} = \sqrt{I(x^2)}.$$

Die SCHWARZsche Ungleichung hat dann die Form

$$|I(xy)|^2 \leqq I(x^2)\, I(y^2).$$

I. *Der reelle Raum L^2 ist vollständig.*

Beweis. Es sei x_n eine Fundamentalfolge aus L^2. Dann gibt es eine Teilfolge x_{n_k}, für die

$$\|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_2 < \frac{1}{2^{k+1}}$$

ist. Die aus den Elementen dieser Teilfolge gebildete Reihe

$$\|x_{n_1}\|_2 + \|x_{n_2} - x_{n_1}\|_2 + \|x_{n_3} - x_{n_2}\|_2 + \cdots$$

konvergiert. Hieraus folgt, daß die Funktion

$$z = |x_{n_1}| + |x_{n_2} - x_{n_1}| + |x_{n_3} - x_{n_2}| + \cdots$$

zu L^2 gehört; bezeichnet man nämlich mit z_k die k-te Partialsumme dieser Reihe, so gilt $z_k^2 \nearrow z^2$, $z_k^2 \in L^1$, und

$$\|z_k^2\|_1 = \|z_k\|_2^2 \leqq (\|x_{n_1}\|_2 + \|x_{n_2} - x_{n_1}\|_2 + \cdots)^2$$

(vgl. Nr. 7, Satz VII). Entsprechend ergibt sich, daß auch

$$u = (|x_{n_1}| - x_{n_1}) + [|x_{n_2} - x_{n_1}| - (x_{n_2} - x_{n_1})] + \cdots$$

zu L^2 gehört. Damit gehört dann aber auch die Differenz $x = z - u$ zu L^2:

$$x = z - u = x_{n_1} + (x_{n_2} - x_{n_1}) + \cdots = \lim_{k\to\infty} x_{n_k} \in L^2.$$

Hierfür gilt

$$\begin{aligned}\|x - x_{n_k}\|_2 &= \|(x_{n_{k+1}} - x_{n_k}) + (x_{n_{k+2}} - x_{n_{k+1}}) + \cdots\|_2 \\ &\leqq \|x_{n_{k+1}} - x_{n_k}\|_2 + \|x_{n_{k+2}} - x_{n_{k+1}}\|_2 + \cdots \to 0 \quad \text{für} \quad k \to \infty.\end{aligned}$$

Da x_n eine Fundamentalfolge aus L^2 ist, gilt dann aber auch $\|x - x_n\|_2 \to 0$ für $n \to \infty$, womit die Vollständigkeit von L^2 bewiesen ist.

Der Satz I besagt, daß *der reelle Raum L^2 ein reeller* HILBERT*scher Raum ist.*

II. *Die Menge L ist in L^2 dicht.*

Beweis. Es genügt offenbar nachzuweisen, daß es zu jeder nichtnegativen Funktion $x \in L^2$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion $y \in L^+$ gibt, für die $\|x-y\|_2 < \varepsilon$ ist.

Hierzu setzen wir $x_n = x \cap n$. Dann ist x_n meßbar, und es gilt $0 \leqq x_n^2 < x^2$, $x_n \nearrow x$. Nach Nr. 10, Satz IX, folgt hieraus $x_n^2 \in L^1$. Es gilt also

$$x_n \in L^2, \quad x - x_n \in L^2, \quad (x-x_n)^2 \in L^1 \quad \text{und} \quad (x-x_n)^2 \to 0$$

Demzufolge gilt (vgl. Nr. 7, Satz VII)

$$\|x - x_n\|_2^2 = I((x-x_n)^2) \to 0.$$

Demnach wird

$$\|x - x_n\|_2 \leqq \frac{\varepsilon}{3} \tag{1}$$

für alle hinreichend großen n. Wir setzen nun

$$A_m = \left\{t : x_n > \frac{1}{m}\right\} = \left\{t : x_n^2 > \frac{1}{m^2}\right\}$$

und

$$y_m = x_n \xi_{A_m}.$$

Aus $x_n^2 \in L^1$ folgt die Summierbarkeit der Mengen A_m. Hieraus und aus den Ungleichungen

$$0 \leqq y_m \leqq n \xi_{A_m} \tag{2}$$

ergibt sich, daß auch y_m zu L^1 gehört. Außerdem gilt $0 \leqq (x_n - y_m)^2 \searrow 0$ für $m \to \infty$ sowie $(x_n - y_m)^2 \in L^1$. Folglich muß $\|x_n - y_m\|_2^2 = I((x_n - y_m)^2) \to 0$ für $m \to \infty$ gelten. Für hinreichend großes m ist also

$$\|x_n - y_m\|_2 < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{3}$$

Da y_m zu L^1 gehört und der Bedingung (2) genügt, gibt es eine Funktion $y \in L$ mit der Eigenschaft

$$\|y_m - y\|_1 < \frac{\varepsilon^2}{18n}, \quad 0 \leqq y \leqq n. \tag{4}$$

Um dies einzusehen, gehen wir davon aus, daß es Funktionen $z \in M^+$ und $u \in L^+$ gibt, für die $z \geqq y_m$, $u \leqq z$ und $\bar{I}(z - y_m) < \frac{\varepsilon^2}{36n}$, $\bar{I}(z - u) < \frac{\varepsilon^2}{36n}$ ist. Wird dann z durch $z \cap n$ und u durch $y = u \cap 0$ ersetzt, so gelten die letzten beiden Ungleichungen erst recht, d. h., die Funktion y erfüllt die Bedingungen (4). Dann ist aber

$$\|y_m - y\|_2^2 = I((y_m - y)^2) \leqq I(2n|y_m - y|) = 2n\|y_m - y\|_1 \leqq 2n\frac{\varepsilon^2}{18n} = \frac{\varepsilon^2}{9},$$

woraus sich zusammen mit (1) und (3) schließlich $\|x - y\|_2 < \varepsilon$ ergibt.

12. Der komplexe Raum L^2. Unter dem *komplexen* L^2 versteht man die Gesamtheit aller komplexen meßbaren Funktionen $z = x + iy$, für die $|z|^2$ summierbar ist. Zwei einander äquivalente Funktionen sollen auch hier wieder als nicht verschieden angesehen werden.

In L^2 wird die Addition und die Multiplikation mit einer komplexen Zahl in der üblichen Weise definiert. Offenbar ist L^2 dann ein komplexer linearer Raum. Mit dem skalaren Produkt

$$\langle z_1, z_2 \rangle = I(z_1 \bar{z}_2) \quad \text{für} \quad z_1, z_2 \in L^2$$

wird L^2 zu einem euklidischen Raum. Seine Vollständigkeit ergibt sich aus der Beziehung

$$\|x + iy\|_2^2 = \|x\|_2^2 + \|y\|_2^2 \quad \text{für} \quad x, y \in L^2 \text{ (reell)};$$

sie besagt nämlich, daß $x_n + iy_n$ genau dann eine Fundamentalfolge aus dem komplexen L^2 ist, wenn x_n und y_n Fundamentalfolgen aus dem reellen L^2 sind. *Der komplexe Raum L^2 ist also ein komplexer* HILBERT*scher Raum.*

13. Der Raum L^∞. Eine meßbare Funktion $x = x(t)$ heiße *wesentlich beschränkt,* wenn sie einer beschränkten Funktion äquivalent ist. Die Gesamtheit aller wesentlich beschränkten reellen (bzw. komplexen) Funktionen bildet den reellen (bzw. komplexen) Raum L^∞. Hierbei werden zwei einander lokal äquivalente wesentlich beschränkte Funktionen nicht als verschieden angesehen, so daß die Elemente von L^∞ im Grunde genommen Klassen von untereinander lokal äquivalenten wesentlich beschränkten Funktionen sind.

Die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl werden in L^∞ in der üblichen Weise definiert. Damit wird L^∞ zu einem linearen Raum. Um in L^∞ eine Norm einzuführen, nehmen wir irgendein $x(t) \in L^\infty$ und betrachten die Gesamtheit aller beschränkten Funktionen, die $x(t)$ lokal äquivalent sind; für jede dieser Funktionen existiert die obere Grenze ihres absoluten Betrages. Die untere Grenze dieser oberen Grenzen werde mit $\|x\|_\infty$ bezeichnet; wie man leicht sieht, genügt $\|x\|_\infty$ allen Axiomen der Norm.[1])

Der Raum L^∞ ist vollständig. Man kann zum Beweis L^∞ als Quotientenraum des nach Nr. 10, Satz VII, vollständigen Raumes aller beschränkten meßbaren Funktionen $x(t)$ mit der Norm $\|x\| = \sup x(t)$ nach dem abgeschlossenen Teilraum aller beschränkten meßbaren Funktionen, die lokal fast überall gleich Null sind, ansehen (vgl. § 4, Nr. 3).

14. Positiver und negativer Teil eines linearen Funktionals. Im folgenden soll p die Zahlen 1, 2 oder ∞ bezeichnen.

Theorem 1. *Jedes beschränkte lineare Funktional f über dem reellen Raum L^p läßt sich in der Gestalt $f = f^+ - f^-$ darstellen, wobei f^+ und f^- beschränkte lineare Funktionale über L^p sind, deren Normen nicht größer als die Norm von f und die für alle nichtnegativen Funktionen $x \in L^p$ nicht negativ sind.*

---

[1]) Man bezeichnet diese Norm zuweilen auch mit ess max $|x|$.

Beweis. Der Kürze halber bezeichnen wir die Norm in L^p mit $\|x\|$ (es sei also $\|x\| = \|x\|_p$, $p = 1, 2, \infty$). Wir setzen nun

$$f^+(x) = \sup\{f(y) : 0 \leqq y \leqq x,\ y \in L^p\} \quad \text{für} \quad x \in L^p,\ x \geqq 0.$$

Da sich unter den Zahlen $f(y)$ in $\{\ \}$ auch die Zahl $f(y) = 0$ befindet (für $y = 0$) und $|f(y)| \leqq |f|\,\|y\| \leqq |f|\,\|x\|$ ist, gilt

$$f^+(x) \geqq 0 \quad \text{und} \quad f^+(x) \leqq |f|\,\|x\|.$$

Außerdem gilt offenbar $f^+(cx) = cf^+(x)$ für $c > 0$. Wir wollen nun zeigen, daß auch

$$f^+(x_1 + x_2) = f^+(x_1) + f^+(x_2) \quad \text{für} \quad x_1, x_2 \in L^p,\ x_1 \geqq 0,\ x_2 \geqq 0$$

gilt. Ist $0 \leqq y_1 \leqq x_1$ und $0 \leqq y_2 \leqq x_2$, so gilt $0 \leqq y_1 + y_2 \leqq x_1 + x_2$, und folglich ist

$$f^+(x_1 + x_2) \geqq \sup f(y_1 + y_2) = \sup f(y_1) + \sup f(y_2) = f^+(x_1) + f^+(x_2).$$

Ist andererseits $0 \leqq y \leqq x_1 + x_2$, so ist

$$0 \leqq x_1 \cap y \leqq x_1 \quad \text{und} \quad 0 \leqq y - x_1 \cap y \leqq x_2,$$

also

$$f^+(x_1 + x_2) = \sup f(y) \leqq \sup f(x_1 \cap y) + \sup f(y - x_1 \cap y) \leqq f^+(x_1) + f^+(x_2).$$

Somit verhält sich f^+ auf der Gesamtheit der nichtnegativen Funktionen additiv; f^+ kann folglich zu einem über ganz L^p definierten linearen Funktional fortgesetzt werden, indem $f^+(x_1 - x_2) = f^+(x_1) - f^+(x_2)$ gesetzt wird, wobei x_1 und x_2 nichtnegativ sind. Hierbei ist f^+ beschränkt, weil

$$|f^+(x)| \leqq f^+(|x|) \leqq |f|\,\|x\| \tag{1}$$

ist. Demnach ist f^+ ein nichtnegatives beschränktes lineares Funktional.

Wir setzen nun $f^-(x) = f^+(x) - f(x)$. Da $f^+(x) \geqq f(x)$ für $x \geqq 0$ ist, ist $f^-(x) \geqq 0$ für $x \geqq 0$. Um zu zeigen, daß

$$|f^-(x)| \leqq f^-(|x|) \leqq |f|\,\|x\| \tag{2}$$

ist, nehmen wir eine Funktion $x \geqq 0$. Nach der Definition von $f^+(x)$ gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ eine Funktion y derart, daß $0 \leqq y \leqq x$ und $f^+(x) < f(y) + \varepsilon$ ist. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} f^-(x) &= f^+(x) - f(x) < f(y) - f(x) + \varepsilon \\ &= -f(x - y) + \varepsilon \leqq |f|\,\|x - y\| + \varepsilon \leqq |f|\,\|x\| + \varepsilon, \end{aligned}$$

so daß $f^-(x) \leqq |f|\,\|x\|$ ist, weil ε beliebig klein genommen werden kann. Daher gilt für jede reelle Funktion $x(t)$ aus L^p

$$|f^-(x)| \leqq f^-(|x|) \leqq |f|\,\|x\|.$$

Demnach ist auch $f^-(x)$ ein nichtnegatives beschränktes lineares Funktional, so daß $f(x) = f^+(x) - f^-(x)$ die gesuchte Darstellung des Funktionals $f(x)$ ist.

15. Der Satz von Radon-Nikodym. Das Integral $I(x)$ heiße *beschränkt*, wenn die ganze Menge T summierbar ist. Dies bedeutet offenbar, daß die Funktion $x(t) = 1$ summierbar ist. Sind auf L zwei Integrale I und J gegeben, so werde J *absolut stetig* bezüglich I genannt, wenn jede Funktion, die in bezug auf I eine Nullfunktion ist, auch in bezug auf J eine Nullfunktion ist. In diesem Fall heißt das J-Maß dem I-Maß *untergeordnet*.

Theorem 2 (RADON-NIKODYM). *Ist das beschränkte Integral J absolut stetig bezüglich des beschränkten Integrals I, so gibt es bis auf Äquivalenz genau eine I-summierbare Funktion x_0 derart, daß für jede Funktion $x \in L^1(J)$ die Funktion xx_0 ebenfalls I-summierbar ist und $J(x) = I(xx_0)$ gilt.*

Beweis. Wir betrachten das Integral $K = I + J$ und den reellen HILBERTschen Raum $L^2(K)$. Es sei $x \in L^2(K)$. Da K beschränkt ist, gilt $1 \in L^2(K)$. Folglich ist $x = x \cdot 1 \in L^1(K)$ und

$$|J(x)| \leqq J(|x|) \leqq K(|x|) \leqq \|x\|_2 \cdot \|1\|_2,$$

wobei $\|x\|_2$ die Norm in $L^2(K)$ bezeichnet. Demnach ist $J(x)$ ein beschränktes lineares Funktional über $L^2(K)$. Nach dem Satz von F. RIESZ (vgl. § 5, Nr. 3) gibt es dann eine Funktion $y \in L^2(K)$, mit der die Darstellung

$$J(x) = \langle x, y\rangle = K(xy) \tag{1}$$

gilt. Es ist also

$$J(x) = J(xy) + I(xy)$$

oder

$$J(x(1-y)) = I(xy). \tag{2}$$

Da $J(x)$ ein Integral ist, schließen wir aus (1), daß y überall, mit Ausnahme einer Menge A vom K-Maß Null, nichtnegativ ist. Ersetzen wir y durch $(1-\xi_A)y$, so dürfen wir also annehmen, daß $y \geqq 0$ für alle $t \in T$ ist.

Weiter darf $y < 1$ für alle $t \in T$ angenommen werden. Zum Beweis setzen wir $B = \{t : y(t) \geqq 1\}$ und ersetzen in (2) jetzt x durch $x\xi_B$. Dies ergibt

$$J(x\xi_B(1-y)) = I(x\xi_B y). \tag{3}$$

Nun ist für $x \geqq 0$ die linke Seite dieser Gleichung nicht größer als Null (weil $x\xi_B(1-y) \leqq 0$ ist) und die rechte Seite nicht kleiner als Null (weil $x\xi_B y \geqq 0$ ist). Es kann also nur $J(x\xi_B(1-y)) = I(x\xi_B y) = 0$ sein. Dann ist aber $J(x\xi_B y) = 0$ für alle $x \geqq 0$ aus $L^2(K)$ (weil J absolut stetig bezüglich I ist), also auch für alle $x \in L^2(K)$. Weiter gilt

$$J(x(1-(1-\xi_B)y)) = I(xy(1-\xi_B)).$$

Wir dürfen also tatsächlich y durch $(1-\xi_B)y$ ersetzen, ohne die Gültigkeit der Beziehung (2) zu verletzen, und erhalten dann eine Funktion $y < 1$, $y \in L^2(K)$, so daß die linke und die rechte Seite von (2) Integrale über L sind. Ersetzt man in (2) nun $x \in L^+$ durch die Funktion $x(1 + y + \cdots + y^{n-1})$, so ergibt sich demzufolge

$$I(x(y(1 + y + \cdots + y^{n-1}))) = J(x(1-y^n)),$$

oder

$$I(xy) + I(xy^2) + \cdots + I(xy^n) = J(x(1-y^n)) \leqq J(x) < +\infty$$

für $x \in L^+$. Auf Grund von Nr. 7, Satz VI, folgt hieraus, daß

$$xy(1-y)^{-1} = xy + xy^2 + \cdots \in L^1(I)$$

und

$$I(xy(1-y)^{-1}) = \lim_{n\to\infty} J(x(1-y^n)) = J(x)$$

ist; denn es gilt $x(1-y^n) \nearrow x$ und $x(1-y^n) \in L^1(J)$ (vgl. Nr. 7, Satz VII). Für $x_0 = y(1-y)^{-1}$ gilt also

$$J(x) = I(xx_0) \quad \text{für alle} \quad x \in L^+. \tag{4}$$

Nun sei $x \in M^+$ und $J(x) < +\infty$. Dann gibt es eine Folge $x_n \in L^+$, für die $x_n \nearrow x$ und damit $x_n x_0 \nearrow x x_0$ gilt. Wird in (4) anstelle von x nun x_n gesetzt, so ergibt sich durch Grenzübergang, daß die Beziehung (4) auch für alle $x \in M^+ \cap L_1(J)$ gilt (vgl. Nr. 7, Satz VII). Schließlich sei x irgendeine nichtnegative Funktion aus $L^1(J)$. Es gibt nach Nr. 7, Satz IX, eine Folge von Funktionen $x_n \in M^+$, so daß $x_n \searrow x$ fast überall bezüglich J gilt. Dann gilt $x_n x_0 \searrow x x_0$ fast überall bezüglich I; ist nämlich z eine nichtnegative Nullfunktion in bezug auf J und $y \in M^+$, $y \geqq z$, so gilt $\bar{J}(y) = I(yx_0) \geqq I(zx_0)$, und daher ist $0 = J(z) = \inf \bar{J}(y) \geqq I(zx_0)$, also zx_0 eine Nullfunktion in bezug auf I. Wird x in (4) durch x_n ersetzt, so erhalten wir schließlich (vgl. Nr. 7, Satz VII), daß (4) für alle nichtnegativen $x \in L^1(J)$ und damit auf ganz $L^1(J)$ gilt.

Für $x = 1$ ergibt sich aus (4), daß $x_0 \in L^1(I)$ ist.

Gilt auch $J(x) = I(xx_0')$, wobei $x_0' \in L^1(I)$ ist, so muß $I(x(x_0 - x_0')) = 0$ sein. Setzt man hier $x = \operatorname{sign}(x_0 - x_0')$ (man prüft leicht nach, daß diese Funktion I-meßbar ist), so folgt $I(|x_0 - x_0'|) = 0$, d. h., x_0 und x_0' sind äquivalent. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

16. Der zu L^1 konjugierte Raum.

Theorem 3. *Ist I ein beschränktes Integral und f ein beschränktes lineares Funktional über $L^1(I)$, so gibt es eine und nur eine Funktion $y_0 \in L^\infty(I)$ mit den Eigenschaften*

$$f(x) = I(xy_0) \quad \textit{für alle} \quad x \in L^1(I) \tag{1}$$

und

$$|f| = \|y_0\|_\infty. \tag{2}$$

Umgekehrt wird durch die Formel (1) für jede Funktion $y_0 \in L^\infty(I)$ ein beschränktes lineares Funktional über $L^1(I)$ definiert.

Beweis. Der positive und der negative Teil f^+ bzw. f^- von f sind Integrale auf L. Ist $I(|x|) = \|x\|_1 = 0$, so gilt auch $f^+(x) = 0$ und $f^-(x) = 0$, d. h., f^+ und f^- sind absolut stetig bezüglich I.

Auf Grund des Satzes von Radon-Nikodym existieren Funktionen $y^+ \in L^1(I)$ und $y^- \in L^1(I)$ mit der Eigenschaft, daß

$$f^+(x) = I(xy^+) \quad \text{und} \quad f^-(x) = I(xy^-)$$

für alle Funktionen $x = x(t)$ gilt, die gleichzeitig f^+- und f^--summierbar sind. Hierzu gehören insbesondere alle Funktionen $x \in L^1(I)$; für $x \in L^1(I)$ ist nämlich

$$f^+(|x|) \leqq |f| \, \|x\|_1 < \infty \quad \text{und} \quad f^-(|x|) \leqq |f| \, \|x\|_1 < \infty$$

(vgl. Formel (1) und (2) aus Nr. 14). Wird nun $y_0 = y^+ - y^-$ gesetzt, so folgt

$$f(x) = I(xy_0) \quad \text{für alle} \quad x \in L^1(I).$$

Um zu zeigen, daß $y_0 \in L^\infty(I)$ und $\|y_0\|_\infty \leqq |f|$ ist, setzen wir $x = \xi_A \operatorname{sign} y_0$ mit $A = \{t : |y_0(t)| \geqq |f| + \varepsilon\}$, $\varepsilon > 0$, in (1) ein. Dann folgt

$$I(\xi_A \operatorname{sign} y_0 \cdot y_0) = f(\xi_A \operatorname{sign} y_0) \leqq |f| \, \|\xi_A\|_1 = |f| \, \mu(A). \tag{3}$$

Andererseits gilt für $\mu(A) > 0$

$$\left(|f| + \frac{\varepsilon}{2}\right) \mu(A) < (|f| + \varepsilon) \, \mu(A) = I\left((|f| + \varepsilon) \, \xi_A\right) \leqq I(|y_0| \, \xi_A) = I(\xi_A \operatorname{sign} y_0 \cdot y_0),$$

was im Widerspruch zu (3) steht.

Folglich ist $\mu(A) = 0$, d. h., mit Ausnahme der Menge A vom Maß Null gilt überall $|y_0(t)| \leqq |f| + \varepsilon$. Dies bedeutet aber, daß y_0 zu $L^\infty(I)$ gehört und $\|y_0\|_\infty \leqq |f| + \varepsilon$ ist. Da ε beliebig ist, gilt also auch

$$\|y_0\|_\infty \leqq |f|. \tag{4}$$

Offenbar wird durch die Formel (1) für jede Funktion $y_0 \in L^\infty(I)$ ein lineares Funktional über $L^1(I)$ gegeben, das beschränkt ist, weil

$$|f(x)| = |I(xy_0)| \leqq \|y_0\|_\infty \|x\|_1$$

gilt. Es ist demnach $|f| \leqq \|y\|_\infty$, woraus mit (4) die Beziehung $\|y_0\|_\infty = |f|$ folgt. Damit ist Theorem 3 vollständig bewiesen.

Dieser Satz besagt, daß die Zuordnung $f \to y_0$ eine isometrische Abbildung des Raumes $[L^1(I)]'$ auf den Raum $L^\infty(I)$ ist. Es ist also

$$[L^1(I)]' = L^\infty(I),$$

wenn zwischen isometrischen Räumen nicht unterschieden wird.

Bemerkungen. 1. *Die Aussage des Theorems 3 gilt auch noch für ein beliebiges (nicht notwendig beschränktes) Integral I, wenn T Vereinigung einer lokalen Nullmenge T_0 und (eventuell überabzählbar vieler) bikompakter, paarweise und zu T_0 disjunkter Mengen T_α positiven Maßes ist derart, daß jede summierbare Menge mit höchstens abzählbar vielen T_α einen nichtleeren Durchschnitt hat.*

Beweis. Wir setzen $\xi_0 = \xi_{T_0}$, $\xi_\alpha = \xi_{T_\alpha}$ und

$$I_\alpha(x) = I(x\xi_\alpha), \; f_\alpha(x) = f(x\xi_\alpha) \quad \text{für} \quad x \in L^1(I).$$

Dann ist I_α ein beschränktes Integral und $f_\alpha(x)$ ein bezüglich I beschränktes Funktional, wobei $|f_\alpha| \leqq |f|$ ist. Folglich ist $f_\alpha(x) = I_\alpha(xy_\alpha)$ mit $y_\alpha \in L^\infty(I_\alpha)$ und

$$\|y_\alpha\|_\infty - |f_\alpha| \leqq |f| \tag{5}$$

($\|y_\alpha\|_\infty$ bezeichnet die Norm in $L^\infty(I_\alpha)$).

Es gilt also

$$f(x\xi_\alpha) = I(x\xi_\alpha y_\alpha) \quad \text{für alle} \quad x \in L^1(I). \tag{6}$$

Wir setzen nun y gleich y_α auf T_α. Wegen (5) ist $y \in L^\infty$. Die Menge $T - T_\alpha$ ist in bezug auf I_α eine lokale Nullmenge, weil für jede bikompakte Menge Q die

Beziehung $I_\alpha(\xi_{Q \cap (T - T_\alpha)}) = I(\xi_Q \xi_\alpha (1 - \xi_\alpha)) = 0$ gilt. Folglich ist

$$\|y\|_\infty = \sup_\alpha \|y_\alpha\|_\infty \leqq |f|. \tag{7}$$

Offenbar gilt $\xi_\alpha y = y_\alpha$. Daher kann (6) auch in der Gestalt

$$f(x\xi_\alpha) = I(xy\xi_\alpha) \quad \text{für alle} \quad x \in L^1(I) \tag{8}$$

geschrieben werden. Nun sei $x \in L^1$. Dann ist jede der Mengen

$$A_n = \left\{t : |x(t)| > \frac{1}{n}\right\}$$

summierbar (vgl. den Beweis von Satz VIII aus Nr. 10) und schneidet daher höchstens abzählbar viele Mengen T_α. Die Menge $A = \{t : |x(t)| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ hat dieselbe Eigenschaft.

Es seien $T_{\alpha_1}, T_{\alpha_2}, \ldots$ die Mengen, die A schneidet. Dann ist

$$|x| = |x\xi_0| + |x\xi_{\alpha_1}| + \cdots.$$

Hieraus folgt auf Grund von Satz VIII aus Nr. 9 und Satz I und VI aus Nr. 7, daß $x = x\xi_{\alpha_1} + x\xi_{\alpha_2} + \cdots$ ist, wobei die Reihe im Sinne der Norm des Raumes L^1 konvergiert.

Dann konvergiert auch die Reihe $xy = xy\xi_{\alpha_1} + xy\xi_{\alpha_2} + \cdots$ im Sinne der Norm von L^1; wegen (6) und (8) ist also

$$\begin{aligned} f(x) &= f(x\xi_{\alpha_1}) + f(x\xi_{\alpha_2}) + \cdots = I(xy_{\alpha_1}\xi_{\alpha_1}) + I(xy_{\alpha_2}\xi_{\alpha_2}) + \cdots \\ &= I(xy\xi_{\alpha_1}) + I(xy\xi_{\alpha_2}) + \cdots = I(xy). \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} |f(x)| &\leqq \|y_{\alpha_1}\|_\infty \|x\xi_{\alpha_1}\|_1 + \|y_{\alpha_2}\|_\infty \|x\xi_{\alpha_2}\|_1 + \cdots \\ &\leqq \|y\|_\infty (\|x\xi_{\alpha_1}\|_1 + \|x\xi_{\alpha_2}\|_1 + \cdots) = \|y\|_\infty \|x\|_1; \end{aligned}$$

folglich ist $|f| \leqq \|y\|_\infty$. Zusammen mit (7) ergibt dies $\|y\|_\infty = \|f\|$.

2. *Theorem 3 läßt sich auch auf komplexe Räume L^1 ausdehnen; in diesem Fall ist der konjugierte Raum $(L^1)'$ dem komplexen Raum L^∞ isometrisch.*

In der Tat, es sei $f(x)$ ein beschränktes lineares Funktional über dem komplexen Raum L^1. Real- und Imaginärteil von $f(x)$ sind über dem reellen Raum L^1 beschränkte lineare Funktionale. Wendet man nun auf jedes von ihnen das Theorem 3 an, so findet man

$$f(x) = I(xy_0) \tag{1}$$

für alle reellen $x \in L^1$, wobei y_0 eine komplexe Funktion aus L^∞ ist. Da das Funktional $f(x)$ komplex homogen ist, bleibt die Darstellung (1) für alle komplexen $x \in L^1$ gültig. Hieraus folgt wie oben $\|y_0\|_\infty = |f|$.

17. Komplexe Maße. Wie wir oben sahen (Nr. 10, Satz X), läßt sich jedes auf L definierte Integral $I(x)$ in der Form

$$I(x) = \int x(t)\, d\mu \quad \text{für alle} \quad x \in L \tag{1}$$

darstellen, wobei μ das durch $I(x)$ definierte Maß ist.

Die Darstellung (1) läßt sich leicht auf ein beliebiges, über L^r definiertes lineares Funktional f, das bezüglich der Norm $\|x\|_\infty$ beschränkt ist, ausdehnen. Um dies einzusehen, betrachten wir die Zerlegung $f = f^+ - f^-$ des Funktionals f in seinen positiven und seinen negativen Teil (vgl. Nr. 14). Es seien ferner μ^+ und μ^- die durch die nichtnegativen Funktionale f^+ und f^- definierten Maße. Setzen wir nun $\mu = \mu^+ - \mu^-$, so wird

$$f(x) = f^+(x) - f^-(x) = \int x(t)\, d\mu^+ - \int x(t)\, d\mu^- = \int x(t)\, d\mu, \tag{2}$$

d. h., (1) gilt auch für $f(x)$ anstelle von $I(x)$. Wir wollen μ das zum Funktional $f(x)$ gehörige Maß nennen; offenbar ist μ nicht notwendig positiv.

Wir betrachten jetzt ein über L definiertes Funktional $f(x)$, das bezüglich der Norm $\|x\|_\infty$ beschränkt ist. Werden dessen Real- und Imaginärteil f_1 und f_2 nur über L^r betrachtet, so gilt für sie die Formel (2). Es seien μ_1 und μ_2 die entsprechenden Maße. Für $\mu = \mu_1 + i\mu_2$ erhalten wir dann

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x) = \int x(t)\, d\mu_1 + i \int x(t)\, d\mu_2 = \int x(t)\, d(\mu_1 + i\mu_2),$$

d. h., es gilt

$$f(x) = \int x(t)\, d\mu \tag{3}$$

für alle $x \in L^r$. Auf Grund der komplexen Homogenität von $f(x)$ gilt (3) auch für alle $x \in L$. Die Funktion μ wird das durch das Funktional $f(x)$ definierte *komplexe Maß* genannt.

Wir sind damit zu folgendem Ergebnis gekommen:

Theorem 4. *Jedes komplexe lineare Funktional $f(x)$ über L, das bezüglich der Norm $\|x\|_\infty$ beschränkt ist, läßt sich in der Form*

$$f(x) = \int x(t)\, d\mu \tag{3}$$

darstellen, wobei μ ein auf T definiertes (im allgemeinen komplexes) Maß ist.

18. Integrale auf Produkträumen.

Theorem 5. *Es seien T_1 und T_2 lokal bikompakte Räume, I ein auf $L(T_1)$ und J ein auf $L(T_2)$ definiertes Integral. Dann gilt für jede Funktion $x(t, s) \in L(T_1 \times T_2)$*

$$I_t(J_s x(t, s)) = J_s(I_t x(t, s)), \tag{1}$$

und das Funktional $K(x) = I_t J_s x = J_s I_t x$ ist ein Integral über $L(T_1 \times T_2)$.

Beweis. Wir betrachten eine Funktion $x(t, s) \in L(T_1 \times T_2)$. Es gibt dann bikompakte Mengen $A_1 \subset T_1$ und $A_2 \subset T_2$, so daß $x(t, s)$ außerhalb $A_1 \times A_2$ verschwindet. Mit C_1 bezeichnen wir die Norm von I auf $L_{A_1}(T_1)$ und mit C_2 die Norm von J auf $L_{A_2}(T_2)$ (vgl. Nr. 2, Satz II), wobei $L_A(T)$ allgemein die Menge aller Funktionen $x \in L(T)$ sei, die außerhalb A verschwinden. Nach dem Satz von Stone (vgl. § 2, Nr. 10, Theorem 1) kann jede Funktion aus $L_{A_1 \times A_2}(T_1 \times T_2)$ durch Funktionen der Gestalt

$$u(t, s) = \sum_{k=1}^{n} y_k(t)\, z_k(s), \quad y_k \in L_{A_1}(T_1), \quad z_k \in L_{A_2}(T_2),$$

auf $A_1 \times A_2$ gleichmäßig approximiert werden. Zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es also eine Funktion $u(t, s)$, für die

$$|x(t, s) - u(t, s)| < \varepsilon \quad \text{auf} \quad A_1 \times A_2$$

ist. Hieraus folgt nun

$$\left| J_s x(t, s) - \sum_k J(z_k)\, y_k(t) \right| = |J_s(x - u)| < \varepsilon C_2, \tag{2}$$

d. h., $J_s x(t, s)$ ist Limes einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen, die auf A_1 stetig sind. Daher ist $J_s x(t, s)$ selbst eine stetige Funktion, die außerhalb A_1 gleich Null ist. Aus (2) folgt ferner

$$\left| I_t J_s x - \sum_k I(y_k)\, J(z_k) \right| < \varepsilon C_1 C_2.$$

Hieraus und aus der entsprechenden Ungleichung für $J_s I_t x$ schließen wir nun, daß $|I_t J_s x - J_s I_t x| < 2\varepsilon C_1 C_2$ und damit $I_t J_s x = J_s I_t x$ ist; denn ε war beliebig. Offenbar ist $I_t J_s x$ ein nichtnegatives lineares Funktional, d. h. ein Integral.

Das durch das Integral $K = I_t J_s$ definierte Maß μ wird *Produkt der durch die Integrale I und J definierten Maße μ_1 und μ_2* genannt und mit $\mu_1 \times \mu_2$ bezeichnet.

I. *Für jede Funktion $x \in M^+(T_1 \times T_2)$ gilt*

$$\overline{K}(x) = \overline{I}_t \overline{J}_s(x) = \overline{J}_s \overline{I}_t(x) \tag{3}$$

Beweis. Auf Grund von Satz II aus Nr. 3 ist

$$x = \sup_{y \in Y_x} y \quad \text{mit} \quad Y_x = \{y \in L^+(T_1 \times T_2) : y \leqq x\}.$$

Wegen (1) ist aber $K(y) = I_t J_s(y)$. Folglich ergibt sich durch Anwendung von Satz III aus Nr. 3[1])

$$\overline{K}(x) = \sup_{y \in Y_x} I_t[J_s(y)] = \overline{I}_t\Big[\sup_{y \in Y_x} J_s(y)\Big] = \overline{I}_t \overline{J}_s\Big(\sup_{y \in Y_x} y\Big) = \overline{I}_t \overline{J}_s(x).$$

Entsprechend erhält man $\overline{K}(x) = \overline{J}_s \overline{I}_t(x)$.

II. *Für jede überall definierte nichtnegative Funktion $x(t, s)$ gilt*

$$\overline{K}(x) \geqq \overline{I}_t \overline{J}_s(x). \tag{4}$$

Beweis. Es sei $y \in M^+(T_1 \times T_2)$ und $y \geqq x$. Wegen (3) gilt dann $\overline{K}(y) = \overline{I}_t \overline{J}_s(y) \geqq \overline{I}_t \overline{J}_s(x)$. Geht man hier bezüglich y zur unteren Grenze über, so folgt (4).

III. *Ist $u(t, s)$ eine überall definierte nichtnegative Funktion, die in bezug auf K eine Nullfunktion ist, so ist sie für fast alle (bezüglich I) $t \in T$ auch eine Nullfunktion bezüglich J.*

---

[1]) Es ist $J_s(y) \in L^+(T_1)$ (vgl. den Beweis von Theorem 5), und $\overline{J}_s(x) = \sup_{y \in Y_x} J_s(y)$ gehört daher zu $M^+(T_1)$ (vgl. Nr. 3, Satz I).

Beweis. Ist $\overline{K}(x) = 0$, so folgt aus (4), daß auch $\overline{I}_t \overline{J}_s(x) = 0$ ist. Auf Grund von Satz VI aus Nr. 5 ist $\overline{J}_s(x) = 0$ für fast alle (bezüglich I) $t \in T$, d. h., x ist für fast alle (bezüglich I) $t \in T$ eine Nullfunktion bezüglich J.

IV. *Ist A, $A \subset T_1 \times T_2$, eine K-Nullmenge, so ist die Menge $A_t = \{s : t \times s \in A\}$ für fast alle (bezüglich I) $t \in T_1$ eine J-Nullmenge.*

Zum Beweis genügt es, Satz III auf die Funktion $x(t, s) = \xi_A(t, s)$ anzuwenden.

Wir sagen, *das Doppelintegral $I_t[J_s x]$ der Funktion $x(t, s)$ existiert*, wenn $x(t, s) \in L^1(J)$ für fast alle (bezüglich I) $t \in T_1$ und ferner $J_s(x) \in L^1(I)$ ist. Entsprechend wird das Doppelintegral $J_s[I_t x]$ definiert.

Theorem 6 (Fubini). *Ist $x(t, s) \in L^1(K)$, so existieren die beiden Doppelintegrale $I_t[J_s x]$, $J_s[I_t x]$, und es gilt*

$$K(x) = I_t[J_s(x)] = J_s[I_t(x)]. \tag{5}$$

Beweis. Wir nehmen zunächst an, daß $x(t, s)$ überall definiert und $x(t, s) \in L^1(K)$ sei. Dann gibt es eine Folge von Funktionen $x_n(t, s) \in L(K)$ mit der Eigenschaft $\|x(t, s) - x_n(t, s)\|_1 = K(|x - x_n|) \to 0$ für $n \to \infty$. Wegen (4) ist aber $K(|x - x_n|) \geqq \overline{I}_t \overline{J}_s(|x - x_n|)$. Daher gilt auch $\overline{I}_t \overline{J}_s(|x - x_n|) \to 0$. Auf Grund der Bemerkung zum Beweis von Satz II aus Nr. 7 läßt sich aus den x_n eine Teilfolge auswählen, die wir wieder mit x_n bezeichnen und für die $\overline{J}_s(|x - x_n|) \to 0$ für alle $t \in T_1 - A_1$ gilt, wobei A_1 eine I-Nullmenge ist. Da jedes x_n eine stetige Funktion von s ist, folgt hieraus unter Berücksichtigung der Definition von $L^1(J)$ (vgl. Nr. 7), daß $x \in L^1(J)$ für alle $t \in T_1 - A_1$ und $|J_s(x) - J_s(x_n)| = |J_s(x - x_n)| \leqq J_s(|x - x_n|)$ für alle $t \in T_1 - A_1$ ist. Dann gilt aber

$$\overline{I}_t(|J_s(x) - J_s(x_n)|) \leqq \overline{I}_t J_s(|x - x_n|) \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Da die $J_s(x_n)$ stetige Funktionen von t sind (vgl. den Beweis von Theorem 5), bedeutet dies, daß $J_s(x) \in L^1(I)$ und $I_t(|J_s(x) - J_s(x_n)|) \to 0$. Dann gilt aber auch

$$|I_t J_s(x) - I_t J_s(x_n)| = |I_t(J_s(x) - J_s(x_n))| \leqq I_t(|J_s(x) - J_s(x_n)|) \to 0.$$

Man braucht jetzt nur noch in der Gleichung

$$K(x_n) = I_t J_s(x_n)$$

zum Grenzwert überzugehen (was auf Grund von Theorem 5 gestattet ist) und erhält dann $K(x) = I_t J_s(x)$. Vertauscht man in dieser Beziehung die Rollen von I und J, so folgt, daß auch $J_s I_t(x)$ existiert und daß

$$J_s I_t(x) = I_t J_s(x) = K(x)$$

ist. Damit ist der Satz von Fubini für den Fall einer überall definierten Funktien $x(t, s) \in L^1(K)$ bewiesen.

Nun sei $x(t, s) \in L^1(K)$ eine auf der Menge $T_1 \times T_2 - A$ definierte Funktion, wobei A eine K-Nullmenge ist. Dann gibt es in $L^1(K)$ eine überall definierte

Funktion $y(t, s)$, die auf $T_1 \times T_2 - A$ gleich $x(t, s)$ ist. Wie oben bewiesen wurde, gilt $y \in L^1(J)$ für $t \in T_1 - B_1$, wobei B_1 eine I-Nullmenge ist, ferner $J_s(y) \in L^1(I)$ und

$$K(x) = K(y) = I_t J_s(y). \tag{6}$$

Nach Satz IV ist aber $A_t = \{s : t \times s \in A\}$ für $t \in T_1 - C_1$ eine J-Nullmenge; C_1 bezeichnet hier eine I-Nullmenge. Andererseits gilt auf Grund der Definition der Menge A_t die Beziehung $x(t, s) = y(t, s)$ für $s \in T_2 - A_t$ und alle $t \in T_1 - C_1$. Daher ist $x(t, s)$ als Funktion von s für jedes $t \in T_1 - (B_1 \cup C_1)$ der summierbaren Funktion $y(t, s)$ äquivalent. Folglich gilt $J_s(x) \in L^1(J)$ und $J_s(x) = J_s(y)$ für alle $t \in T_1 - (B_1 \cup C_1)$. Da $B_1 \cup C_1$ eine I-Nullmenge und $J_s(y) \in L^1(I)$ ist, ist auch $J_s(x) \in L^1(I)$ und $I_t J_s(x) = I_t J_s(y)$. Hieraus und aus (6) schließen wir $I_t J_s(x) = K(x)$. Entsprechend beweist man die Existenz des Doppelintegrals $J_s I_t(x)$ und die Gültigkeit der Beziehung $J_s I_t(x) = K(x)$.

Unter gewissen einschränkenden Voraussetzungen läßt sich auch die Umkehrung beweisen, d. h. der Satz, daß aus der Existenz eines der Doppelintegrale $J_s I_t(x)$ bzw. $I_t J_s(x)$ die Zugehörigkeit von x zu $L^1(K)$ folgt.

Wir beschränken uns auf die Fälle, die im folgenden benötigt werden.

V. *Ist $x(t, s) = x_1(t)\, x_2(s)$ mit überall auf T_1 bzw. T_2 definierten nichtnegativen Funktionen $x_1(t)$ und $x_2(s)$, so gilt*

$$\overline{K}(x) = \overline{I}(x_1)\, \overline{J}(x_2), \tag{7}$$

es sei denn, daß $\overline{I}(x_1) = 0$, $\overline{J}(x_2) = +\infty$ oder $\overline{I}(x_1) = +\infty$, $\overline{J}(x_2) = 0$ ist.

Beweis. Es sei $y_1 \in M^+(T_1)$, $y_2 \in M^+(T_2)$ und $y_1 \geqq x_1$, $y_2 \geqq x_2$. Mit

$$y(t, s) = y_1(t)\, y_2(s)$$

gilt $y \in M^+(T_1 \times T_2)$ und $y \geqq x$. Nach Satz I ist nun aber

$$\overline{K}(y) = \overline{I}_t[\overline{J}_s(y_1 y_2)] = \overline{I}[y_1 \overline{J}(y_2)] = \overline{I}(y_1)\, \overline{J}(y_2).$$

Daher ist

$$\overline{K}(x) = \inf_{y \in Z_x} \overline{K}(y) \leqq \inf_{y_1 \in Z_{x_1},\, y_2 \in Z_{x_2}} [\overline{I}(y_1)\, \overline{J}(y_2)] = \overline{I}(x_1)\, \overline{J}(x_2).$$

Andererseits gilt wegen (4)

$$\overline{K}(x) \geqq \overline{I}_t[\overline{J}_s(x_1 x_2)] = \overline{I}[x_1 \overline{J}(x_2)] = \overline{I}(x_1)\, \overline{J}(x_2).$$

Folglich ist $\overline{K}(x) = \overline{I}(x_1)\, \overline{J}(x_2)$.

VI. *Ist eine der Mengen $A_1 \subset T_1$, $A_2 \subset T_2$ eine I-Nullmenge (bzw. J-Nullmenge) und die andere eine Menge mit endlichem äußeren J-Maß (bzw. I-Maß), so ist $A_1 \times A_2$ eine K-Nullmenge.*

Die Behauptung folgt unmittelbar aus (7) und der Beziehung

$$\xi_{A_1 \times A_2}(t, s) = \xi_{A_1}(t)\, \xi_{A_2}(s).$$

VII. *Ist eine der Mengen $A_1 \subset T_1$, $A_2 \subset T_2$ eine I-Nullmenge (bzw. J-Nullmenge) und die andere die Vereinigung von abzählbar vielen Mengen Q_ν $(\nu = 1, 2, \ldots)$, die alle ein endliches äußeres J-Maß (bzw. I-Maß) haben, so ist $A_1 \times A_2$ eine K-Nullmenge.*

Beweis. Es sei etwa A_1 eine I-Nullmenge und $A_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} Q_j$ mit $\overline{\mu}_2(Q_j) < +\infty$ für $j = 1, 2, \ldots$. Dann ist $A_1 \times A_2 = \bigcup_{j=1}^{\infty} A_1 \times Q_j$, wobei $A_1 \times Q_j$ $(j = 1, 2, \ldots)$ nach Satz VI eine K-Nullmenge ist. Damit ist aber auch $A_1 \times A_2$ eine K-Nullmenge.

VIII. *Für $x_1(t) \in L^1(I)$ und $x_2(s) \in L^1(J)$ gilt*[1])

$$x = x_1(t)\, x_2(s) \in L^1(K) \quad \textit{und} \quad K(x) = I(x_1)\, J(x_2). \tag{8}$$

Beweis. Die Funktionen $x_1(t)$ bzw. $x_2(s)$ seien überall auf T_1 bzw. T_2 definiert. Ferner sei $x_1(t) \in L^1(I)$ und $x_2(s) \in L^1(J)$. Dann gibt es Folgen von Funktionen $x_{1n}(t) \in L(T_1)$ und $x_{2n}(s) \in L(T_2)$ derart, daß $I(|x_1 - x_{1n}|) \to 0$ und $J(|x_2 - x_{2n}|) \to 0$. Nun gilt nach Satz V

$$\begin{aligned}
&\overline{K}(|x_1(t)\, x_2(s) - x_{1n}(t)\, x_{2n}(s)|) \\
&\leqq \overline{K}(|x_1(t)|\,|x_2(s) - x_{2n}(s)| + |x_{2n}(s)|\,|x_1(t) - x_{1n}(t)|) \\
&\leqq \overline{K}(|x_1(t)|\,|x_2(s) - x_{2n}(s)|) + \overline{K}(|x_{2n}(s)|\,|x_1(t) - x_{1n}(t)|) \\
&= I(|x_1|)\, J(|x_2 - x_{2n}|) + I(|x_{2n}|)\, J(|x_1 - x_{1n}|) \to 0
\end{aligned}$$

und

$$x_{1n}(t)\, x_{2n}(s) \in L(T_1 \times T_2).$$

Hieraus folgt

$$x = x_1(t)\, x_2(s) \in L^1(K)$$

und

$$K(x) = \lim_{n\to\infty} K(x_{1n}(t)\, x_{2n}(s)) = \lim_{n\to\infty} I(x_{1n})\, J(x_{2n}) = I(x_1)\, J(x_2).$$

Damit ist der Satz VIII für überall definierte Funktionen $x_1(t) \in L^1(I)$ und $x_2(s) \in L^1(J)$ bewiesen.

Jetzt seien $x_1(t)$ bzw. $x_2(s)$ beliebige Funktionen aus $L^1(I)$ bzw. $L^1(J)$. Ferner sei A_1 die I-Nullmenge, auf der $x_1(t)$ nicht definiert ist, und A_2 die J-Nullmenge, auf der $x_2(s)$ nicht definiert ist.

Es gibt überall definierte Funktionen $y_1(t) \in L^1(I)$ und $y_2(s) \in L^1(J)$, für die $x_1(t) = y_1(t)$ auf $T_1 - A_1$ und $x_2(s) = y_2(s)$ auf $T_2 - A_2$ ist. Wir setzen $B_1 = \{t : |y_1(t)| > 0\}$ und $B_2 = \{s : |y_2(s)| > 0\}$. Dann ist die Funktion $x_1(t)\, x_2(s)$ nur auf der Menge $(A_1 \times B_2) \cup (B_1 \times A_2)$ nicht definiert und von $y_1(t) y_2(s)$ verschieden. Diese Menge ist aber nach Satz VII eine K-Nullmenge, weil B_1 und B_2 sich als Vereinigung der abzählbar vielen summierbaren Mengen $\left\{t : |y_1(t)| > \frac{1}{n}\right\}$ bzw. $\left\{s : |y_2(s)| > \frac{1}{n}\right\}$ $(n = 1, 2, \ldots)$ darstellen lassen (vgl. den Beweis von Satz VIII aus Nr. 10). Folglich gilt

$$K(x_1(t) x_2(s)) = K(y_1(t) y_2(s)) = I(y_1) J(y_2) = I(x_1)\, J(x_2),$$

womit Satz VIII vollständig bewiesen ist.

Satz VIII läßt sich noch wie folgt verallgemeinern.

IX. *Es sei A_t eine Operatorfunktion von $t \in T_1$, deren sämtliche Werte beschränkte lineare Operatoren in $L^1(J)$ sind, und es gelte:*

---

[1]) Hier und im folgenden setzen wir $x_1(t) x_2(s) = 0$ in allen Punkten $t \times s$, für die einer der Faktoren gleich Null ist, unabhängig davon, ob der andere definiert ist oder nicht.

1. $\|A_t\| \leq C$ *für alle* $t \in T_1$;

2. *ist* $x(s) \in L(T_2)$, *so ist die Funktion* $A_t x(s)$ *einer Funktion aus* $L(T_1 \times T_2)$ *äquivalent in bezug auf* K;

3. *ist* $B_2 = \{s : x(s) \neq y(s)\}$ *für zwei* J*-summierbare Funktionen* $x(s)$ *und* $y(s)$ *eine* J*-Nullmenge, so sind für jede* I*-summierbare Menge* $B_1 \subset T_1$ *sämtliche Mengen* $B_{2t} = \{s : A_t x(s) \neq A_t y(s)\}$, $t \in B_1$ *(bei passender Wahl von* $A_t x(s)$ *und* $A_t y(s)$ *aus den betreffenden Klassen von untereinander in bezug auf* J *äquivalenten Funktionen) in einer festen* J*-Nullmenge enthalten.*

Dann gehört die Funktion $x(t, s) = x_1(t)\, A_t x_2(s)$ *für beliebige* $x_1(t) \in L^1(I)$ *und* $x_2(s) \in L^1(J)$ *zu* $L^1(K)$.

Beweis. Zunächst sei $x_1(t) \in L^1(I)$ und $x_2(s) \in L(T_2)$. Die Funktionen $x_{1n}(t) \in L(T_1)$ seien so gewählt, daß $I(|x_1 - x_{1n}|) \to 0$. Durch passende Wahl einer Teilfolge, die wir wieder mit x_{1n} bezeichnen, läßt sich auf Grund der Bemerkung nach Satz II aus Nr. 7 erreichen, daß sogar Konvergenz fast überall auf T_1 stattfindet. Damit konvergiert dann auch fast überall auf T_1 die Reihe $u_1(t) + u_2(t) + \cdots$, in der $u_1(t) = x_{11}(t)$ und $u_n(t) = x_{1n}(t) - x_{1,n-1}(t)$ für $n = 2, 3, \ldots$ gesetzt ist. Hierbei gilt

$$x_1(t) = u_1(t) + u_2(t) + \cdots \quad \text{auf} \quad T_1 - P_1, \tag{9}$$

wobei P_1 eine I-Nullmenge aus T_1 ist.

Nun sei Q der Träger der Funktion $A_t x_2(s)$ in $T_1 \times T_2$. Aus (9) schließen wir:

$$x_1(t)\, A_t x_2(s) = u_1(t)\, A_t x_2(s) + u_2(t)\, A_t x_2(s) + \cdots \tag{10}$$

auf $(T_1 \times T_2) - Q \cap (P_1 \times T_2)$, wobei $Q \cap (P_1 \times T_2)$ nach Satz VI eine K-Nullmenge ist. Auf Grund der Abschätzung

$$\begin{aligned} K(|u_n(t)\, A_t x_2(s)|) &= I_t(|u_n(t)|\, J_s(|A_t x_2(s)|)) \\ &\leq C\, I_t(|u_n(t)|\, J_s(|x_2(s)|)) \\ &= C\, J_s(|x_2|)\, I_t(|u_n|) \end{aligned}$$

konvergiert die Reihe (10) im Sinne der Norm von $L^1(K)$. Folglich ist $x_1(t) A_t x_2(s) \in L^1(K)$, womit der Satz IX für beliebige Funktionen $x_1(t) \in L^1(I)$ und $x_2(s) \in L(T_2)$ bewiesen ist. Hieraus folgt auf Grund des Satzes von Fubini für diese Funktionen die Beziehung $K(x_1 A_t x_2) = I_t(x_1 J_s(A_t x_2))$.

Jetzt sei $x_1(t) \in L^1(I)$ und $x_2(s) \in L^1(J)$. Wiederholt man die obigen Überlegungen, so findet man, daß

$$x_2(s) = v_1(s) + v_2(s) + \cdots \quad \text{auf} \quad T_2 - P_2 \tag{11}$$

gilt, wobei P_2 eine J-Nullmenge aus T_2 ist, die v_n zu $L(T_2)$ gehören und die Reihe (11) im Sinne der Norm von $L^1(J)$ konvergiert.

Wir setzen $Q = \{t : |x_1(t)| > 0\}$ und $Q_n = \left\{t : |x_1(t)| > \frac{1}{n}\right\}$. Dann ist Q die Vereinigung der abzählbar vielen summierbaren Mengen Q_n. Hieraus folgt nun unter Berücksichtigung von (11) sowie der Bedingungen 1 und 3

$$A_t x_2(s) = A_t v_1(s) + A_t x_2(s) + \cdots \quad \text{auf} \quad T_2 - P_{2n} \quad \text{für alle} \quad t \in Q_n, \tag{12}$$

wobei die P_{2n} $(n = 1, 2, \ldots)$ J-Nullmengen sind. Dann ist aber

$$x_1(t) A_t x_2(s) = x_1(t) A_t v_1(s) + x_1(t) A_t v_2(s) + \cdots \tag{13}$$

auf $(T_1 \times T_2) - \bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \times P_{2n}$, wobei $\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \times P_{2n}$ nach Satz VI eine K-Nullmenge ist. Außerdem schließen wir aus der Abschätzung

$$\begin{aligned} K(|x_1(t) A_t v_n(s)|) &= K(|x_1(t)|\,|A_t v_n(s)|) \\ &= I_t(|x_1(t)|\, J_s(|A_t v_n(s)|)) \\ &\leqq C I(|x_1|)\, J(|v_n|), \end{aligned}$$

daß die Reihe (13) im Sinne der Norm von $L^1(K)$ konvergiert. Daher gehört die rechte Seite von (13) und damit auch die linke Seite zu $L^1(K)$.

X. *Ist $x(t, s) \in M^+(T_1 \times T_2)$, so folgt aus der Existenz eines der Doppelintegrale $I_t J_s(x)$ und $J_s I_t(x)$, daß x zu $L^1(K)$ gehört.*

Beweis. Es sei $x \in M^+(T_1 \times T_2)$, und es existiere $I_t J_s(x)$. Wegen (3) gilt dann $\overline{K}(x) = I_t J_s(x) < +\infty$, und die Behauptung folgt aus Nr. 7, Satz IX.

XI. *Besitzt $T_1 \times T_2$ eine abzählbare Basis von Umgebungen mit bikompakter abgeschlossener Hülle und ist $x(t, s)$ eine K-meßbare Funktion, so folgt aus der Existenz eines der Doppelintegrale $I_t J_s(x)$ und $J_s I_t(x)$, daß x zu $L^1(K)$ gehört.*

Beweis. Offenbar genügt es, die Gültigkeit der Behauptung für nichtnegative meßbare Funktionen $x(t, s)$ und für eines der Doppelintegrale zu beweisen. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{X}$ die Gesamtheit aller nichtnegativen K-meßbaren Funktionen $x(t, s)$, für die aus der Existenz des Doppelintegrals $I_t J_s(x)$ folgt, daß x zu $L^1(K)$ gehört. Zu zeigen ist dann, daß $\mathfrak{X}$ alle nichtnegativen K-meßbaren Funktionen enthält. Wir führen den Beweis in mehreren Schritten.

a) *Aus $x_n \in \mathfrak{X}$ und $x_n \nearrow x$ folgt $x \in \mathfrak{X}$.*

Das Integral $I_t J_s(x)$ möge existieren. Dann gilt $x(t, s) \in L^1(J)$ für $t \in T_1 - A_1$, wobei A_1 eine I-Nullmenge ist, und es ist $J_s(x) \in L^1(I)$. Da $x_n \leqq x$, gilt auch $x_n(t, s) \in L^1(J)$ für $t \in T_1 - A_1$ und ferner $J_s(x_n) \in L^1(I)$. Aus $x_n \nearrow x$ folgt $J_s(x_n) \nearrow J_s(x)$, daher gilt $I_t J_s(x_n) \nearrow I_t J_s(x)$ (vgl. Nr. 7, Satz VII). Da nun aber $x_n \in \mathfrak{X}$ ist und $I_t J_s(x_n)$ existiert, gilt $x_n \in L^1(K)$ und

$$K(x_n) = I_t J_s(x_n) \leqq I_t J_s(x) < +\infty.$$

Unter Berücksichtigung von Satz VIII aus Nr. 7 schließen wir hieraus, daß $x \in L^1(K)$, also $x \in \mathfrak{X}$ gilt.

b) *Für jede K-meßbare Menge A gilt $\xi_A \in \mathfrak{X}$.*

Es sei U_n $(n = 1, 2, \ldots)$ eine abzählbare Basis von $T_1 \times T_2$, bestehend aus Umgebungen mit bikompakten abgeschlossenen Hüllen, so daß $T_1 \times T_2$ die Vereinigung der summierbaren Mengen $\overline{U}_n$ und A die Vereinigung der summierbaren Mengen $A \cap \overline{U}_n$ ist. Die Mengen $B_n = (A \cap \overline{U}_1) \cup \ldots \cup (A \cap \overline{U}_n)$

sind sicher meßbar, also ist B_n summierbar und daher $\xi_{B_n} \in \mathfrak{X}$. Da aber $\xi_{B_n} \nearrow \xi_A$ gilt, folgt die Behauptung b) aus a).

c) *Für endlich viele meßbare Mengen* A_i $(i = 1, \ldots, n)$ *und nichtnegative Zahlen* c_i *gilt stets* $\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_{A_i} \in \mathfrak{X}$.

Die Behauptung folgt unmittelbar aus b) und der Linearität des Raumes $L^1(K)$.

d) *Auch für abzählbar viele meßbare Mengen* A_i *und nichtnegative Zahlen* c_i *gilt stets* $\sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_{A_i} \in \mathfrak{X}$.

Die Behauptung folgt aus a) und c) wegen $\sum_{i=1}^{n} c_i \xi_{A_i} \nearrow \sum_{i=1}^{\infty} c_i \xi_{A_i}$.

Jetzt sei x eine beliebige nichtnegative K-meßbare Funktion. Wir setzen

$$A_{nm} = \{t : 2^{-n} m < x(t) \leqq 2^{-n}(m+1)\}, \quad \xi_{nm} = \xi_{A_{nm}}$$

und

$$x_n = \sum_{m=1}^{\infty} 2^{-n} m\, \xi_{nm}.$$

Dann gilt $x_n \nearrow x$ und $x_n \in \mathfrak{X}$ (vgl. Nr. 10, Satz VIII). Auf Grund der Behauptung a) ist folglich $x \in \mathfrak{X}$, womit der Satz XI vollständig bewiesen ist.

19. Integration von Vektor- und Operatorfunktionen. Es sei $x(t)$ eine Vektorfunktion, die auf einem lokal bikompakten Raum T definiert ist und deren Werte zu einem Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ gehören. Ferner sei I ein auf $L(T)$ definiertes Integral und μ das zu diesem Integral gehörende Maß. Die Funktion $x(t)$ werde *I-meßbar* genannt, wenn das skalare Produkt $\langle y, x(t)\rangle$ für alle $y \in \mathfrak{H}$ eine meßbare Zahlenfunktion ist. Es sei $x(t)$ eine meßbare Vektorfunktion mit $|x(t)| \leqq \alpha(t)$, wobei $\alpha(t) \in L^1(I)$ ist.

Wegen $|\langle y, x(t)\rangle| \leqq |y|\,|x(t)| \leqq \alpha(t)|y|$ ist auch $\langle y, x(t)\rangle \in L^1(I)$ und $\left|\int \langle y, x(t)\rangle d\mu\right| \leqq |y| \int \alpha(t)\, d\mu$. Die letzte Ungleichung zeigt, daß $\int \langle y, x(t)\rangle\, d\mu$ ein bezüglich y beschränktes lineares Funktional über $\mathfrak{H}$ ist. Auf Grund des Satzes von F. Riesz (§ 5, Nr. 3) gibt es also genau ein Element $z \in \mathfrak{H}$, für das $\int \langle y, x(t)\rangle\, d\mu = \langle y, z\rangle$ mit $|z| \leqq \int \alpha(t)\, d\mu$ ist. Dieses Element z werde das *Integral der Funktion $x(t)$ in bezug auf das Maß μ* genannt und mit $\int x(t)\, d\mu$ bezeichnet. Per definitionem ist also

$$\left\langle y, \int x(t)\, d\mu \right\rangle = \int \langle y, x(t)\rangle\, d\mu \tag{1}$$

und

$$\left| \int x(t)\, d\mu \right| \leqq \int \alpha(t)\, d\mu \quad \text{für} \quad |x(t)| \leqq \alpha(t). \tag{2}$$

Offenbar gelten wieder die üblichen Integraleigenschaften

$$\int c\, x(t)\, d\mu = c \int x(t)\, d\mu,$$

$$\int [x_1(t) + x_2(t)]\, d\mu = \int x_1(t)\, d\mu + \int x_2(t)\, d\mu.$$

Ferner gilt für jeden beschränkten linearen Operator A in $\mathfrak{H}$ die Beziehung

$$\int A\,x(t)\,d\mu = A\int x(t)\,d\mu. \tag{3}$$

Zum Beweis bemerken wir, daß auf Grund von $\langle y, A\,x(t)\rangle = \langle A^* y,\ x(t)\rangle$ und $|A\,(x\ t)| \leqq |A|\,|x(t)| \leqq |A|\,\alpha(t)$ die Funktion $A\,x(t)$ ebenfalls meßbar ist und daß ihr Integral existiert. Ferner ist nach (1)

$$\left\langle y,\ A\int x(t)\,d\mu\right\rangle = \left\langle A^* y,\ \int x(t)\,d\mu\right\rangle = \int \langle A^* y,\ x(t)\rangle\,d\mu$$
$$= \int \langle y,\ A\,x(t)\rangle\,d\mu = \left\langle y,\ \int A\,x(t)\,d\mu\right\rangle,$$

woraus dann (3) folgt.

Jetzt sei $A(t)$ eine beliebige, auf T definierte Operatorfunktion, deren sämtliche Werte beschränkte lineare Operatoren in $\mathfrak{H}$ sind. Die Funktion $A(t)$ heiße *I-meßbar*, wenn $A(t)x$ für jedes $x \in \mathfrak{H}$ eine meßbare Vektorfunktion ist. Es sei $|A(t)| \leqq \alpha(t)$ mit $\alpha(t) \in L^1(I)$. Hieraus schließen wir unter Berücksichtigung der Ungleichung $|A(t)x| \leqq \alpha(t)|x|$, daß das Integral $\int A(t)\,x\,d\mu$ existiert, wobei wegen (2)

$$\left|\int A(t)\,x\,d\mu\right| \leqq \int \alpha(t)\,d\mu\,|x| \tag{4}$$

ist. Folglich wird durch die Formel $y = \int A(t)x\,d\mu$ ein beschränkter Operator über $\mathfrak{H}$ definiert. Dieser Operator werde das *Integral der Operatorfunktion* $A(t)$ *in bezug auf das Maß* μ genannt und mit $\int A(t)\,d\mu$ bezeichnet. Per definitionem ist also

$$\left(\int A(t)\,d\mu\right)x = \int A(t)\,x\,d\mu,$$

und wegen (4) gilt

$$\left|\int A(t)\,d\mu\right| \leqq \int \alpha(t)\,d\mu \quad \text{für} \quad |A(t)| \leqq \alpha(t).$$

Ferner prüft man leicht nach, daß

$$\int c\,A(t)\,d\mu = c\int A(t)\,d\mu,$$

$$\int [A_1(t) + A_2(t)]\,d\mu = \int A_1(t)\,d\mu + \int A_2(t)\,d\mu$$

und für jeden beschränkten linearen Operator B in $\mathfrak{H}$

$$B\int A(t)\,d\mu = \int B\,A(t)\,d\mu \quad \text{und} \quad \int A(t)\,B\,d\mu = \int A(t)\,d\mu\,B$$

gilt.

KAPITEL II

GRUNDBEGRIFFE UND SÄTZE AUS DER THEORIE DER NORMIERTEN ALGEBREN

§ 7. Algebraische Grundbegriffe

1. Definition der Algebra. Eine Menge R von Elementen $x, y, \ldots$ heißt *Algebra*, wenn folgendes gilt:

1. R ist ein linearer Raum;
2. in R ist eine (im allgemeinen nichtkommutative) Multiplikation definiert, die folgende Eigenschaften hat: $\alpha(xy) = (\alpha x)y = x(\alpha y)$, $(xy)z = x(yz)$, $(x+y)z = xz + yz$, $x(y+z) = xy + xz$ für beliebige $x, y, z \in R$ und beliebige Zahlen α.

Elemente x und y einer Algebra R heißen miteinander *vertauschbar*, wenn $xy = yx$ ist. Die Algebra heißt *kommutativ*, wenn alle ihre Elemente paarweise miteinander vertauschbar sind. Wir werden auf die Kommutativität im folgenden meistens verzichten.

Eine Teilmenge $R_1 \subset R$ wird *Teilalgebra* von R genannt, wenn die Addition und Multiplikation der Elemente aus R_1 miteinander sowie die Multiplikation der Elemente aus R_1 mit Zahlen nicht aus R_1 hinausführen.

Offenbar ist der Durchschnitt von beliebig vielen Teilalgebren einer Algebra R ebenfalls eine Teilalgebra von R, sofern er nicht leer ist. Insbesondere ist der Durchschnitt aller Teilalgebren, die eine gegebene Menge $S \subset R$ enthalten, die kleinste Teilalgebra, die S enthält. Wir bezeichnen sie mit $R_a(S)$.

Wie man sofort erkennt, ist $R_a(S)$ die Gesamtheit aller endlichen Summen der Gestalt $\sum_k \lambda_k a_k$, wobei die a_k Produkte von endlich vielen Elementen aus S sind. Einerseits muß nämlich $R_a(S)$ alle diese Elemente enthalten, andererseits bilden diese Elemente eine Algebra, die S umfaßt.

Hieraus folgt: Sind alle Elemente der Menge S paarweise miteinander vertauschbar, so ist $R_a(S)$ eine kommutative Algebra. Besteht S insbesondere aus einem einzigen Element x, so ist $R_a(x)$, d. h. die kleinste Teilalgebra, die x enthält, kommutativ.

Eine kommutative Teilalgebra heißt *maximal*, wenn sie in keiner anderen kommutativen Teilalgebra enthalten ist. Es gilt nun:

I. *Jede kommutative Teilalgebra ist in einer maximalen kommutativen Teilalgebra enthalten.*

B e w e i s. Die Gesamtheit Σ aller kommutativen Teilalgebren der Algebra R, die eine gegebene kommutative Teilalgebra $\mathfrak{A}$ enthalten, ist bezüglich der

Inklusion eine halbgeordnete Menge, die den Voraussetzungen des Zornschen Lemmas genügt; die obere Grenze einer linear geordneten Menge dieser Teilalgebren ist einfach deren Vereinigung. A'so enthält Σ ein maximales Element, das eine maximale Teilalgebra ist, die $\mathfrak{A}$ enthält.

Nun liegt jedes Element x in der zugehörigen kommutativen Teilalgebra $R_a(x)$. Daher folgt aus Satz I sofort:

II. *Jedes Element x liegt in einer maximalen kommutativen Teilalgebra.*

Beispiele. 1. Wir bezeichnen mit $C(X)$ die Gesamtheit aller stetigen komplexen Funktionen über einem topologischen Raum X. In $C(X)$ definieren wir Addition, Multiplikation und Multiplikation mit Zahlen als die Addition und Multiplikation von Funktionen bzw. die Multiplikation von Funktionen mit Zahlen. Dann ist $C(X)$ offenbar eine kommutative Algebra.

2. Es sei X ein beliebiger linearer Raum und $A(X)$ die Gesamtheit aller linearen Operatoren in X, deren Definitionsbereich der ganze Raum X ist. In $A(X)$ nehmen wir als Addition, Multiplikation und Multiplikation mit Zahlen die entsprechenden Operationen mit den Operatoren (vgl. § 1, Nr. 6). Dann ist $A(X)$ eine Algebra, die nur dann kommutativ ist, wenn der Raum X eindimensional ist.

Ist X von endlicher Dimension, etwa n-dimensional, so kann $A(X)$, indem jedem Operator in X seine Matrix bezüglich einer festen Basis zugeordnet wird, als Gesamtheit aller Matrizen n-ter Ordnung dargestellt werden. Hierbei stimmen dann die Operationen in $A(X)$ mit den entsprechenden Matrizenoperationen überein.

3. Es sei X ein Banachscher Raum und $B(X)$ die Gesamtheit aller beschränkten linearen Operatoren in X mit dem Definitionsbereich X (vgl. § 4, Nr. 4). Als Addition, Multiplikation und Multiplikation mit einer Zahl nehmen wir wiederum die entsprechenden Operationen mit Operatoren. Dann ist $B(X)$ eine Algebra, die Teilalgebra von $A(X)$ ist; auch $B(X)$ ist nur dann kommutativ, wenn X eindimensional ist.

4. Es sei W die Gesamtheit aller Funktionen e^{int} $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$. Offenbar ist W eine Teilmenge der Algebra $C(-\infty, \infty)$ aus Beispiel 1. Hier ist $R_a(W)$ die Gesamtheit aller endlichen trigonometrischen Summen $\sum_k c_k e^{ikt}$.

5. Es sei $\mathfrak{C}(X)$ die Gesamtheit aller vollstetigen linearen Operatoren in einem Banachschen Raum X (vgl. § 4, Nr. 6). Als Addition, Multiplikation und Multiplikation mit Zahlen nehmen wir die entsprechenden Operationen mit Operatoren. Dann ist $\mathfrak{C}(X)$ eine Algebra, die offenbar eine Teilalgebra der Algebra $B(X)$ aus Beispiel 3 ist.

2. Algebren mit Einselement. Eine Algebra R heißt *Algebra mit Einselement*, wenn sie ein Element e enthält, das der Bedingung

$$ex = xe = x \quad \text{für alle} \quad x \in R \tag{1}$$

genügt. Ein der Bedingung (1) genügendes Element e wird *Einselement* der Algebra R genannt.

Eine Algebra enthält höchstens ein Einselement. Angenommen, e' wäre neben e ebenfalls ein Einselement, so daß

$$e'x = xe' = x \quad \text{für alle} \quad x \in R \tag{1'}$$

wäre. Setzt man in (1) dann $x = e'$, in (1') aber $x = e$, so hätte man

$$ee' = e'e = e' \quad \text{und} \quad e'e = ee' = e,$$

also $e' = e$.

I. *Jede Algebra R ohne Einselement kann als Teilalgebra einer Algebra R' mit Einselement betrachtet werden.*

Beweis. Eine solche umfassende Algebra muß alle Summen $x' = \alpha e + x$, $x \in R$, enthalten. Andererseits bildet die Gesamtheit aller dieser Summen eine Algebra R', in der die Grundoperationen durch folgende Formeln definiert sind[1]):

$$\left.\begin{aligned} &\beta(\alpha e + x) = \beta\alpha e + \beta x, \\ &(\alpha_1 e + x_1) + (\alpha_2 e + x_2) = (\alpha_1 + \alpha_2) e + (x_1 + x_2), \\ &(\alpha_1 e + x_1)(\alpha_2 e + x_2) = \alpha_1\alpha_2 e + \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + x_1 x_2. \end{aligned}\right\} \quad (2)$$

Daher kann R' als Gesamtheit aller formalen Summen $x' = \alpha e + x$, $x \in R$, realisiert werden, wenn in dieser Gesamtheit die Operationen durch die Formeln (2) definiert werden; die Algebra R selbst ergibt sich für $\alpha = 0$.

Die Algebra R' kann auch als Gesamtheit aller Paare $\{\alpha, x\}$, $x \in R$, realisiert werden. Die Operationen über diesen Paaren hat man dann durch die Formeln

$$\left.\begin{aligned} &\beta\{\alpha, x\} = \{\beta\alpha, \beta x\}, \\ &\{\alpha_1, x_1\} + \{\alpha_2, x_2\} = \{\alpha_1 + \alpha_2, x_1 + x_2\}, \\ &\{\alpha_1, x_1\}\{\alpha_2, x_2\} = \{\alpha_1\alpha_2, \alpha_1 x_2 + \alpha_2 x_1 + x_1 x_2\} \end{aligned}\right\} \quad (2')$$

zu definieren, entsprechend der Definition der komplexen Zahlen. Die Algebra R selbst ist dann die Gesamtheit aller Paare $\{0, x\}$, $x \in R$, wobei das Element x und das Paar $\{0, x\}$ miteinander zu identifizieren sind. Setzt man $e = \{1, 0\}$, so hat man

$$\{\alpha, x\} = \alpha\{1, 0\} + \{0, x\} = \alpha e + x,$$

d. h., die beiden Realisierungen sind einander äquivalent.

Offenbar ist R' die kleinste Algebra mit Einselement, die R enthält. Der Übergang von R zu R' wird *Adjunktion des Einselements* genannt.

Satz I zeigt, daß die Untersuchung von Algebren ohne Einselement auf die Untersuchung von Algebren mit Einselement zurückgeführt werden kann. Für gewisse Anwendungen ist es allerdings nützlich, wenn man Sätze zur Verfügung hat, die sich unmittelbar auf Algebren ohne Einselement beziehen. Aus diesem Grunde werden wir im folgenden neben den Sätzen, die Algebren mit Einselement betreffen, häufig auch die entsprechenden Sätze für Algebren ohne Einselement angeben.

Ist R eine Algebra mit Einselement und S eine Teilmenge von R, so ist der Durchschnitt aller Teilalgebren von R, die S und das Einselement enthalten, die kleinste Teilalgebra mit Einselement, welche die Menge S enthält. Wir bezeichnen sie mit $R'_a(S)$. Offenbar ergibt sich $R'_a(S)$ aus $R_a(S)$ durch Adjunktion des Einselements. Daher ist $R'_a(S)$ die Gesamtheit aller Summen $\alpha e + \sum_k \alpha_k a_k$, wobei die a_k Produkte von endlich vielen Elementen aus S sind.

II. *Eine maximale kommutative Teilalgebra R_1 einer Algebra R mit Einselement ist ebenfalls eine Algebra mit Einselement.*

[1]) Jedes Element x' aus R' läßt sich auf eindeutige Weise in der Gestalt $x' = \alpha e + x$, $x \in R$, darstellen, weil R nach Voraussetzung kein Einselement hat.

Anderenfalls entstände nämlich aus R_1 durch Adjunktion des Einselements eine R_1 echt enthaltende kommutative Teilalgebra R_1', was der Maximaleigenschaft von R_1 widerspricht.

Gilt $yx = e$, so heißt y *linksinverses Element* von x, in Zeichen $y = x_l^{-1}$. Entsprechend spricht man von einem *rechtsinversen Element* $z = x_r^{-1}$, wenn $xz = e$ ist. Gibt es zu x sowohl linksinverse als auch rechtsinverse Elemente, so stimmen sämtliche inversen Elemente miteinander überein. Multipliziert man nämlich beide Seiten der Gleichung $x_l^{-1} x = e$ von rechts mit x_r^{-1}, so ergibt sich

$$x_r^{-1} = (x_l^{-1} x)\, x_r^{-1} = x_l^{-1}(x x_r^{-1}) = x_l^{-1} e = x_l^{-1}.$$

In diesem Fall sagt man, es existiert das zum Element x inverse Element x^{-1} $(= x_l^{-1} = x_r^{-1})$.

III. *Existiert x^{-1} und sind x und y miteinander vertauschbar, so sind auch x^{-1} und y miteinander vertauschbar.*

Man braucht zum Beweis nur die beiden Seiten der Beziehung $xy = yx$ von links und rechts mit x^{-1} zu multiplizieren und erhält dann $yx^{-1} = x^{-1}y$.

IV. *Ist $\mathfrak{A}$ eine maximale kommutative Teilalgebra und x ein Element aus $\mathfrak{A}$, dessen Inverses x^{-1} existiert, so gehört auch x^{-1} zu $\mathfrak{A}$.*

Nach Satz III ist x^{-1} nämlich mit allen Elementen von $\mathfrak{A}$ vertauschbar, so daß x^{-1} zu $\mathfrak{A}$ gehören muß, weil $\mathfrak{A}$ maximal ist.

Der Begriff des inversen Elements läßt sich in der Weise modifizieren, daß er auch auf Algebren ohne Einselement anwendbar wird. Dies soll jetzt geschehen.

Wir nennen $y \in R$ ein *linkes quasiinverses Element* von $x \in R$, wenn $e + y$ in R' linksinverses Element von $e + x$ ist, d. h., wenn

$$(e + y)(e + x) = e \tag{3}$$

gilt. Aus (3) folgt, wenn man ausmultipliziert und auf beiden Seiten e fortläßt, die Beziehung

$$x + y + yx = 0,$$

so daß in der Definition des linken quasiinversen Elements das Einselement nicht mehr auftritt. Entsprechend werden die rechten quasiinversen Elemente und schließlich die zweiseitigen quasiinversen Elemente definiert.

Wie man leicht sieht, gelten für quasiinverse Elemente die den Sätzen III und IV entsprechenden Sätze.

Beispiele. 1. Die Algebra $C(X)$ aus Nr. 1, Beispiel 1, ist eine Algebra mit Einselement, und zwar ist die Funktion, die auf X identisch gleich Eins ist, das Einselement dieser Algebra.

2. Die Algebren $A(X)$ und $B(X)$ aus den Beispielen 2 und 3 von Nr. 1 sind Algebren mit Einselement; in ihnen spielt der identische Operator die Rolle des Einselements.

3. Die Algebra $\mathfrak{C}(X)$ aus Nr. 1, Beispiel 5, ist im Fall eines unendlichdimensionalen Raumes X eine Algebra ohne Einselement. Bezeichnet nämlich E einen Operator aus $\mathfrak{C}(X)$, welcher der Bedingung $EA = AE = A$ für alle $A \in \mathfrak{C}(X)$ genügt, so ist E, wie man sofort sieht, der Einheitsoperator, der im Fall eines unendlichdimensionalen Raumes X nicht vollstetig ist (vgl. § 4, Nr. 6).

3. Das Zentrum einer Algebra. Unter dem *Zentrum* einer Algebra R versteht man die Gesamtheit aller Elemente $a \in R$, die mit sämtlichen Elementen dieser Algebra vertauschbar sind.

Das Zentrum von R ist eine kommutative Teilalgebra von R.

Es bezeichne Z das Zentrum von R. Seine Elemente bilden gewiß eine Teilalgebra; sind nämlich $a \in R$ und $b \in R$ mit allen Elementen von R vertauschbar, so haben auch die Elemente $\lambda a + \mu b$ und ab diese Eigenschaft. Da die Elemente des Zentrums mit allen Elementen der Algebra vertauschbar sind, sind sie insbesondere auch untereinander vertauschbar, d. h., Z ist eine kommutative Teilalgebra.

Das Zentrum enthält natürlich alle Elemente der Gestalt λe. Ist die Algebra R selbst kommutativ, so stimmt das Zentrum mit R überein.

4. Ideale.[1]) Eine nichtleere Menge I_l von Elementen einer Algebra R heiße *Linksideal*, wenn folgendes gilt:

α) $I_l \neq R$;

β) I_l ist ein Teilraum des linearen Raumes R;

γ) aus $x \in I_l$ und $a \in R$ folgt $ax \in I_l$.

Ganz entsprechend werden *Rechtsideale* definiert.

Offenbar kann weder ein Rechtsideal noch ein Linksideal das Einselement der Algebra R enthalten (wenn R eine Algebra mit Einselement ist); wäre nämlich $e \in I_l$, so würde aus der Bedingung γ) folgen, daß $a = ae \in I_l$ für alle $a \in R$, also $I_l = R$ wäre.

I. *Ein Element x einer Algebra mit Einselement besitzt genau dann ein linksinverses Element, wenn es in keinem Linksideal enthalten ist.*

Für die Existenz eines rechtsinversen Elements gilt die entsprechende Bedingung.

Beweis. Es sei x ein Element ohne Linksinverses. Die Gesamtheit I_l aller Elemente der Gestalt yx kann dann nicht mit der gesamten Algebra übereinstimmen, weil sonst $yx = e$ für ein gewisses y wäre und x das linksinverse Element y hätte. Demnach ist I_l ein x enthaltendes Linksideal.

Umgekehrt gehöre nun x zu einem Linksideal I_l. Hätte x ein Linksinverses, so wäre $e = x_l^{-1} x \in I_l$, was aber unmöglich ist. Folglich existiert kein Inverses x_l^{-1}.

Ein Linksideal (Rechtsideal) der Algebra R heiße *maximal*, wenn es in keinem anderen Linksideal (Rechtsideal) von R enthalten ist.

II. *Jedes Linksideal (Rechtsideal) einer Algebra R mit Einselement kann zu einem maximalen Linksideal (Rechtsideal) erweitert werden.*

Beweis. Für zwei Ideale I_l' und I_l'', die ein gegebenes Ideal I_l enthalten, soll $I_l' < I_l''$ geschrieben werden, wenn $I_l' \subset I_l''$ ist. Damit wird die Gesamtheit aller Ideale $I_l' \supset I_l$ der Algebra R zu einer halbgeordneten Menge, die der Voraussetzung des ZORNschen Lemmas genügt; die obere Grenze einer ge-

[1]) In der klassischen Algebra wird auch die Algebra R selbst als Ideal angesehen (natürlich ist R dann ein zweiseitiges Ideal, zugleich also Links- und Rechtsideal); zum Unterschied von den von uns eingeführten Idealen werden wir R *uneigentliches Ideal* nennen.

ordneten Menge J von Idealen $I'_l \supset I_l$ ist die mengentheoretische Vereinigung aller Ideale I'_l der Menge J; diese Vereinigung genügt den Bedingungen β) und γ) und stimmt nicht mit R überein, weil sie nicht das Einselement der Algebra enthält, so daß sie ebenfalls ein Linksideal ist.

Auf Grund des ZORNschen Lemmas gibt es aber unter den Idealen $I'_l \supset I_l$ wenigstens ein maximales Ideal.

Aus den Sätzen I und II folgt der Satz

III. *Ein Element x einer Algebra mit Einselement besitzt genau dann ein Linksinverses (Rechtsinverses), wenn es in keinem maximalen Linksideal (Rechtsideal) enthalten ist.*

Eine Menge I von Elementen einer Algebra werde *zweiseitiges Ideal* in R genannt, wenn I sowohl Rechtsideal als auch Linksideal in R ist. Eine Algebra R heiße *einfach*, wenn es in ihr keine vom Ideal (0) verschiedenen zweiseitigen Ideale gibt.

Nun sei I ein zweiseitiges Ideal in R. Zwei Elemente x_1 und x_2 aus R sollen *äquivalent bezüglich I* genannt werden, wenn $x_1 - x_2 \in I$ ist. Dann zerfällt die gesamte Algebra R in Klassen $\xi, \eta, \ldots$ von unter inander äquivalenten Elementen. Die Gesamtheit dieser Klassen werde mit R_1 bezeichnet. Wir führen in R_1 eine Addition, eine Multiplikation und eine Multiplikation mit einer Zahl ein, indem wir diese Operationen mit den Repräsentanten der Klassen ausführen. Da I ein zweiseitiges Ideal ist, hängt das Ergebnis der Operationen nicht von der Wahl der Repräsentanten ab.

Mit diesen Operationen wird R_1 eine Algebra. Diese Algebra wird *Quotientenalgebra der Algebra R nach dem Ideal I* genannt und mit R/I bezeichnet.

Ein zweiseitiges Ideal werde *maximal* genannt, wenn es in keinem anderen zweiseitigen Ideal enthalten ist.

IV. *Jedes zweiseitige Ideal einer Algebra mit Einselement kann zu einem maximalen zweiseitigen Ideal erweitert werden.*

Der Beweis dieses Satzes entspricht dem Beweis von Satz II.

Die Sätze II bis IV können wie folgt auf Algebren ohne Einselement übertragen werden.

Ein Linksideal I_l einer Algebra R heiße *regulär*, wenn in R ein Element u existiert mit der Eigenschaft, daß $xu - x \in I_l$ für alle $x \in R$ ist. Das Element u selbst werde *Einselement bezüglich des Ideals I_l* oder *I_l-Einselement* genannt. Entsprechend definiert man den Begriff des *regulären Rechtsideals* und den Begriff des Einselements bezüglich eines derartigen Ideals. Schließlich soll ein zweiseitiges Ideal I regulär genannt werden, wenn ein Element u existiert derart, daß

$$ux - x \in I \quad \text{und} \quad xu - x \in I$$

für alle $x \in R$ ist.

Ist R eine Algebra mit dem Einselement e, so kann für u stets e genommen werden, d. h., *in einer Algebra mit Einselement ist jedes Ideal regulär.*

V. *Jedes reguläre (Rechts-, Links-, zweiseitige) Ideal kann zu einem maximalen (Rechts-, Links-, zweiseitigen) Ideal erweitert werden (das ebenfalls regulär ist).*

Beweis. Es sei etwa I_l ein reguläres Linksideal und ferner u ein I_l-Einselement. Dann ist u in keinem Linksideal $I'_l \supset I_l$ enthalten. Um dies einzusehen, beachten wir, daß mit $u \in I'_l$ auch $xu \in I'_l$ wäre. Nun ist aber außerdem $x - xu \in I_l \subset I'_l$, so daß

$$x = (x - xu) + xu \in I'_l$$

für alle $x \in R$, also $I'_l = R$ wäre.

Es bleibt somit nur noch die im Beweis von Satz II geführte Überlegung anzuwenden.

Entsprechend erledigt man den Fall eines Rechts- bzw. zweiseitigen Ideals.

VI. *Es sei R eine Algebra ohne Einselement und R' die aus R durch Adjunktion eines Einselements entstehende Algebra. Dann ist die Abbildung $I'_r \to I_r = I'_r \cap R$ eine Abbildung der Menge aller Rechtsideale I'_r von R', die nicht ganz in R enthalten sind, auf die Menge aller regulären Rechtsideale von R. Die entsprechenden Aussagen gelten auch für Links- und zweiseitige Ideale, und im Fall zweiseitiger Ideale ist die Abbildung $I' \to I = I' \cap R$ eineindeutig.*

Beweis. Es sei I'_r ein Rechtsideal in R', das nicht ganz in R enthalten ist. Wir setzen $I_r = I'_r \cap R$. Offenbar ist I_r ein Rechtsideal in R. Wir wollen zeigen, daß I_r regulär ist. Da I'_r nicht ganz in R liegt, gibt es in I'_r ein Element $y = -e + u$, $u \in R$. Dann ist u ein I_r-Einselement, weil

$$-x + ux = (-e + u)\,x \in I_r \quad \text{für alle} \quad x \in R$$

ist. Folglich ist I_r regulär.

Umgekehrt sei I_r ein reguläres Rechtsideal in R. Ferner sei u ein I_r-Einselement. Wie man leicht sieht, ist dann die Gesamtheit I'_r aller Elemente $y \in R'$, für die $uy \in I_r$ gilt, ein Rechtsideal in R', das I_r enthält. Hierbei ist I'_r nicht ganz in R enthalten, weil aus der Beziehung

$$u(u - e) = u^2 - u \in I_r$$

folgt, daß $u - e \in I'_r$, andererseits aber $u - e \notin R$ ist. Nun sei $y \in R$. Da $uy - y \in I_r$ für alle $y \in R$ ist, gilt $y \in I_r$ genau dann, wenn $y \in I'_r$ ist. Folglich gilt $I_r = I'_r \cap R$, und unsere Behauptung ist für den Fall eines rechtsseitigen Ideals bewiesen. Für die anderen Fälle verläuft der Beweis entsprechend.

Im Fall zweiseitiger Ideale ist noch die Eineindeutigkeit der Abbildung $I' \to I = I' \cap R$ zu beweisen. Mit anderen Worten, wir müssen folgendes zeigen: Sind I', J' zwei nicht ganz in R enthaltene zweiseitige Ideale von R' und gilt $I \cap R = I' = J' \cap R$, so ist $I' = J'$. Da weder I' noch J' ganz in R enthalten sind, gibt es Elemente u und v von R derart, daß $-e + u \in I'$ und $-e + v \in J'$ gilt. I' und J' sind voraussetzungsgemäß zweiseitige Ideale, also gilt $-v + vu = v(-e + u) \in I' \cap R = I$, $-u + vu = (-e + v)\,u \in J' \cap R = I$, somit $u - v \in I$. Es sei $\lambda e + y \in I'$. Dann gilt $\lambda u + uy = u(\lambda e + y) \in I$ und $-y + uy = (-e + u)\,y \in I$, also $\lambda u + y = \lambda u + uy - (-y + uy) \in I$. Dann gilt aber auch $\lambda e + y = \lambda(e - v) + \lambda(v - u) + \lambda u + y \in J'$, und das besagt $I' \subset J'$. Analog folgert man $J' \subset I'$, also ist $I' = J'$.

Der soeben bewiesene Satz gestattet es, die Untersuchung von regulären Idealen in R auf die Untersuchung von Idealen in R' zurückzuführen. Insbesondere folgt aus ihm: *Die maximalen regulären (Rechts-, Links-, zweiseitigen)*

Ideale in R ergeben sich, indem man die maximalen (Rechts- bzw. Links- bzw. zweiseitigen) Ideale in R', die nicht mit R übereinstimmen, mit R zum Schnitt bringt.

VII. *Ein Element x einer Algebra R hat genau dann kein linkes quasiinverses Element, wenn*

$$I_l = \{z + zx\}, \quad z \in R,$$

ein Linksideal ist. In diesem Fall ist I_l ein reguläres Linksideal, das x nicht enthält.

Beweis. Offenbar genügt I_l den Bedingungen β) und γ) in der Definition des Linksideals. Ist I_l kein Linksideal, so kann also nur $I_l = R$ sein. Folglich gibt es ein Element $z \in R$, für das

$$z + zx = -x$$

oder

$$x + z + zx = 0$$

ist. Dies bedeutet, daß z ein linkes quasiinverses Element von x ist.

Hat nun umgekehrt x ein linkes quasiinverses Element, so gilt auf Grund des eben Gesagten $x \in I_l$. Dann ist aber $-zx \in I_l$ und damit

$$z = (z + zx) - zx \in I_l$$

für beliebiges $z \in R$, d. h., es ist $I_l = R$. Aus dieser Überlegung folgt ferner, daß $x \notin I_l$ ist, wenn I_l Ideal ist. Schließlich ist $u = -x$ ein Einselement bezüglich des Ideals I_l, so daß I_l regulär ist.

Offenbar gilt der entsprechende Satz für Elemente, die kein rechtes quasiinverses Element haben.

VIII. *Ein Element x einer Algebra R besitzt genau dann ein linkes quasiinverses Element, wenn es zu jedem maximalen regulären Linksideal M_l ein Element y gibt, für das*

$$x + y + yx \in M_l$$

ist.

Beweis. Die Bedingung ist gewiß notwendig, weil es genügt, für y ein linkes quasiinverses Element von x zu nehmen. Jetzt sei diese Bedingung erfüllt. Wir nehmen an, x habe kein linkes quasiinverses Element. Dann wäre $I_l = \{z + zx\}$ ein reguläres Linksideal in R, und es gäbe ein maximales Linksideal $M_l \supset I_l$. Auf Grund unserer Bedingung gibt es ein Element y mit

$$x + y + yx \in M_l.$$

Es müßte $y + yx \in I_l \subset M_l$ sein. Also wäre $x \in M_l$. Hieraus würde schließlich $-zx \in M_l$ und damit

$$z = -zx + (z + zx) \in M_l$$

für beliebiges $z \in R$ folgen, so daß $M_l = R$ wäre, was aber unmöglich ist.

5. Das Radikal. Ein Element x_0 einer Algebra R mit Einselement heiße *wesentlich nilpotent*, wenn $(e + yx_0)_l^{-1}$ für jedes Element $y \in R$ existiert. Die Gesamtheit aller wesentlich nilpotenten Elemente der Algebra R werde ihr *Radikal* genannt.

I. *Das Radikal einer Algebra mit Einselement stimmt mit dem Durchschnitt aller ihrer maximalen Linksideale überein.*

Beweis. Das Element x_0 möge allen maximalen Linksidealen angehören. Würde für ein gewisses $y \in R$ das inverse Element $(e + yx_0)_l^{-1}$ nicht existieren, so gäbe es wenigstens ein Linksideal, das $z = e + yx_0$ enthielte. Offenbar dürfen wir dieses Linksideal als maximal annehmen. Nach Voraussetzung enthielte es dann das Element yx_0. Daher wäre auch

$$e = z - yx_0 \in I_l,$$

was jedoch unmöglich ist. Demnach existiert $(e + yx_0)_l^{-1}$ für beliebiges $y \in R$, d. h., x_0 gehört zum Radikal von R. Umgekehrt möge nun x_0 dem Radikal angehören. Zu zeigen ist, daß x_0 in allen maximalen Linksidealen von R liegt. Wir nehmen das Gegenteil an; es sei also $x_0 \notin I_l$. Dann müßte die Gesamtheit aller Elemente z der Gestalt $z = a - yx_0$, $a \in I_l$, $y \in R$, mit der gesamten Algebra übereinstimmen, weil sie sonst ein Linksideal wäre, welches das maximale Linksideal I_l als echten Teil enthielte. Insbesondere ließe sich also das Einselement e in der Gestalt $e = a - yx_0$ darstellen. Hieraus würde nun aber folgen, daß $a = e + yx_0$ als Element des Ideals I_l kein Linksinverses hat, und wir hätten einen Widerspruch zu unserer Annahme. Damit ist Satz I bewiesen.

Aus Satz I folgt, daß das Radikal ein Linksideal ist.

II. *Ein Element x_0 einer Algebra R mit Einselement gehört genau dann zu ihrem Radikal, wenn zu jedem Element a der Algebra R das zweiseitige Inverse $(e + ax_0)^{-1}$ existiert.*

Beweis. Nach der Definition des Radikals existiert ein linksinverses Element $(e + ax_0)_l^{-1}$. Wir bezeichnen eines dieser linksinversen Elemente mit $e + y$, so daß

$$(e + y)(e + ax_0) = e \tag{1}$$

gilt. Diese Beziehung bedeutet, daß $e + y$ das rechtsinverse Element $e + ax_0$ hat. Außerdem ergibt sich aus (1) durch Auflösen der Klammern

$$y = -yax_0 - ax_0. \tag{2}$$

Nun bezeichnen wir mit I das Radikal der Algebra. Da $x_0 \in I$ gilt und I ein Linksideal ist, folgt aus (2), daß $y \in I$ ist. Folglich existiert für jedes $b \in R$ ein Linksinverses $(e + by)_l^{-1}$. Wird $b = e$ gesetzt, so ergibt sich die Existenz von $(e + y)_l^{-1}$. Wie wir sahen, existiert andererseits $(e + y)_r^{-1} = e + ax_0$. Demzufolge existiert das zweiseitige Inverse $(e + y)^{-1} = e + ax_0$. Dann ist aber $e + y$ zweiseitiges Inverses von $e + ax_0$.

Wir haben oben das Radikal mit Hilfe von Linksinversen definiert. Entsprechend könnte man es auch mit Hilfe von Rechtsinversen definieren. Hierzu bezeichne I' die Gesamtheit aller Elemente x mit der Eigenschaft, daß das Rechtsinverse $(e + xa)_r^{-1}$ für alle Elemente a von R existiert. Geht man nun so vor wie beim Beweis von Satz I, so erhält man, daß I' der Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale der Algebra und damit selbst ein Rechtsideal ist.

Weiter findet man wie beim Beweis von Satz II, daß I' aus den und nur den Elementen x_0 besteht, welche die Eigenschaft haben, daß $(e + x_0 a)^{-1}$ für alle Elemente a der Algebra existiert.

Hat man sodann gezeigt, daß $(e + x_0 a)^{-1}$ genau dann existiert, wenn $(e + a x_0)^{-1}$ existiert, so folgt, daß I' mit dem Radikal übereinstimmt. Existiert etwa

$$(e + a x_0)^{-1} = e + y,$$

so folgt

$$(e + x_0 a)^{-1} = e - x_0 a - x_0 y a,$$

weil

$$(e + x_0 a)(e - x_0 a - x_0 y a) - e = -x_0[(e + a x_0)(e + y) - e]\, a = 0$$

und

$$(e - x_0 a - x_0 y a)(e + x_0 a) - e = -x_0[(e + y)(e + a x_0) - e]\, a = 0$$

ist.

Es gilt also der Satz

III. *Der Durchschnitt aller maximalen Linksideale stimmt mit dem Durchschnitt aller maximalen Rechtsideale überein und ist das Radikal der Algebra.*

Insbesondere folgt hieraus, daß das Radikal ein zweiseitiges Ideal ist.

Eine Algebra werde *halbeinfach* genannt, wenn ihr Radikal nur aus dem Nullelement besteht.

Jetzt sei R eine Algebra ohne Einselement und R' die aus R durch Adjunktion des Einselements entstehende Algebra. Die Existenz eines linksinversen Elements von $e + y x_0$ in R' ist gleichbedeutend mit der Existenz eines linken quasiinversen Elements von $y x_0$ für alle $y \in R'$. Daher ist die anschließend formulierte Definition des wesentlich nilpotenten Elements unserer obigen Definition für den Fall einer Algebra mit Einselement äquivalent. Ein Element x_0 heiße *wesentlich nilpotent*, wenn $\alpha x_0 + z x_0$ für jedes $z \in R$ und jede Zahl α ein linkes quasiinverses Element besitzt. In dieser Definition braucht R offenbar keine Algebra mit Einselement zu sein. Die Gesamtheit aller wesentlich nilpotenten Elemente der Algebra R (mit oder ohne Einselement) soll wieder *Radikal* genannt werden. Aus dieser Definition folgt nun sofort, daß

$$I = R \cap I' \tag{3}$$

ist, wobei I das Radikal von R und I' das Radikal von R' bezeichnet.

Eine Algebra R werde *radikal* genannt, wenn sie mit ihrem Radikal übereinstimmt. Anderenfalls heiße sie *nichtradikal*. Aus Nr. 4, Satz VII, folgt: *In einer nichtradikalen Algebra gibt es reguläre und daher auch maximale reguläre Links- und Rechtsideale.* Kombinieren wir dieses Ergebnis mit Satz VI aus Nr. 4 und Formel (3), so erhalten wir den Satz

III'. *In einer nichtradikalen Algebra ist das Radikal sowohl gleich dem Durchschnitt aller maximalen regulären Linksideale als auch gleich dem Durchschnitt aller maximalen regulären Rechtsideale. Das Radikal ist also ein zweiseitiges Ideal.*

IV. *Die Quotientenalgebra nach dem Radikal ist eine halbeinfache Algebra.*

Beweis. Es sei I das Radikal der Algebra R und J das Radikal der Algebra R/I. Das Element ξ der Algebra R/I möge zu J gehören. Dies bedeutet, daß

das Element $\zeta = \alpha\xi + \eta\xi$ für beliebiges $\eta \in R/I$ und beliebiges α ein linkes Quasiinverses hat. Wird dieses mit ζ' bezeichnet, so gilt

$$\zeta' + \zeta + \zeta'\zeta = 0. \tag{4}$$

Nun seien x, y, z bzw. z' irgendwelche Repräsentanten der Klassen ξ, η, ζ bzw. ζ'. Dann bedeutet (4), daß

$$z' + z + z'z = p, \quad p \in I,$$

ist, wobei wir z von der Form

$$z = \alpha x + yx$$

annehmen dürfen. Da $p \in I$ ist, hat p ein linkes Quasiinverses. Wir bezeichnen dieses mit p'. Man erkennt unmittelbar, daß $p' + z' + p'z'$ linkes quasiinverses Element von z ist. Folglich hat $z = \alpha x + yx$ für jedes $y \in R$ und jedes α ein Quasiinverses. Es ist also $x \in I$, d. h. $\xi = 0$. Daher ist $J = (0)$, und R/I ist eine halbeinfache Algebra.

Erwähnt sei das folgende wichtige Beispiel einer halbeinfachen Algebra. Es sei X ein gegebener Vektorraum. Wir nennen eine Algebra von linearen Operatoren in X *irreduzibel*, wenn es keinen von (0) und X verschiedenen Teilraum gibt, der bezüglich aller Operatoren aus R invariant ist.

V. *Jede (von* (0) *verschiedene) irreduzible Algebra R von linearen Operatoren in einem Vektorraum X ist eine halbeinfache Algebra.*

Beweis. Für ein festes $x \in X$, $x \neq 0$, ist die Gesamtheit Rx aller Vektoren Ax, $A \in R$, ein Teilraum von X, der bezüglich aller Operatoren aus R invariant ist. Folglich ist entweder $Rx = (0)$ oder $Rx = X$. Die Gesamtheit $\mathfrak{N}$ aller Vektoren x, für die $Rx = (0)$ gilt, ist ebenfalls ein Teilraum von X, der bezüglich aller Operatoren $A \in R$ invariant ist. Es ist also entweder $\mathfrak{N} = (0)$ oder $\mathfrak{N} = X$. Der zweite Fall würde bedeuten, daß entgegen der Voraussetzung $R = (0)$ wäre. Folglich ist $\mathfrak{N} = (0)$ und $Rx = X$ für jedes $x \in X$, $x \neq 0$. Diese Überlegung ist auch auf jedes zweiseitige Ideal $I \neq (0)$ in R anwendbar, weil für ein solches Ideal I die Mengen Ix und $\{x \in X : Ix = 0\}$ Teilräume von X sind, die bezüglich aller Operatoren $A \in R$ invariant sind. Folglich gilt $Ix = X$ für jedes derartige Ideal und jedes $x \in X$, $x \neq 0$.

Jetzt sei I das Radikal von R, und es sei $A \in I$. Ist $A \neq 0$, so gibt es ein $x \in X$ mit $Ax \neq 0$, so daß $RAx = X$ ist. Daher gibt es einen Operator $B \in R$, für den $BAx = -x$ ist. Nun besitzt aber BA ein linkes Quasiinverses, weil $A \in I$ ist. Wir bezeichnen es mit C. Dann ist $C + BA + CBA = 0$ und daher $Cx + BAx + CBAx = 0$. Hieraus folgt nun

$$x = -BAx = Cx + CBAx = Cx - Cx = 0,$$

was aber unmöglich ist. Somit ist $I = (0)$, d. h., R ist eine halbeinfache Algebra.

6. Homomorphismen und Isomorphismen von Algebren. Eine Abbildung einer Algebra R in eine Algebra R' wird ein *Homomorphismus von R in R'* genannt, wenn aus $x \to x'$ und $y \to y'$ folgt, daß $\lambda x \to \lambda x'$, $x + y \to x' + y'$,

$xy \to x'y'$. Ist hierbei das Bild von R die ganze Algebra R', so spricht man von einem *Homomorphismus von* R *auf* R'.

Bei einem Homomorphismus bleiben die in den vorhergehenden Abschnitten definierten Begriffe invariant, insbesondere gilt: Einselemente, Ideale und Teilalgebren von R gehen in Einselemente bzw. Ideale bzw. Teilalgebren von R' über.

Ein Homomorphismus, der eine umkehrbar eindeutige Abbildung vermittelt, wird *Isomorphismus* genannt. Zwei Algebren R und R' heißen *isomorph*, wenn es einen Isomorphismus von R auf R' gibt. Zwei isomorphe Algebren werden als nicht wesentlich verschieden voneinander angesehen.

Homomorphismen von Algebren lassen sich mit Hilfe zweiseitiger Ideale beschreiben.

I. *Bei einem Homomorphismus von R in R' ist das volle Urbild I des Nullelements $0'$ von R' ein zweiseitiges Ideal in R.*

Beweis. Es sei $x \in I$ und $y \in I$. Dies bedeutet, daß $x \to 0'$ und $y \to 0'$. Für alle $a \in R$ gilt also

$$ax \to a'0' = 0', \quad xa \to 0'a' = 0', \quad x + y \to 0' + 0' = 0', \quad \lambda x \to \lambda 0' = 0'.$$

Folglich ist $ax \in I$, $xa \in I$, $x + y \in I$ und $\lambda x \in I$, d. h., I ist ein zweiseitiges Ideal.

Dieses Ideal wird *Kern des Homomorphismus* von R in R' genannt.

Zwei Elemente x und y gehen offenbar genau dann in ein und dasselbe Element von R' über, wenn $x - y \in I$ ist. Dies zeigt, daß die vollen Urbilder der Elemente von R' die Restklassen nach dem Ideal I sind, d. h. die Elemente von R/I. Es gilt also der Satz

II. *Bei einer homomorphen Abbildung einer Algebra R in eine Algebra R' ist das volle Urbild I des Nullelements in R' ein zweiseitiges Ideal von R, während das homomorphe Bild selbst der Restklassenalgebra von R nach I isomorph ist. Umgekehrt erzeugt jedes zweiseitige Ideal I der Algebra R einen Homomorphismus der Algebra R auf die Restklassenalgebra R/I.*

Dieser Homomorphismus von R auf R/I, der darin besteht, jedem Element $x \in R$ diejenige Klasse ξ zuzuordnen, welche x enthält, wird *natürlicher Homomorphismus* von R auf R/I genannt.

Identifiziert man die Bilder der Elemente der Algebra R bei einem gegebenen Homomorphismus mit den ihnen entsprechenden Elementen der Algebra R/I, so bedeutet dies nach Satz II, daß dieser Homomorphismus der natürliche Homomorphismus von R auf R/I ist.

III. *Eine Restklassenalgebra R/I ist genau dann einfach, wenn I ein maximales zweiseitiges Ideal in R ist.*

Beweis. Es sei I_1 ein zweiseitiges Ideal in R/I. Das volle Urbild I' von I_1 bei dem natürlichen Homomorphismus $R \to R/I$ ist ein zweiseitiges Ideal in R, welches das Ideal I umfaßt. Ist daher I ein maximales Ideal in R, so stimmt das Ideal I' mit I überein. Es gibt in R/I also nur das aus dem Nullelement bestehende Ideal $I_1 = (0)$, d. h., R/I ist eine einfache Algebra. Umgekehrt sei

nun I kein maximales zweiseitiges Ideal in R. Dann gibt es ein zweiseitiges Ideal $I_1' \supset I$, $I_1' \neq I$.

Das Bild des Ideals I_1' bei dem Homomorphismus $R \to R/I$ ist aber ein von (0) verschiedenes Ideal in R/I, so daß R/I keine einfache Algebra ist.

In gewissen Fällen erweist es sich als zweckmäßig, anstelle der Homomorphismen sogenannte *Antihomomorphismen* von Algebren zu betrachten. Man versteht darunter Abbildungen, bei denen

$$\lambda x \to \lambda x', \quad x + y \to x' + y', \quad xy \to y'x'$$

gilt, wenn

$$x \to x', \quad y \to y'$$

ist. Offenbar gilt der Satz I auch noch für Antihomomorphismen.

7. Reguläre Darstellung einer Algebra. Als Beispiel für einen Homomorphismus einer Algebra R kann ihre sogenannte linke reguläre Darstellung dienen. Um diese Darstellung zu erhalten, ordnen wir jedem Element $a \in R$ den wie folgt definierten Operator A_a zu:

$$A_a x = ax;$$

die Anwendung von A_a auf ein Element $x \in R$ besteht also darin, dieses Element von links mit a zu multiplizieren. Offenbar ist A_a ein linearer Operator in der als Vektorraum betrachteten Algebra R.

Wie man sofort sieht, ist die Zuordnung $a \to A_a$ ein Homomorphismus der Algebra R in die Algebra der linearen Operatoren in R. Dieser Homomorphismus heißt *linke reguläre Darstellung* (oder *reguläre Linksdarstellung*) der Algebra R. Der Kern dieses Homomorphismus besteht aus den und nur den Elementen a von R, die der Bedingung

$$ax = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in R$$

genügen. Hieraus folgt insbesondere: *Ist R eine Algebra mit Einselement, so ist die linke reguläre Darstellung ein Isomorphismus.*

Offenbar kann nun ein Linksideal I_l der Algebra R als ein Teilraum von R definiert werden, der von R verschieden ist und bezüglich aller Operatoren A_a der linken regulären Darstellung invariant ist. Daher erzeugt der Operator A_a einen linearen Operator im Quotientenraum R/I_l (vgl. § 1, Nr. 7). Bezeichnen wir diesen mit $A_a^\wedge$, so ist die Zuordnung $a \to A_a^\wedge$ offenbar ein Homomorphismus der Algebra R in die Algebra der linearen Operatoren im Raum R/I_l.

Eine Algebra R werde *primitiv* genannt, wenn es in ihr ein maximales Linksideal I_l gibt, für das dieser Homomorphismus $a \to A_a^\wedge$ ein Isomorphismus ist. In diesem Fall ist die Gesamtheit aller Operatoren $A_a^\wedge$ eine irreduzible Algebra von Operatoren in R/I_l. Um dies einzusehen, bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$ einen Teilraum von R/I_l, welcher bezüglich aller Operatoren $A_a^\wedge$, $a \in R$, invariant ist. Dann ist die Gesamtheit J aller Repräsentanten x der Klassen $\xi \in \mathfrak{M}$ ein (eigentliches oder uneigentliches) Linksideal in R, das I_l enthält. Folglich gilt entweder $J = I_l$ oder $J = R$. Im ersten Fall ist $\mathfrak{M} = (0)$, im zweiten Fall $\mathfrak{M} = R/I_l$.

Wir haben also den Satz

I. *Jede primitive Algebra ist einer irreduziblen Algebra von linearen Operatoren in einem Vektorraum isomorph.*[1])

Zusammen mit Satz V aus Nr. 5 folgt hieraus der Satz

II. *Jede primitive Algebra ist halbeinfach.*

Ferner gilt der Satz

III. *Ist $I \neq (0)$ ein zweiseitiges Ideal in einer primitiven Algebra R und ist a ein vom Nullelement verschiedenes Element der Algebra R, so gilt $Ia \neq (0)$.*

Beweis. Nach Satz I darf angenommen werden, daß R eine irreduzible Algebra von linearen Operatoren in einem gewissen Vektorraum X ist. Dann gilt $Ix = X$ für $x \in X$, $x \neq 0$. Ist nun a nicht der Nulloperator, $a \neq 0$, so existiert ein Vektor $x \in X$, für den $ax \neq 0$, also $Iax = X$ ist. Hieraus schließen wir aber $Ia \neq (0)$.

Ein zweiseitiges Ideal I einer Algebra R heiße *primitiv*, wenn die zugehörige Quotientenalgebra R/I primitiv ist.

Oben wurde die linke reguläre Darstellung einer Algebra definiert. Entsprechend läßt sich die rechte reguläre Darstellung definieren. Man ordnet hierzu jedem Element $a \in R$ den Operator B_a,

$$B_a x = xa,$$

zu, dessen Anwendung auf das Element x darin besteht, dieses von rechts mit a zu multiplizieren. Die Zuordnung $a \to B_a$ ist dann die *rechte reguläre Darstellung* (oder *reguläre Rechtsdarstellung*) der Algebra R. Wie man sofort sieht, ist diese Zuordnung ein Antihomomorphismus von R auf die Algebra der linearen Operatoren B_a im Raum R. Die früheren Überlegungen lassen sich ausnahmslos auf den Fall der rechten regulären Darstellung übertragen, nur hat man die Linksideale überall durch Rechtsideale zu ersetzen.

§ 8. Topologische Algebren

1. Definition der topologischen Algebra. Eine Menge R von Elementen x, y, z werde eine *topologische Algebra* genannt, wenn folgendes gilt:

a) R ist eine Algebra;

b) R ist ein lokal konvexer topologischer linearer Raum[2]);

c) das Produkt xy ist eine stetige Funktion des Faktors x bzw. y, wenn der Faktor y bzw. x festgehalten wird.

---

[1]) Es gilt auch die Umkehrung. Ihr Beweis sei dem Leser überlassen.

[2]) Viele Ergebnisse dieses Paragraphen behalten auch dann noch Gültigkeit, wenn die Algebra R ein beliebiger (also nicht unbedingt ein lokal konvexer) topologischer linearer Raum ist, der die Bedingung c) erfüllt. Insbesondere gilt dies für alle Ergebnisse aus Nr. 1 und 2.

Eine Abbildung $x \to x'$ einer topologischen Algebra R in eine topologische Algebra R' heißt *stetiger Homomorphismus*, wenn

a) $x \to x'$ ein Homomorphismus der Algebra R in die Algebra R' ist;

b) $x \to x'$ eine stetige Abbildung des topologischen Raumes R in den topologischen Raum R' ist.

Ist die Abbildung $x \to x'$ insbesondere ein Isomorphismus, so spricht man von einem *stetigen Isomorphismus.*

Zwei topologische Algebren R und R' werden *topologisch isomorph* genannt, wenn es einen in beiden Richtungen stetigen Isomorphismus von R auf R' gibt. Topologisch isomorphe Algebren werden als nicht wesentlich verschieden voneinander angesehen.

Eine Teilmenge R_1 einer Algebra R heißt *abgeschlossene Teilalgebra* von R, wenn sie folgenden Bedingungen genügt:

α) R_1 ist eine Teilalgebra der Algebra R;

β) R_1 ist ein abgeschlossener Teilraum des topologischen Raumes R.

I. *Ist R_1 eine Teilalgebra der Algebra R, so ist ihre abgeschlossene Hülle $\overline{R}_1$ eine abgeschlossene Teilalgebra der Algebra R.*

Beweis. Offenbar genügt es, wenn man zeigt, daß $\overline{R}_1$ eine Teilalgebra von R ist. Nach § 3, Nr. 2, Satz II, ist $\overline{R}_1$ ein linearer Teilraum in R, und daher bleibt nur noch zu zeigen: Mit $x \in \overline{R}_1$ und $y \in \overline{R}_1$ ist auch $xy \in \overline{R}_1$. Für festes $y \in R_1$ bildet die stetige Funktion $f(x) = xy$ den Raum R_1 in sich und damit auch $\overline{R}_1$ in sich ab. Dies bedeutet, daß $xy \in \overline{R}_1$ für $x \in \overline{R}_1$ und $y \in R_1$ ist. Für festes $x \in \overline{R}_1$ bildet die stetige Funktion $\varphi(y) = xy$ dann R_1 in $\overline{R}_1$ und daher auch $\overline{R}_1$ in $\overline{R}_1$ ab. Aus $x, y \in \overline{R}_1$ folgt also $xy \in \overline{R}_1$.

Offenbar ist der (nichtleere) Durchschnitt von abgeschlossenen Teilalgebren einer Algebra R ebenfalls eine abgeschlossene Teilalgebra von R. Insbesondere ist der Durchschnitt aller abgeschlossenen Teilalgebren von R, welche eine gegebene Menge $S \subset R$ enthalten, die *kleinste abgeschlossene Teilalgebra, die S enthält.* Wir bezeichnen sie mit $R_t(S)$.

II. *Die Algebra $R_t(S)$ ist die abgeschlossene Hülle der Algebra $R_a(S)$,*

$$R_t(S) = \overline{R_a(S)}.$$

Beweis. Jede S enthaltende abgeschlossene Teilalgebra muß auch $\overline{R_a(S)}$ enthalten. Andererseits ist $\overline{R_a(S)}$ nach Satz I selbst eine abgeschlossene Teilalgebra. Folglich ist $\overline{R_a(S)}$ die kleinste abgeschlossene Teilalgebra, die S enthält.

III. *Die abgeschlossene Hülle einer kommutativen Teilalgebra einer topologischen Algebra ist kommutativ.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{A}$ eine kommutative Teilalgebra der topologischen Algebra R. Zu zeigen ist, daß $\overline{\mathfrak{A}}$ ebenfalls kommutativ ist. Für festes $y \in \mathfrak{A}$ stimmen die stetigen Abbildungen $f(x) = xy$ und $\varphi(x) = yx$ auf $\mathfrak{A}$ und damit auch auf $\overline{\mathfrak{A}}$

überein. Dann stimmen aber für festes $x \in \bar{\mathfrak{A}}$ die stetigen Abbildungen $f_1(y) = xy$ und $\varphi_1(y) = yx$ auf $\mathfrak{A}$, also auch auf $\bar{\mathfrak{A}}$ überein. Folglich gilt $xy = yx$ für alle $x, y \in \bar{\mathfrak{A}}$.

IV. *Eine maximale kommutative Teilalgebra einer topologischen Algebra ist abgeschlossen.*

Beweis. Die abgeschlossene Hülle $\bar{\mathfrak{A}}$ der maximalen kommutativen Teilalgebra $\mathfrak{A}$ ist eine kommutative Teilalgebra, die $\mathfrak{A}$ enthält. Da $\mathfrak{A}$ maximal ist, ist dies nur für $\mathfrak{A} = \bar{\mathfrak{A}}$ möglich.

V. *Die Gesamtheit R_S aller Elemente x einer topologischen Algebra R, die mit allen Elementen einer Teilmenge $S \subset R$ vertauschbar sind, ist eine abgeschlossene Teilalgebra von R.*

Beweis. Sind x und y mit allen Elementen von S vertauschbar, so haben offenbar auch αx, $x + y$ und xy diese Eigenschaft, d. h., R_S ist eine Teilalgebra. Zu zeigen bleibt die Abgeschlossenheit von R_S. Hierzu bezeichnen wir mit R_y die Gesamtheit aller Elemente $x \in R$, für die $xy = yx$ ist. Da R_y dann die Menge derjenigen Elemente x ist, für welche die stetigen Abbildungen $f_1(x) = xy$ und $f_2(x) = yx$ miteinander übereinstimmen, ist R_y abgeschlossen. Daher ist R_S als Durchschnitt aller R_y, $y \in S$, ebenfalls abgeschlossen.

Wir nennen die Algebra R_S den *Kommutant* der Menge S und bezeichnen sie mit S'. Wie man leicht bestätigt, gelten folgende Aussagen:

a) Enthält R das Einselement e, so ist $e \in S'$;
b) aus $S_1 \subset S_2$ folgt $S_1' \supset S_2'$;
c) $S'' \supset S$.

VI. *Das Zentrum Z einer topologischen Algebra R ist eine abgeschlossene kommutative Teilalgebra von R.*

Da nämlich $Z = R'$ ist, folgt die Behauptung unmittelbar aus Satz V.

VII. *Die abgeschlossene Hülle eines (Links-, Rechts-, zweiseitigen) Ideals einer topologischen Algebra ist ebenfalls ein (Links-, Rechts- bzw. zweiseitiges) Ideal dieser Algebra, es sei denn, sie stimmt mit der Algebra überein.*

Beweis. Es sei etwa I_l ein Linksideal der topologischen Algebra R, für das $\bar{I}_l \neq R$ ist. Da I_l ein Teilraum von R ist, ist die abgeschlossene Hülle $\bar{I}_l$ ebenfalls ein Teilraum von R. Es genügt also, zu zeigen, daß aus $x \in \bar{I}_l$ und $y \in R$ stets $yx \in \bar{I}_l$ folgt. Dies ergibt sich aber daraus, daß für festes $y \in R$ die stetige Funktion $f(x) = yx$ sicher $\bar{I}_l$ in $\bar{I}_l$ und damit auch I_l in I_l abbildet.

2. Topologische Adjunktion des Einselements. Es sei R eine topologische Algebra ohne Einselement und R' die aus R durch Adjunktion des Einselements entstehende Algebra. Die Algebra R' kann als Menge der Paare $\{\alpha, x\}$, $x \in R$, angesehen werden. Daher läßt sich in R' eine Topologie einführen, indem R' als topologisches Produkt der Räume $\mathfrak{C}$ (der Menge der komplexen Zahlen) und R betrachtet wird. Offenbar ist R' dann eine topologische Algebra. Der Übergang von der topologischen Algebra R zur topologischen Algebra R' wird *topologische Adjunktion des Einselements* genannt.

3. Algebren mit stetigen Inversen. Eine topologische Algebra R mit Einselement werde *Algebra mit stetigen Inversen* genannt, wenn es eine Umgebung $U_0(e)$ gibt, die folgende Eigenschaften hat:

a) Jedes Element $x \in U_0(e)$ hat ein Inverses x^{-1};

b) x^{-1} ist im Punkt $x = e$ eine stetige Funktion von x.

In diesem Abschnitt bezeichne R fortan eine Algebra mit stetigen Inversen.

I. *Ist x_0 ein Element der Algebra R, das ein Inverses x_0^{-1} hat, so gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Jedes Element $x \in U(x_0)$ hat ein Inverses x^{-1};*

b) *x^{-1} ist im Punkt $x = x_0$ eine stetige Funktion von x.*

Beweis. Das Element $e + x_0^{-1}y$ ist überall in R eine stetige Funktion von y, insbesondere also im Punkt $y = 0$. Folglich gibt es eine Umgebung $U(0)$ mit der Eigenschaft $e + x_0^{-1}y \in U_0(e)$ für $y \in U(0)$, d. h., es existiert $(e + x_0^{-1}y)^{-1}$ für $y \in U(0)$. Nun sei $U(x_0)$ die aus allen Elementen $x_0 + y, y \in U(0)$, bestehende Umgebung von x_0. Ist $x_0 + y \in U(x_0)$, so hat das Element

$$x = x_0 + y = x_0(e + x_0^{-1}y)$$

ein Inverses, weil x_0^{-1} und $(e + x_0^{-1}y)^{-1}$ existieren; hierbei ist

$$x^{-1} = (x_0 + y)^{-1} = (e + x_0^{-1}y)^{-1}x_0^{-1}. \tag{1}$$

Offenbar ist $(e + x_0^{-1}y)^{-1}$ im Punkt $u = e$ eine stetige Funktion von $u = e + x_0^{-1}y$. Nun ist aber u im Punkt $y = 0$ eine stetige Funktion von y, also im Punkt $x = x_0$ eine stetige Funktion von $x = x_0 + y$. Folglich hängt $(e + x_0^{-1}y)^{-1}$ und daher auch x^{-1} im Punkt $x = x_0$ stetig von x ab.

Entsprechend beweist man den Satz

II. *Ist x_0 ein Element der Algebra, das ein linkes (rechtes) Inverses hat, so gibt es eine Umgebung $U(x_0)$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Jedes Element $x \in U(x_0)$ hat ein linkes (rechtes) Inverses;*

b) *das linke (rechte) Inverse von x ist im Punkt x_0 eine stetige Funktion von x*

Hierbei ist die Formel (1) durch folgende Formeln zu ersetzen:

$$x_l^{-1} = (x_0 + y)_l^{-1} = x_{0l}^{-1}(e + y\,x_{0l}^{-1})^{-1}, \tag{2a}$$

$$x_r^{-1} = (x_0 + y)_r^{-1} = (e + x_{0r}^{-1}y)^{-1}x_{0r}^{-1}. \tag{2b}$$

Aus den Sätzen I und II ergibt sich der Satz

III. *Die Gesamtheit aller Elemente der Algebra R, die ein Inverses haben, sowie die Gesamtheit aller Elemente von R, die ein linkes (rechtes) Inverses haben, sind in R offene Mengen. Die Gesamtheit aller Elemente von R ohne Inverses sowie die Gesamtheit aller Elemente von R ohne linkes (rechtes) Inverses sind in R abgeschlossene Mengen.*

Unter Berücksichtigung von Satz III beweist man mühelos den Satz

IV. *Die abgeschlossene Hülle eines (Links-, Rechts-, zweiseitigen) Ideals in R ist ebenfalls ein (Links-, Rechts-, zweiseitiges) Ideal in R.*

Beweis. Es sei I_l ein Linksideal in R und S_l die Gesamtheit aller Elemente von R, die kein Linksinverses haben. Dann gilt $I_l \subset S_l$ (vgl. § 7, Nr. 4, Satz I). Folglich liegt auch die abgeschlossene Hülle $\bar{I}_l$ in S_l, so daß $\bar{I}_l$ nicht mit R übereinstimmt. Nach Satz VII aus Nr. 1 ist $\bar{I}_l$ also ein Linksideal. Entsprechend erledigt man den Fall eines Rechtsideals. Ein zweiseitiges Ideal I ist insbesondere auch ein Linksideal, so daß seine abgeschlossene Hülle $\bar{I}$ nicht mit R übereinstimmt und nur noch Satz VII aus Nr. 1 anzuwenden bleibt.

V. *Jedes maximale (Links-, Rechts-, zweiseitige) Ideal in R ist abgeschlossen.*

Beweis. Die abgeschlossene Hülle $\bar{I}_l$ eines maximalen Linksideals I_l ist ein Ideal, das I_l umfaßt. Wegen der Maximaleigenschaft von I_l ist dies nur für $\bar{I}_l = I_l$ möglich. Folglich ist I_l abgeschlossen. Entsprechend beweist man die Abgeschlossenheit der maximalen Rechtsideale und der maximalen zweiseitigen Ideale.

Beispiele. 1. Es sei G eine offene Punktmenge der komplexen Ebene und R_G die Gesamtheit aller in G holomorphen Funktionen. Mit den in üblicher Weise definierten Operationen wird R_G eine Algebra, in der die Funktion $f(z) \equiv 1$ die Rolle des Einselements spielt. Mit $U(f_0; K; \varepsilon)$ werde die Menge derjenigen Funktionen $f(z) \in R_G$ bezeichnet, welche der Bedingung $|f(z) - f_0(z)| < \varepsilon$ für alle $z \in K$ genügen, wobei $f_0 \in R_G$ und K eine abgeschlossene beschränkte Teilmenge von G ist. Wir definieren nun in R_G eine Topologie, indem wir aus allen möglichen endlichen Durchschnitten solcher Mengen $U(f_0; K; \varepsilon)$ eine Umgebungsbasis bilden. Wie man leicht nachprüft, wird R_G mit der so definierten Topologie zu einer topologischen Algebra.

Jetzt sei S eine beliebige abgeschlossene Punktmenge der komplexen Ebene. Jede offene Menge $U \supset S$ soll eine Umgebung $U(S)$ der Menge S genannt werden. Eine Funktion $f(z)$ heiße *analytisch* auf S, wenn sie in einer Algebra $R_{U(S)}$ liegt. Mit $R(S)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Funktionen $f(z)$, die auf S analytisch sind; hierbei sollen Funktionen $f_1(z) \in R_{U_1}(S)$, $f_2(z) \in R_{U_2}(S)$, die auf einer Umgebung von S miteinander übereinstimmen, als nicht voneinander verschieden angesehen werden. Definieren wir die Operationen wieder in der üblichen Weise, so wird $R(S)$ eine Algebra, wobei die Funktion $f(z) \equiv 1$ abermals die Rolle des Einselements spielt. Wir definieren nun in $R(S)$ eine Topologie, indem wir als Umgebungen in $R(S)$ diejenigen konvexen Mengen nehmen, welche die Eigenschaften haben, daß ihr Durchschnitt mit jedem $R_{U(S)}$ eine Umgebung[1]) in $R_{U(S)}$ ist. Mit dieser Topologie wird $R(S)$ zu einer topologischen Algebra.

Wie man leicht sieht, *ist $R(S)$ eine Algebra mit stetigen Inversen.*

Die Algebra $R(S)$ sowie deren Verallgemeinerung auf Funktionen von mehreren komplexen Veränderlichen wurden in Arbeiten von Waelbroeck [1] untersucht.

2. Wir betrachten die Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ aller beschränkten linearen Operatoren in einem Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ (vgl. Beispiel 3 aus § 7, Nr. 1) und definieren in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ eine lokal konvexe Topologie durch das System der Halbnormen

$$p_{x,y}(A) = |\langle Ax, y\rangle|, \quad x, y \in \mathfrak{H}.$$

Es bezeichne $U(A_0; x_1, \ldots, x_n; y_1, \ldots, y_n; \varepsilon)$ die Menge derjenigen Operatoren $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, welche den Ungleichungen

$$|\langle (A - A_0)x_k, y_k\rangle| < \varepsilon \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

[1]) Dies bedeutet, daß $R(S)$ der *induktive Limes* der Algebren $R_{U(S)}$ ist (vgl. hierzu die Fußnote auf S. 218).

genügen, mit Vektoren $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ aus $\mathfrak{H}$ und einer Zahl $\varepsilon > 0$. Für alle möglichen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n$ und alle möglichen $\varepsilon > 0$ bilden diese Mengen eine Umgebungsbasis. Die auf diese Weise definierte Topologie wird die *schwache Topologie von* $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ genannt.

Auf Grund von § 3, Nr. 4, Satz III, ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ in dieser Topologie ein lokal konvexer Raum. Ohne Schwierigkeiten läßt sich zeigen, daß in der schwachen Topologie das Produkt AB, wenn einer der Faktoren festgehalten wird, in bezug auf den anderen stetig ist. Folglich ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit der schwachen Topologie eine topologische Algebra. Wir überlassen es dem Leser, nachzuweisen, daß $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit dieser Topologie keine Algebra mit stetigen Inversen ist.

4. Die Resolvente in einer Algebra mit stetigen Inversen. Es sei R wiederum eine topologische Algebra mit stetigen Inversen. Eine komplexe Zahl λ wird *regulärer Punkt* des Elements $x \in R$ genannt, wenn das inverse Element $(x - \lambda e)^{-1}$ existiert. Die Gesamtheit aller nichtregulären Punkte heißt das *Spektrum des Elements x.*

Man nennt $(x - \lambda e)^{-1}$ die *Resolvente des Elements x.* Die Resolvente ist also die für alle regulären Punkte λ des Elements x definierte Vektorfunktion

$$x_\lambda = (x - \lambda e)^{-1}. \tag{1}$$

I. *Die Resolvente x_λ genügt für alle regulären Punkte des Elements x der Beziehung*

$$x_{\lambda_2} - x_{\lambda_1} = (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_{\lambda_1} x_{\lambda_2}.$$

Es ist nämlich

$$(x - \lambda_1 e)\, x_{\lambda_2} = [(x - \lambda_2 e) + (\lambda_2 - \lambda_1)\, e]\, x_{\lambda_2} = e + (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_{\lambda_2},$$

also

$$(x - \lambda_1 e)\, x_{\lambda_2} = e + (\lambda_2 - \lambda_1)\, x_{\lambda_2}, \tag{2}$$

woraus die Beziehung (1) folgt, wenn von links mit x_{λ_1} multipliziert wird.

II. *Die Menge $\mathfrak{R}_x$ aller regulären Punkte eines Elements x ist offen, und die Resolvente x_λ ist eine analytische Vektorfunktion auf $\mathfrak{R}_x$.*

Beweis. Es möge $x_{\lambda_0} = (x - \lambda_0 e)^{-1}$ existieren. Dann gibt es eine Umgebung $U(x - \lambda_0 e)$ derart, daß jedes Element $y \in U(x - \lambda_0 e)$ ein Inverses hat. Da nun $y_\lambda = x - \lambda e$ eine stetige Funktion von λ ist, gibt es eine Umgebung $U(\lambda_0)$ derart, daß $y_\lambda \in U(x - \lambda_0 e)$ für $\lambda \in U(\lambda_0)$. Für diese y_λ existiert dann $x_\lambda = y_\lambda^{-1}$. Damit ist aber gezeigt, daß $\mathfrak{R}_x$ offen ist. Gleichzeitig sehen wir, daß x_λ in jedem Punkt $\lambda_0 \in \mathfrak{R}_x$ stetig ist.

Nun sei $\lambda \in U(\lambda_0)$. Nach (1) gilt

$$x_\lambda - x_{\lambda_0} = (\lambda - \lambda_0)\, x_\lambda x_{\lambda_0};$$

folglich ist

$$\frac{x_\lambda - x_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = x_\lambda x_{\lambda_0}.$$

Geht man nun hier unter Berücksichtigung der Stetigkeit von x_λ im Punkt λ_0 für $\lambda \to \lambda_0$ zur Grenze über, so folgt die Existenz des Grenzwerts

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} \frac{x_\lambda - x_{\lambda_0}}{\lambda - \lambda_0} = x_{\lambda_0}^2,$$

d. h., x_λ ist in $\mathfrak{R}_x$ analytisch.

III. *Die Menge $\mathfrak{R}_x$ enthält eine Umgebung des unendlich fernen Punktes, und die Resolvente x_λ ist im Unendlichen regulär.*

Beweis. Es sei $U_0(e)$ eine Umgebung des Einselements, deren sämtliche Elemente ein Inverses haben. Wir setzen $\mu = \frac{1}{\lambda}$. Da $e - \mu x$ stetig von μ abhängt, gibt es eine Umgebung $|\mu| < \varepsilon$, für die $e - \mu x \in U_0(e)$ ist. Dann existiert $(e - \mu x)^{-1}$ für $|\mu| < \varepsilon$. Außerdem ist

$$\lim_{\mu \to 0} (e - \mu x)^{-1} = e. \tag{3}$$

Dies bedeutet aber, daß $\left(e - \frac{1}{\lambda} x\right)^{-1}$ in der Umgebung $|\lambda| > \frac{1}{\varepsilon}$ des unendlich fernen Punktes existiert. Für diese λ-Werte existiert dann auch

$$x_\lambda = (x - \lambda e)^{-1} = \left[-\lambda\left(e - \frac{1}{\lambda} x\right)\right]^{-1} = -\frac{1}{\lambda}\left(e - \frac{1}{\lambda} x\right)^{-1} = -\mu(e - \mu x)^{-1}. \tag{4}$$

Es bleibt zu zeigen, daß x_λ in der gesamten Umgebung eine analytische Funktion von λ ist. Für $\mu \neq 0$, $|\mu| < \varepsilon$ folgt die Existenz der Ableitung $(x_\lambda)'_\mu$ aus Satz II, während sie im Punkt $\mu = 0$ nach (3) und (4) gleich

$$\lim_{\mu \to 0} \frac{x_\lambda}{\mu} = -\lim_{\mu \to 0} (e - \mu x)^{-1} = -e$$

ist. Folglich ist x im Unendlichen analytisch.

Theorem 1. *Das Spektrum jedes Elements x einer Algebra mit stetigen Inversen ist eine nichtleere Menge.*

Beweis. Wären alle Punkte λ der komplexen Ebene reguläre Punkte eines Elements $x \in R$, so müßte die Resolvente x_λ von x in der ganzen Ebene eine analytische Funktion sein. Nach dem Liouvilleschen Satz (vgl. § 3, Nr. 12, Satz II) wäre x_λ also gleich einem festen Element c, $x_\lambda = c$, d. h.

$$e = (x - \lambda e)\, c. \tag{5}$$

Setzt man $\lambda = 0$, so hätte man

$$e = x c; \tag{6}$$

nach (5) wäre also $\lambda c = 0$ oder $c = 0$, weil λ beliebig ist. Dies widerspricht aber (6).

5. Topologische Divisionsalgebren mit stetigen Inversen. Eine Algebra R über dem Körper der komplexen Zahlen werde *Divisionsalgebra* genannt, wenn jedes vom Nullelement verschiedene Element von R ein Inverses hat. Ist R hierbei eine topologische Algebra mit stetigen Inversen, so wollen wir von einer *topologischen Divisionsalgebra mit stetigen Inversen* sprechen.

Theorem 2. *Jede topologische Divisionsalgebra R mit stetigen Inversen ist dem Körper der komplexen Zahlen isomorph.*

Beweis. Es genügt offenbar, wenn wir zeigen, daß jedes Element $x \in R$ die Gestalt $x = \lambda e$ hat. Die Zuordnung $\lambda e \to \lambda$ ist dann ein Isomorphismus

von R auf den Körper der komplexen Zahlen. Wäre aber $x - \lambda e$ für kein λ gleich dem Nullelement, so würde $(x - \lambda e)^{-1}$ für alle λ existieren (weil R eine Divisionsalgebra ist), d. h., das Spektrum von x wäre die leere Menge, was nach Theorem 1 aus Nr. 4 jedoch unmöglich ist.

Für den Spezialfall normierter Algebren (vgl. § 9) wurde Theorem 2 zuerst von S. MAZUR [1] veröffentlicht, der den Satz auf gänzlich anderem Weg erhielt. Der hier wiedergegebene Beweis stammt im wesentlichen von I. M. GELFAND [1—4], der ebenfalls den Spezialfall normierter Algebren betrachtete. Später wurden verschiedene Verallgemeinerungen dieses Satzes angegeben (vgl. etwa ARENS [3] und STONE [7]).

6. Algebren mit stetigen Quasiinversen. Eine topologische Algebra werde *Algebra mit stetigen Quasiinversen* genannt, wenn es eine Umgebung $U(0)$ gibt, für die gilt:

a) Jedes Element $x \in U(0)$ hat ein Quasiinverses x';

b) x' ist im Punkt $x = 0$ eine stetige Funktion von x.

Ist R eine Algebra mit stetigen Quasiinversen, die ein Einselement hat, so ist R offenbar eine Algebra mit stetigen Inversen. Hieraus schließen wir:

I. *Ist R eine Algebra mit stetigen Quasiinversen, die kein Einselement hat, so ist die aus R durch topologische Adjunktion des Einselements entstehende Algebra R' eine Algebra mit stetigen Inversen.*

Mit diesem Satz ist die Untersuchung von Algebren mit stetigen Quasiinversen auf die Untersuchung von Algebren mit stetigen Inversen zurückgeführt.

II. *Jedes zweiseitige Ideal I in einer Algebra R mit stetigen Quasiinversen ist ebenfalls eine Algebra mit stetigen Quasiinversen.*

Beweis. Es sei $U(0)$ eine Umgebung des Nullelements von R, die den Bedingungen a) und b) genügt. Dann ist $U(0) \cap I$ eine Umgebung des Nullelements in I, welche die entsprechenden Eigenschaften hat. Zum Beweis braucht also nur noch bemerkt zu werden, daß wegen $x' = -x - xx'$ mit $x \in I$ auch $x' \in I$ ist.

In einer Reihe von Arbeiten (vgl. beispielsweise KAPLANSKY [1—14]) werden verschiedene Verallgemeinerungen von Algebren mit stetigen Quasiinversen unter zusätzlichen Voraussetzungen betrachtet.

§ 9. Normierte Algebren

1. Definition der normierten Algebra. Eine Menge R von Elementen $x, y, z, \ldots$ soll *normierte Algebra* genannt werden, wenn folgendes gilt:

a) R ist eine Algebra;

b) R ist ein normierter Raum;

c) für je zwei Elemente $x, y \in R$ gilt

$$|xy| \leqq |x||y|; \tag{1}$$

d) hat R ein Einselement e, so soll $|e| = 1$ sein.

Die Norm des normierten Raumes R induziert in bekannter Weise in R eine Topologie (vgl. § 4, Nr. 1); es sei daran erinnert, daß in dieser Topologie die Kugeln $|x - x_0| < r$ mit dem Mittelpunkt x_0 eine Umgebungsbasis des Elements $x_0 \in R$ bilden.

I. *In der durch die Norm festgelegten Topologie ist das Produkt xy eine bezüglich der beiden Veränderlichen x und y stetige Funktion.*

Wegen (1) gilt nämlich

$$\begin{aligned} |xy - x_0 y_0| &= |(x - x_0)(y - y_0) + (x - x_0) y_0 + x_0(y - y_0)| \\ &\leqq |x - x_0||y - y_0| + |x - x_0||y_0| + |x_0||y - y_0|, \end{aligned} \tag{2}$$

woraus die Behauptung unmittelbar folgt.

Da ein normierter Raum R stets ein lokal konvexer topologischer linearer Raum ist, ergibt sich aus Satz I der Satz

II. *In der durch die Norm festgelegten Topologie ist eine normierte Algebra stets eine topologische Algebra.*

Eine normierte Algebra R heiße *vollständig*, wenn R als normierter Raum vollständig ist. Eine vollständige normierte Algebra wird auch BANACH*sche Algebra* genannt.

III. *Jede nichtvollständige normierte Algebra kann in eine vollständige normierte Algebra eingebettet werden.*

Beweis. Es bezeichne $\tilde{R}$ die vollständige Hülle des normierten Raumes R (vgl. § 4, Nr. 1, Satz II). Wir wollen in $\tilde{R}$ eine Multiplikation definieren. Hierzu nehmen wir Elemente $\tilde{x}, \tilde{y} \in \tilde{R}$ und bezeichnen mit x_n bzw. y_n eine zu $\tilde{x}$ bzw. $\tilde{y}$ gehörige Fundamentalfolge aus R. Werden in (2) jetzt x, x_0 durch x_n, x_m und y, y_0 durch y_n, y_m ersetzt, so folgt, daß $x_n y_n$ ebenfalls eine Fundamentalfolge ist. Das durch $x_n y_n$ definierte Element aus $\tilde{R}$ soll nun als Produkt $\tilde{x}\tilde{y}$ von $\tilde{x}$ und $\tilde{y}$ erklärt werden. Durch abermalige Anwendung von (2) erkennt man die Unabhängigkeit dieser Definition von der Wahl der zugehörigen Fundamentalfolgen x_n, y_n. Ist insbesondere $\tilde{x} = x \in R$ und $\tilde{y} = y \in R$, so braucht man nur $x_n = x$ und $y_n = y$ zu setzen, um zu sehen, daß das soeben definierte Produkt in diesem Fall mit dem Produkt in R übereinstimmt. Geht man schließlich in den entsprechenden Beziehungen, die für die Elemente der Algebra R gelten, zur Grenze über, so folgt, daß $\tilde{R}$ eine Algebra ist, für deren Elemente ebenfalls die Ungleichung $|\tilde{x}\tilde{y}| \leqq |\tilde{x}| \, |\tilde{y}|$ gilt. Folglich ist $\tilde{R}$ eine vollständige normierte Algebra, die R als Teilalgebra enthält.

Die Algebra $\tilde{R}$ heißt *vollständige Hülle* der Algebra R.

Beispiele. 1. *Die Algebra $C(T)$.* Es sei T ein topologischer Raum. Die Gesamtheit $C(T)$ aller auf T definierten beschränkten stetigen Funktionen $x(t)$ ist ein vollständiger normierter Raum (vgl. § 4, Nr. 1, Beispiel 2) mit der Norm

$$|x| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

In $C(T)$ kann die gewöhnliche Multiplikation von Funktionen als Multiplikation definiert werden, so daß $(xy)(t) = x(t)y(t)$ ist. Offenbar gilt dann $|xy| \leqq |x| \, |y|$, d. h., $C(T)$ ist

eine BANACHsche Algebra. Ist T bikompakt, so kann die Forderung der Beschränktheit der Funktionen $x(t)$ auf Grund von Satz VII aus § 2, Nr. 7, als überflüssig fortgelassen werden.

2. *Die Algebra* $\mathfrak{B}(X)$. Zunächst sei daran erinnert, daß $\mathfrak{B}(X)$ die Gesamtheit aller beschränkten linearen Operatoren auf dem BANACHschen Raum X bezeichnet (vgl. § 4, Nr. 4). Wie wir sahen, ist $\mathfrak{B}(X)$ ein vollständiger normierter Raum, wobei die Norm in $\mathfrak{B}(X)$ die Operatornorm ist. In $\mathfrak{B}(X)$ wird als Multiplikation die Multiplikation von Operatoren eingeführt, wobei dann nach § 4, Nr. 4,

$$|AB| \leqq |A|\,|B|$$

gilt. Folglich ist $\mathfrak{B}(X)$ eine BANACHsche Algebra.

3. *Die Algebra* W. Es bezeichne W die Gesamtheit aller absolut konvergenten Reihen $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ mit der Norm

$$|x| = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|.$$

Werden Addition, Multiplikation mit einer Zahl und Multiplikation als die entsprechenden Operationen mit den Funktionen $x(t)$ definiert, so wird W eine BANACHsche Algebra.

2. Adjunktion des Einselements. Es sei R eine normierte Algebra ohne Einselement und R' die aus R durch Adjunktion des Einselements entstehende Algebra. Man kann in R' eine Norm einführen, indem man einfach

$$|\alpha e + x| = |\alpha| + |x|, \ x \in R,$$

setzt. Mit dieser Norm ist R' eine normierte Algebra.

Ist R vollständig, so ist auch R' vollständig.

Den Beweis dürfen wir wegen seiner Einfachheit übergehen.

3. Banachsche Algebren mit Einselement.

I. *Eine BANACHsche Algebra mit Einselement ist stets eine Algebra mit stetigen Inversen.*

Beweis. Wir betrachten die durch die Ungleichung

$$|x - e| < 1$$

definierte Umgebung $U_0(e)$ des Einselements e. Jedes Element $x \in U_0(e)$ kann offenbar in der Gestalt $x = e + y$ mit $|y| < 1$ dargestellt werden. Wegen der Vollständigkeit von R konvergiert die Reihe

$$e - y + y^2 - y^3 + \cdots \tag{3}$$

absolut in R, weil die Reihe der Normen

$$1 + |y| + |y|^2 + |y|^3 + \cdots$$

konvergiert. Bezeichnet z die Summe von (3), so gilt

$$z = e - y(e - y + y^2 - y^3 + \cdots) = e - yz, \tag{4}$$

also

$$z + yz = e, \ (e + y)z = e.$$

Entsprechend ergibt sich $z(e + y) = e$, so daß z Inverses von $x = e + y$ ist.

Somit hat jedes Element $x \in U_0(e)$ ein Inverses $x^{-1} = z$. Wir wollen die Stetigkeit von x^{-1} für $x = e$ zeigen. Aus (4) folgt zunächst

$$|x^{-1} - e| = |z - e| \leqq |y|\,|z|.$$

Andererseits ist

$$|z| \leqq 1 + |y| + |y|^2 + \cdots = \frac{1}{1 - |y|}.$$

Daher gilt

$$|x^{-1} - e| \leqq |y|\,|z| \leqq \frac{|y|}{1 - |y|} < \frac{\varepsilon}{1 - \varepsilon} \quad \text{für} \quad |y| < \varepsilon,$$

d. h., x^{-1} ist für $x = e$ stetig.

Alle für Algebren mit stetigen Inversen gewonnenen Ergebnisse (vgl. § 8, Nr. 3) sind also speziell für BANACHsche Algebren mit Einselement gültig. Insbesondere gelten folgende Aussagen:

II. *Es sei R eine* BANACH*sche Algebra mit Einselement.*

1. *Die Gesamtheit aller Elemente, die ein (Links-, Rechts-, zweiseitiges) Inverses haben, ist eine offene Menge;*
2. *x^{-1} ist in allen Punkten, in denen es existiert, eine stetige Funktion von x;*
3. *die abgeschlossene Hülle eines (Links-, Rechts-, zweiseitigen) Ideals ist ebenfalls ein (Links-, Rechts-, zweiseitiges) Ideal;*
4. *ein maximales (Links-, Rechts-, zweiseitiges) Ideal ist abgeschlossen;*
5. *die Menge $\mathfrak{R}_x$ aller regulären Punkte eines Elements $x \in R$ ist offen, und die Resolvente $x_\lambda = (x - \lambda e)^{-1}$ ist eine analytische Funktion von λ;*
6. *das Spektrum jedes Elements $x \in R$ ist eine nichtleere Menge.*

III (I. M. GELFAND [1] und S. MAZUR [1]). *Jede vollständige normierte Divisionsalgebra ist dem Körper der komplexen Zahlen isomorph.*

Ferner gilt der Satz

IV. *In einer* BANACH*schen Algebra ist die Quotientenalgebra nach einem abgeschlossenen zweiseitigen Ideal I eine* BANACH*sche Algebra.*

Beweis. Da I abgeschlossen ist, ist der Quotientenraum R/I ein vollständiger normierter Raum (vgl. § 4, Nr. 3). Andererseits ist R/I eine Algebra, wenn I ein zweiseitiges Ideal ist (vgl. § 7, Nr. 4). Es bleibt also zu zeigen, daß in R/I die folgenden beiden Bedingungen erfüllt sind: a) $|\tilde{x}\tilde{y}| \leqq |\tilde{x}|\,|\tilde{y}|$; b) für das Einselement $\tilde{e}$ von R/I gilt $|\tilde{e}| = 1$.

Da

$$|\tilde{x}| = \inf_{x \in \tilde{x}} |x|, \quad |\tilde{y}| = \inf_{y \in \tilde{y}} |y|$$

ist, gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ Elemente $x_0 \in \tilde{x}$, $y_0 \in \tilde{y}$, für die

$$|x_0| < |\tilde{x}| + \varepsilon, \quad |y_0| < |\tilde{y}| + \varepsilon$$

gilt. Dann wird aber

$$|\tilde{x}\tilde{y}| = \inf_{a \in I} |x_0 y_0 + a| \leqq |x_0 y_0| \leqq |x_0|\,|y_0| < (|\tilde{x}| + \varepsilon)\,(|\tilde{y}| + \varepsilon),$$

woraus

$$|\tilde{x}\tilde{y}| \leqq |\tilde{x}|\,|\tilde{y}|$$

folgt, weil $\varepsilon > 0$ beliebig war. Nun haben alle Elemente x der Umgebung $|e - x| < 1$ ein Inverses (vgl. Satz I) und gehören daher zu keinem Ideal in R, insbesondere also nicht zu I. Demzufolge gilt $|e + a| = |e - (-a)| \geqq 1$ für $a \in I$, wobei das Gleichheitszeichen für $a = 0$ steht. Dies bedeutet

$$|\hat{e}| = \inf_{a \in I} |e + a| = 1.$$

Es gilt folgende Verschärfung von Satz III:

V. *Wenn in einer* BANACH*schen Algebra R mit Einselement jedes Element $x \neq 0$ ein Linksinverses hat, so ist R dem Körper der komplexen Zahlen isomorph.*

Beweis. Es bezeichne R_1 die kleinste abgeschlossene Teilalgebra von R, die ein gegebenes Element $x \in R$ enthält. Nach Satz III aus § 8, Nr. 1, ist R_1 kommutativ, und es gibt (vgl. § 8, Nr. 4, Theorem 1) komplexe Zahlen λ, für die $(x - \lambda e)^{-1}$ in R_1 nicht existiert. Es sei λ_0 ein Randpunkt der Menge dieser λ-Werte. Dann existiert $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ nicht in R_1, jedoch gibt es eine Folge $\lambda_n \to \lambda_0$, so daß $(x_n - \lambda_n e)^{-1}$ in R_1 und damit auch in R existiert. Nun gilt $|(x - \lambda_n e)^{-1}| \to \infty$ für $n \to \infty$. Andernfalls ließe sich nämlich aus der Folge λ_n eine Teilfolge λ'_n auswählen, für die $|(x - \lambda'_n e)^{-1}|$ beschränkt wäre. Dann könnten wir aber aus der Ungleichung

$$|(x - \lambda'_n e|)^{-1} - (x - \lambda'_m e)^{-1}| \leqq |\lambda'_n - \lambda'_m| \, |(x - \lambda'_n e)^{-1}| \, |(x - \lambda'_m e)^{-1}|$$

(vgl. § 8, Nr. 4, Satz I) schließen, daß die Folge $(x - \lambda'_n e)^{-1}$ einen Limes besäße, der offenbar gleich dem Inversen von $x - \lambda_0 e$ wäre.

Wir setzen nun

$$y_n = \frac{(x - \lambda_n e)^{-1}}{|(x - \lambda_n e)^{-1}|}.$$

Dann gilt

$$|(x - \lambda_0 e) \, y_n| = \frac{|(x - \lambda_0 e)\,(x - \lambda_n e)^{-1}|}{|(x - \lambda_n e)^{-1}|} = \frac{|(x - \lambda_n e)\,(x - \lambda_n e)^{-1} + (\lambda_n - \lambda_0)\,(x - \lambda_n e)^{-1}|}{|(x - \lambda_n e)^{-1}|}$$

$$\leqq \frac{1}{|(x - \lambda_n e)^{-1}|} + |\lambda_n - \lambda_0| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Das Element $x - \lambda_0 e$ hat kein Linksinverses in R; wäre nämlich $z \in R$ und $z(x - \lambda_0 e) = e$, so hätten wir $y_n = z(x - \lambda_0 e)\, y_n \to 0$ für $n \to \infty$, was wegen $|y_n| = 1$ unmöglich ist.

Somit hat $x - \lambda_0 e$ kein Linksinverses, was nach Voraussetzung nur für

$$x - \lambda_0 e = 0 \quad \text{oder} \quad x = \lambda_0 e$$

möglich ist.

Der entsprechende Satz gilt offenbar auch für Algebren, deren sämtliche Elemente mit Ausnahme von $x = 0$ ein Rechtsinverses haben.

4. Stetige Homomorphismen normierter Algebren.

I. *Bei einem stetigen Homomorphismus $x \to x'$ einer normierten Algebra R in eine normierte Algebra R' gilt mit einer gewissen Konstanten C stets die Ungleichung*

$$|x'| \leqq C\,|x|. \tag{1}$$

Ein derartiger Homomorphismus ist nämlich insbesondere ein stetiger linearer Operator aus R in R', der nach Satz I aus § 4, Nr. 4, beschränkt ist.

II. *Jeder stetige Homomorphismus $x \to x'$ einer normierten Algebra R in eine normierte Algebra R' kann auf eine und nur eine Weise zu einem stetigen Homomorphismus der vollständigen Hülle von R in die vollständige Hülle von R' fortgesetzt werden.*

Beweis. Da der Homomorphismus $x \to x'$ insbesondere ein beschränkter Operator aus R in R' ist, kann er auf eindeutige Weise zu einem beschränkten linearen Operator aus $\tilde{R}$ in $\tilde{R}'$ fortgesetzt werden. Dieser Operator ist dann aber ebenfalls ein Homomorphismus. Aus $x, y \in \tilde{R}$, $x_n, y_n \in R$ und $x_n \to x$, $y_n \to y$ für $n \to \infty$ folgt nämlich $x'_n \to x'$, $y'_n \to y'$ für $n \to \infty$. Durch Grenzübergang in $(x_n y_n)' = x'_n y'_n$ folgt also $(xy)' = x' y'$.

III. *Jeder stetige Isomorphismus einer* Banach*schen Algebra R auf eine* Banach*sche Algebra R' ist ein topologischer Isomorphismus.*

Dieser Satz folgt unmittelbar aus dem Banachschen Satz (§ 4, Nr. 4, Satz VI), weil ein derartiger Isomorphismus insbesondere ein eineindeutiger beschränkter linearer Operator ist, der den vollständigen normierten Raum R auf den vollständigen normierten Raum R' abbildet.

IV. *Bei einem stetigen Homomorphismus einer* Banach*schen Algebra R auf eine* Banach*sche Algebra R' ist der Kern des Homomorphismus ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal I, wobei die Algebra R' der Quotientenalgebra R/I topologisch isomorph ist. Umgekehrt erzeugt jedes abgeschlossene zweiseitige Ideal I einer* Banach*schen Algebra R einen stetigen Homomorphismus, den sogenannten natürlichen Homomorphismus der Algebra R auf die Algebra R/I.*

Beweis. Nach § 7, Nr. 6, Satz II, ist der Kern I des Homomorphismus von R auf R' ein Ideal, und R' ist R/I isomorph. Als Urbild der nur aus dem Nullelement von R' bestehenden abgeschlossenen Menge ist das Ideal I abgeschlossen. Folglich ist R/I eine vollständige normierte Algebra. Bildet man in (1) die untere Grenze in bezug auf alle x aus der Klasse $\xi \in R/I$, die einem gegebenen Element x' entspricht, so ergibt sich $|x'| \leqq C|\xi|$. Demnach ist unser Isomorphismus von R/I auf R' stetig und damit ein topologischer Isomorphismus. Die Umkehrung ist trivial, weil $|\xi| \leqq |x|$ für $x \in \xi \in R/I$ gilt.

Eine Abbildung $x \to x'$ einer normierten Algebra R auf eine normierte Algebra R' heißt *isometrischer Isomorphismus*, wenn folgendes gilt:

a) $x \to x'$ ist ein Isomorphismus der Algebra R auf die Algebra R';

b) $x \to x'$ ist eine isometrische Abbildung des normierten Raumes R auf den normierten Raum R'.

Offenbar ist ein isometrischer Isomorphismus auch ein topologischer Isomorphismus.

Zwei normierte Algebren R und R' heißen *isometrisch isomorph*, wenn es einen isometrischen Isomorphismus von R auf R' gibt.

5. Reguläre Darstellungen einer normierten Algebra. Wir erinnern uns zunächst, daß die linke und die rechte reguläre Darstellung $a \to A_a$ bzw. $a \to B_a$ einer Algebra R durch die Formeln

$$A_a x = ax, \; B_a x = xa$$

definiert wurden (vgl. § 7, Nr. 7).

I. *Die linke (rechte) reguläre Darstellung einer normierten Algebra R ist ein stetiger Homomorphismus (Antihomomorphismus) der Algebra R in die Algebra $\mathfrak{B}(R)$ der beschränkten linearen Operatoren im Raum R.*

Aus den Ungleichungen

$$|A_a x| \leqq |a|\,|x|, \; |B_a x| \leqq |a|\,|x| \tag{1}$$

folgt nämlich

$$|A_a| \leqq |a|, \; |B_a| \leqq |a|. \tag{2}$$

II. *Ist R eine normierte Algebra mit Einselement, so ist die linke (rechte) reguläre Darstellung von R ein isometrischer Isomorphismus (Antiisomorphismus) von R in $\mathfrak{B}(R)$.*

Für $x = e$ gehen nämlich die Ungleichungen (1) in Gleichungen über, so daß in diesem Fall $|A_a| = |a|$ und $|B_a| = |a|$ ist.

Wir wollen noch die zu den regulären Darstellungen gehörigen konjugierten Darstellungen betrachten. Es bezeichne R einen Banachschen Raum und R' den zu R konjugierten Banachschen Raum. Ferner seien A'_a bzw. B'_a die zu A_a bzw. B_a adjungierten Operatoren. Aus den Sätzen I und II schließen wir unter Berücksichtigung der Eigenschaften des adjungierten Operators (vgl. § 5, Nr. 11):

III. *Die Zuordnung $a \to B'_a$ ist ein stetiger Homomorphismus und die Zuordnung $a \to A'_a$ ein stetiger Antihomomorphismus der normierten Algebra R in die Algebra $\mathfrak{B}(R')$. Hat R ein Einselement, so ist $a \to B'_a$ ein isometrischer Isomorphismus und $a \to A'_a$ ein isometrischer Antiisomorphismus.*

Ferner gilt der Satz

IV. *Der Orthogonalraum eines abgeschlossenen Rechtsideals einer* Banach*schen Algebra R ist ein von* (0) *verschiedener abgeschlossener*[1]) *Teilraum in R', der bezüglich aller Operatoren B'_a invariant ist. Umgekehrt ist jeder derartige abgeschlossene invariante Teilraum der Orthogonalraum eines abgeschlossenen Rechtsideals in R.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{N}$ der Orthogonalraum des abgeschlossenen Rechtsideals I_r. Nach Satz I aus § 3, Nr. 11, ist $\mathfrak{N}$ ein abgeschlossener Teilraum von R'. Wir beweisen, daß $B'_a f \in \mathfrak{N}$ für alle $a \in R$ ist, wenn $f \in \mathfrak{N}$ ist. Aus der Definition des Orthogonalraumes folgt

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I_r.$$

Da mit $x \in I_r$ auch $xa \in I_r$ ist, gilt

$$\langle x, B'_a f\rangle = \langle B_a x, f\rangle = f(xa) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in I_r,$$

d. h., es ist $B'_a f \in \mathfrak{N}$.

Umgekehrt sei nun $\mathfrak{N}$ ein von (0) verschiedener abgeschlossener Teilraum von R', der bezüglich aller Operatoren B'_a invariant ist. Nach § 3, Nr. 11, Satz II, ist $\mathfrak{N}$ dann der Orthogonalraum eines abgeschlossenen Teilraumes $S \subset R$. Es bleibt also nur noch zu

[1]) Hier wird überall die Abgeschlossenheit in R' im Sinne der schwachen Topologie von R' verstanden.

zeigen, daß S ein Rechtsideal in R ist. Aus $\mathfrak{N} \neq (0)$ folgt $S \neq R$. Nun sei $x \in S$ und $a \in R$. Ist dann auch $xa \in S$, so ist S ein Rechtsideal in R. Nach § 3, Nr. 11, Satz II, besteht S aus den und nur den Elementen x, die der Bedingung

$$f(x) = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{N}$$

genügen. Da $\mathfrak{N}$ ein invarianter Teilraum ist, gilt mit $f \in \mathfrak{N}$ auch $B'_a f \in \mathfrak{N}$. Es ist also

$$f(xa) = \langle x, B'_a f\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad f \in \mathfrak{N},$$

woraus, wie wir oben sahen, $xa \in S$ folgt.

Ein abgeschlossener invarianter[1]) Teilraum $\mathfrak{N} \neq (0)$ aus R' werde *minimal* genannt, wenn er keinen anderen abgeschlossenen invarianten Teilraum $\neq (0)$ enthält. Jedes Funktional aus einem minimalen invarianten Teilraum soll *elementar* genannt werden.

Aus § 3, Nr. 11, Satz IV, und obigem Satz IV folgt nun:

V. *$\mathfrak{N}$ ist genau dann ein minimaler invarianter Teilraum von R', wenn er der Orthogonalraum eines maximalen Rechtsideals in R ist.*

Nach § 7, Nr. 4, Satz II, ist jedes Rechtsideal einer Algebra mit Einselement in einem maximalen Rechtsideal enthalten. Damit ergibt sich aus den Sätzen IV und V:

VI. *Ist R eine Algebra mit Einselement, so enthält jeder von* (0) *verschiedene abgeschlossene invariante Teilraum von R' einen minimalen invarianten Teilraum und folglich elementare Funktionale.*

Wiederum bezeichne R eine Banachsche Algebra mit Einselement. Weiter sei $f \neq 0$ ein beliebiges Funktional aus R'. Wir betrachten die Menge aller Funktionale der Gestalt $f_a(x) = f(xa)$, $a \in R$. Ihre abgeschlossene lineare Hülle in R' ist ein abgeschlossener invarianter Teilraum. Wir bezeichnen ihn mit $\mathfrak{N}$. Wegen $f \neq 0$ ist $\mathfrak{N} \neq (0)$. Folglich enthält $\mathfrak{N}$ elementare Funktionale. Aus der Definition von $\mathfrak{N}$ folgt nun aber, daß jedes Funktional $f_0 \in \mathfrak{N}$ Limes einer Folge von Funktionalen $f_a(x) = f(xa)$ ist (im Sinne der schwachen Topologie von R'). Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

VII. *Ist R eine Banachsche Algebra mit Einselement und $f \neq 0$ ein Funktional aus R', so gibt es elementare Funktionale, die im Sinne der schwachen Topologie Limites von Folgen sind, die aus Funktionalen der Gestalt $f_a(x) = f(xa)$ bestehen.*

Die regulären Darstellungen einer Algebra können auch zum Beweis des folgenden Satzes benutzt werden.

VIII. *Es sei R eine vollständige topologische Algebra mit Einselement, deren Topologie durch eine Norm $|x|$ definiert ist. Dann ist R einer Banachschen Algebra topologisch isomorph.*

Beweis. Wir betrachten die linke reguläre Darstellung $x \to A_x$ der Algebra R. Da R ein Einselement hat, ist diese Darstellung ein Isomorphismus, wobei

$$|A_x| = \sup_{|y|=1} |xy| \geq \left| x \frac{e}{|e|} \right| = \frac{|x|}{|e|}$$

oder

$$|x| \leq |e|\,|A_x|$$

gilt, d. h., der Isomorphismus $A_x \to x$ ist stetig.

Wir zeigen nun, daß das Bild der Algebra R bei dieser Abbildung in $\mathfrak{B}(R)$ abgeschlossen und daher eine vollständige Algebra ist. Hieraus und aus Nr. 4, Satz III, folgt dann, daß $x \to A_x$ ein topologischer Isomorphismus ist, d. h., daß R der vollständigen normierten Algebra aller Operatoren A_x topologisch isomorph ist.

---

[1]) In Nr. 5 verstehen wir fortan unter einem „invarianten Teilraum" einen Teilraum von R', der in bezug auf alle Operatoren B'_a invariant ist.

Zum Beweis bemerken wir, daß die Operatoren A_x der Beziehung

$$A_x(yz) = A_x y \cdot z$$

genügen; es ist nämlich $A_x(yz) = x(yz) = (xy)z = A_x y \cdot z$. Umgekehrt ist jeder Operator A in R mit der Eigenschaft

$$A(yz) = Ay \cdot z \quad \text{für alle} \quad y, z \in R \tag{3}$$

ein Operator der Gestalt A_x, wobei $x = Ae$ ist. Um dies einzusehen, braucht man in (3) nur $y = e$ zu setzen; dann ergibt sich nämlich

$$Az = A(ez) = Ae \cdot z = xz.$$

Nun sei A_{x_n} eine Folge, die im Sinne der Norm von $\mathfrak{B}(R)$ gegen einen Operator $A \in \mathfrak{B}(R)$ konvergiert. Geht man dann in der Gleichung $A_{x_n}(yz) = A_{x_n}y \cdot z$ für $n \to \infty$ zur Grenze über, so folgt, daß A der Bedingung (3) genügt und daher ein Operator der Gestalt A_x ist, Folglich ist die Menge aller Operatoren A_x abgeschlossen, und Satz VIII ist bewiesen.

Aus diesem Satz folgt, daß das Produkt xy von Elementen einer Algebra R in beiden Variablen gleichzeitig stetig ist, wenn R eine vollständige topologische Algebra mit Einselement ist, deren Topologie durch eine Norm festgelegt ist.

§ 10. Symmetrische Algebren

1. Definition und Eigenschaften der symmetrischen Algebren. Eine Gesamtheit R von Elementen $x, y, \ldots$ soll eine *symmetrische Algebra*[1]) genannt werden, wenn folgendes gilt:

1. R ist eine Algebra;

2. in R ist eine Operation definiert, die jedem Element x aus R ein Element x^* aus R zuordnet, so daß gilt:

a) $(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*$;

b) $x^{**} = x$;

c) $(xy)^* = y^* x^*$.

Die Operation $x \to x^*$ werde *Involution* genannt, während die Elemente x und x^* *zueinander konjugiert* heißen sollen.

Ein Element x heiße *hermitesch*, wenn $x^* = x$ ist.

I. *Jedes Element x einer symmetrischen Algebra läßt sich auf eindeutige Weise in der Gestalt $x = x_1 + ix_2$ darstellen, wobei x_1 und x_2 hermitesche Elemente sind.*

Angenommen, es gäbe eine solche Darstellung. Dann muß $x^* = x_1 - ix_2$ und folglich

$$x_1 = \frac{x + x^*}{2}, \quad x_2 = \frac{x - x^*}{2i} \tag{1}$$

[1]) In der Literatur wird statt der Bezeichnung „symmetrische Algebra" häufig die Bezeichnung „Algebra mit Involution" benutzt, während die Bezeichnung „symmetrische Algebra" einen anderen Sinn hat (vgl. hierzu die Fußnote auf S. 228).

sein, d. h., die Darstellung ist jedenfalls eindeutig. Werden umgekehrt gerade die durch (1) definierten Elemente genommen, so gilt $x = x_1 + ix_2$, wobei x_1 und x_2 offenbar hermitesch sind. Die in Satz I behauptete Darstellung existiert also.

Die Elemente x_1 und x_2 sollen die *hermiteschen Komponenten des Elements* x genannt werden.

Ein Element x heiße *normal*, wenn $x^* x = x x^*$ ist.

Ist x ein normales Element, so sind seine hermiteschen Komponenten nach (1) miteinander vertauschbar. Umgekehrt gilt: Sind x_1 und x_2 miteinander vertauschbar, so sind auch $x = x_1 + ix_2$ und $x^* = x_1 - ix_2$ miteinander vertauschbar, d. h., x ist normal. Insbesondere ist jedes hermitesche Element normal.

II. *Jedes Element der Gestalt $x^* x$ ist hermitesch.*

Aus b) und c) folgt nämlich $(x^* x)^* = x^* x^{**} = x^* x$.

III. *Das Einselement ist hermitesch.*

Da $e^* e = e^*$ ein hermitesches Element ist, gilt nämlich $e^* = e$.

Ist R eine symmetrische Algebra ohne Einselement und R' die aus R durch Adjunktion eines Einselements entstehende Algebra, so kann in R' eine Involution definiert werden, indem man $(\lambda e + x)^* = \bar{\lambda} e + x^*$, $x \in R$, setzt. Dann ist R' ebenfalls eine symmetrische Algebra. Wir sagen, R' sei die aus R durch Adjunktion eines Einselements erhaltene symmetrische Algebra.

IV. *Mit x^{-1} existiert auch $(x^*)^{-1}$, und es ist*

$$(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*.$$

Beweis. Geht man auf beiden Seiten der Beziehung

$$x^{-1} x = x x^{-1} = e$$

zu den konjugierten Elementen über, so erhält man

$$x^* (x^{-1})^* = (x^{-1})^* x^* = e,$$

d. h., $(x^{-1})^*$ ist Inverses von x^*.

Eine Teilalgebra R_1 einer symmetrischen Algebra R heißt *symmetrisch*, wenn mit $x \in R_1$ auch $x^* \in R_1$ ist.

Ein nichtleerer Durchschnitt von symmetrischen Teilalgebren ist ebenfalls eine symmetrische Teilalgebra. Insbesondere ist der Durchschnitt aller symmetrischen Teilalgebren, die eine gegebene Menge $S \subset R$ enthalten, die kleinste symmetrische Teilalgebra, die S enthält. Wir bezeichnen sie mit $R_{a^*}(S)$. Offenbar gilt

$$R_{a^*}(S) = R_a(S, S^*),$$

wenn S^* die Gesamtheit der zu den Elementen $x \in S$ konjugierten Elemente x^* bezeichnet. Sind alle Elemente der Menge $S \cup S^*$ paarweise miteinander vertauschbar, so ist die Algebra $R_{a^*}(S)$ kommutativ. Insbesondere ist die Algebra $R_{a^*}(x)$ genau dann kommutativ, wenn $x^* x = x x^*$ ist, d. h., wenn x normal ist.

Eine kommutative symmetrische Teilalgebra heiße *maximal*, wenn sie in keiner anderen kommutativen symmetrischen Teilalgebra enthalten ist. Wie in § 7, Nr. 1, beweist man: *Jede kommutative symmetrische Teilalgebra ist in einer maximalen kommutativen symmetrischen Teilalgebra enthalten.*

V. *Ist $\mathfrak{A}$ eine maximale kommutative symmetrische Teilalgebra und x ein normales Element aus $\mathfrak{A}$, dessen Inverses x^{-1} existiert, so gehört auch x^{-1} zu $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Da x und x^* mit allen Elementen von $\mathfrak{A}$ vertauschbar sind, besitzen auch x^{-1} und $(x^*)^{-1} = (x^{-1})^*$ diese Eigenschaft. Da $\mathfrak{A}$ maximal ist, muß also $x^{-1} \in \mathfrak{A}$ sein.

Eine Abbildung $x \to x'$ einer symmetrischen Algebra R_1 in eine symmetrische Algebra R_2 werde *symmetrischer Homomorphismus* genannt, wenn folgendes gilt:

a) $x \to x'$ ist ein Homomorphismus;

b) aus $x \to x'$ folgt $x^* \to x'^*$.

Ist $x \to x'$ insbesondere ein Isomorphismus, so spricht man von einem *symmetrischen Isomorphismus.*

Symmetrische Homomorphismen von Algebren lassen sich mit Hilfe sogenannter *symmetrischer zweiseitiger Ideale* beschreiben.

Unter einem *symmetrischen* (Links-, Rechts-, zweiseitigen) *Ideal* werde ein Ideal verstanden, das mit x auch x^* enthält.

Ein symmetrisches Ideal ist stets ein zweiseitiges Ideal. In der Tat, die Abbildung $x \to x^*$ führt ein Linksideal stets in ein Rechtsideal und ein Rechtsideal in ein Linksideal über; wenn also I durch $x \to x^*$ in I abgebildet wird, so ist I sowohl Links- als auch Rechtsideal.

In der Restklassenalgebra R/I nach einem symmetrischen (und damit zweiseitigen) Ideal I läßt sich folgendermaßen eine Involution definieren. Da mit $x_1 - x_2 \in I$ auch $x_1^* - x_2^* \in I$ ist, geht beim Übergang von x zu x^* jede Restklasse $\tilde{x}$ nach dem Ideal I wieder in eine Restklasse nach I über, die wir mit $\tilde{x}^*$ bezeichnen. Offenbar sind hierbei die Bedingungen a), b) und c) von S. 194 erfüllt, so daß R/I eine symmetrische Algebra ist.

Ist $x \to x'$ ein symmetrischer Homomorphismus von R auf R_1, so ist das volle Urbild I des Nullelements von R_1 ein symmetrisches (zweiseitiges) Ideal in R, und die Restklassenalgebra R/I ist der Algebra R_1 symmetrisch isomorph.

Umgekehrt gilt: Wird jedem Element $x \in R$ die ihm entsprechende Restklasse $\tilde{x}$ nach einem symmetrischen Ideal I zugeordnet, so ist $x \to \tilde{x}$ ein symmetrischer Homomorphismus von R auf R/I.

VI. *Das Radikal einer symmetrischen Algebra ist ein symmetrisches zweiseitiges Ideal.*

Beweis. Bei einer Abbildung $x \to x^*$ gehen die maximalen regulären Linksideale in maximale reguläre Rechtsideale über. Folglich wird das Radikal als Durchschnitt sowohl aller maximalen regulären Rechtsideale als auch aller maximalen regulären Linksideale durch $x \to x^*$ auf sich selbst abgebildet.

Beispiele. 1. Die Algebra $C(T)$ (vgl. das Beispiel aus § 9, Nr. 1) wird zu einer symmetrischen Algebra, wenn man unter dem zu $x = x(t)$ konjugierten Element x^* die konjugiert komplexe Funktion $x^* = \overline{x(t)}$ versteht.

2. Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbertscher Raum. Die Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ (vgl. § 9, Nr. 1, Beispiel 2) ist eine symmetrische Algebra, wenn als Involution der Übergang zum adjungierten Operator angesehen wird (vgl. § 5, Nr. 10).

3. Die Algebra W (vgl. § 9, Nr. 1, Beispiel 3) ist eine symmetrische Algebra, wenn für $x = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$

$$x^* = \overline{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \bar{c}_{-n} e^{int}$$

gesetzt wird.

2. Positive Funktionale. Ein lineares Funktional $f(x)$ über einer symmetrischen Algebra R heißt *reell*, wenn es für alle hermiteschen Elemente von R reelle Werte annimmt.

I. *Jedes lineare Funktional über einer symmetrischen Algebra kann in der Gestalt $f = f_1 + i f_2$ dargestellt werden, wobei f_1 und f_2 reelle Funktionale sind.*

Wird nämlich

$$f_1(x) = \frac{1}{2}[f(x) + \overline{f(x^*)}], \quad f_2(x) = \frac{1}{2i}[f(x) - \overline{f(x^*)}]$$

gesetzt, so sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ reelle Funktionale, und es gilt

$$f(x) = f_1(x) + i f_2(x).$$

Man nennt $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die *reellen Komponenten* von $f(x)$.

I'. *Ist f ein reelles Funktional, so gilt $f(x^*) = \overline{f(x)}$ für jedes $x \in R$.*

Setzt man nämlich $x = x_1 + i x_2$, wobei x_1 und x_2 hermitesch sind, so folgt

$$f(x^*) = f(x_1 - i x_2) = f(x_1) - i f(x_2) = \overline{f(x_1) + i f(x_2)} = \overline{f(x_1 + i x_2)} = \overline{f(x)}.$$

Ein lineares Funktional $f(x)$ heißt *positiv*, wenn $f(x^* x) \geqq 0$ für alle Elemente $x \in R$ gilt.

II. *Jedes positive Funktional über einer symmetrischen Algebra mit Einselement ist ein reelles Funktional.*

Beweis. Ist $f(x)$ ein positives Funktional, so gilt zunächst offenbar

$$f(e) \geqq 0,$$

weil ja $e = e^* e$ ist. Nun sei $x = e + h$ mit einem hermiteschen Element h. Dann gilt

$$f(x^* x) = f((e+h)^* (e+h)) \geqq 0,$$

d. h.

$$f(e) + 2f(h) + f(h^* h) \geqq 0.$$

Folglich ist $f(h)$ eine reelle Zahl; also nimmt $f(x)$ für alle hermiteschen Elemente reelle Werte an, d. h., $f(x)$ ist ein reelles Funktional.

Offenbar ist jede Linearkombination von positiven Funktionalen mit reellen Koeffizienten ein reelles Funktional. Wie wir später sehen werden, gilt die Umkehrung im allgemeinen nicht (vgl. Beispiel a) aus § 20, Nr. 3).

III. *Für ein positives Funktional $f(x)$ gilt*

$$|f(y^* x)|^2 \leqq f(y^* y)\, f(x^* x). \tag{1}$$

Beweis. Für beliebige komplexe Zahlen λ und μ gilt

$$f((\lambda x + \mu y)^* (\lambda x + \mu y)) \geqq 0$$

oder

$$|\lambda|^2 f(x^* x) + \lambda \bar{\mu} f(y^* x) + \bar{\lambda} \mu f(x^* y) + |\mu|^2 f(y^* y) \geqq 0;$$

d. h., die linke Seite ist eine nichtnegative quadratische Form in λ und μ. Die Ungleichung (1) ist aber gerade eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür, daß diese Form nichtnegativ ist.

Die Ungleichung (1) wird SCHWARZ*sche Ungleichung* genannt.

IV. *Es sei R eine symmetrische Algebra ohne Einselement und R' die aus R durch Adjunktion eines Einselements entstehende symmetrische Algebra. Ein reelles positives Funktional $f(x)$ auf R läßt sich genau dann zu einem positiven Funktional auf R' fortsetzen, wenn $f(x)$ einer Ungleichung*

$$|f(x)|^2 \leqq C f(x^* x) \quad \textit{für alle} \quad x \in R \quad \textit{und} \quad C = \text{const} \tag{2}$$

genügt.

Beweis. Gibt es eine solche Fortsetzung, so gilt die SCHWARZsche Ungleichung (1) für alle $x, y \in R'$. Wird in ihr $y = e$ gesetzt, so ergibt sich (2) für $C = f(e)$. Gilt umgekehrt (2), so ist

$$f((\lambda e + x)) = \lambda C + f(x)$$

ein über R' definiertes Funktional; es ist positiv, weil die zu

$$f((\lambda e + x)^* (\lambda e + x)) = f(\lambda \bar{\lambda} e + \lambda x^* + \bar{\lambda} x + x^* x)$$
$$= \lambda \bar{\lambda} C + \lambda f(x^*) + \bar{\lambda} f(x) + f(x^* x)$$

gehörende quadratische Form wegen Satz I′ und (2) nichtnegativ ist.

Wir erwähnen noch folgenden wichtigen Spezialfall. Wir sagen, eine Teilmenge $\{e_\alpha\}$ einer normierten Algebra R *approximiert das Einselement*, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $|e_\alpha| \leqq 1$ für alle $e_\alpha \in \{e_\alpha\}$;

b) zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $x \in R$ gibt es ein Element e_α derart, daß $|x - x e_\alpha| < \varepsilon$ ist.

V. *Gibt es in einer symmetrischen normierten Algebra R mit $|x^*| = |x|$ eine Menge $\{e_\alpha\}$, die das Einselement approximiert, so kann jedes stetige positive Funktional über R zu einem stetigen positiven Funktional über R' fortgesetzt werden.*

Beweis. Auf Grund der SCHWARZschen Ungleichung gilt

$$|f(e_\alpha x)|^2 \leqq f(e_\alpha e_\alpha^*)\, f(x^* x),$$

woraus sich wegen a) sofort $|f(e_\alpha x)|^2 \leqq |f| f(x^* x)$ ergibt. Hieraus schließen wir unter Berücksichtigung von b) und der Stetigkeit des Funktionals $f(x)$, daß auch $|f(x)|^2 \leqq |f| f(x^* x)$ ist; die Bedingung (2) von Satz IV ist also erfüllt. Schließlich folgt aus $f((\lambda e_\alpha + x)^* (\lambda e_\alpha + x)) \geqq 0$, daß $f(e_\alpha^* x^*) = \overline{f(x e_\alpha)}$ gilt; zieht man b) und die Stetigkeit von $f(x)$ heran, so ergibt sich hieraus $f(x^*) = \overline{f(x)}$; $f(x)$ ist reell.

3. Normierte symmetrische Algebren. Eine Menge R von Elementen $x, y, z, \ldots$ soll *normierte symmetrische Algebra* genannt werden, wenn sie folgende Eigenschaften besitzt:

a) R ist eine normierte Algebra;

b) R ist eine symmetrische Algebra;

c) $|x^*| = |x|$.

Aus c) folgt, daß die Involution stetig ist.

Eine nichtvollständige normierte Algebra R kann stets zu einer vollständigen normierten Algebra $\tilde{R}$ erweitert werden, und zwar genau auf eine Weise (vgl. § 9, Nr. 1). Es sei $x_0 \in \tilde{R}$. Aus $|x_n - x_0| \to 0$, $x_n \in R$, folgt $|x_n - x_m| \to 0$ für $n, m \to \infty$. Dann gilt aber auch $|x_n^* - x_m^*| \to 0$, d. h., $\{x_n^*\}$ ist eine Fundamentalfolge in R. Das durch sie festgelegte Element von $\tilde{R}$ werde mit x_0^* bezeichnet.

Wie man leicht sieht, erfüllt die so definierte Zuordnung $x_0 \to x_0^*$ die Bedingungen a), b) und c) aus Nr. 1 sowie die Bedingung c). Folglich wird $\tilde{R}$ mit dieser Involution zu einer vollständigen normierten symmetrischen Algebra. Es gilt also:

Jede normierte symmetrische Algebra R kann zu einer Banach*schen symmetrischen Algebra $\tilde{R}$ erweitert werden, in der R dicht ist.*

Die Algebra $\tilde{R}$ heißt die *vollständige Hülle* der normierten symmetrischen Algebra R.

In einer Banachschen symmetrischen Algebra können abgeschlossene symmetrische Teilalgebren betrachtet werden. Die kleinste abgeschlossene symmetrische Teilalgebra, die eine gegebene Menge S enthält, werde mit $R(S)$ bezeichnet.

Bei der Untersuchung der normierten symmetrischen Algebren wird man naturgemäß stetige symmetrische Homomorphismen bzw. Isomorphismen betrachten. Liegt ein stetiger symmetrischer Homomorphismus von vollständigen Algebren vor, so bleibt der Satz IV aus § 9, Nr. 4, gültig, wenn man ausschließlich abgeschlossene symmetrische Ideale der abgebildeten Algebra in Betracht zieht. Eine Abbildung $x \to x'$ einer normierten symmetrischen Algebra R auf eine normierte symmetrische Algebra R_1 heiße ein *voller Isomorphismus*, wenn folgendes gilt:

a) $x \to x'$ ist eine isometrische Abbildung des Raumes R auf den Raum R_1;

b) $x \to x'$ ist ein symmetrischer Isomorphismus der symmetrischen Algebra R auf die symmetrische Algebra R_1.

Zwei normierte symmetrische Algebren R und R_1 heißen *vollisomorph*, wenn ein voller Isomorphismus von R auf R_1 existiert.

Für jedes Element x des Radikals einer normierten symmetrischen Algebra R gilt

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^* x^n)|} = 0.$$

Beweis. Offenbar genügt es, eine Algebra mit Einselement zu betrachten [vgl. § 7, Nr. 5 (3)]. Gehört x zum Radikal, so existiert $(e+yx)^{-1}$ für alle $y \in R$. Hieraus folgt, wenn $y = -\lambda x^*$ gesetzt wird, die Existenz von $(e - \lambda x^* x)^{-1}$ für alle λ (in R und damit erst recht in der vollständigen Hülle $\tilde{R}$). Daher ist $(e-\lambda x^* x)^{-1}$ eine ganze analytische Funktion von λ (vgl. § 3, Nr. 12). Dann ist die Reihe

$$(e - \lambda x^* x)^{-1} = e + \lambda x^* x + \lambda^2 (x^* x)^2 + \lambda^3 (x^* x)^3 + \cdots$$

für alle λ im Sinne der Norm von $\tilde{R}$ absolut konvergent (vgl. § 4, Nr. 7, Satz III). Auf Grund der Formel (5) in § 4, Nr. 7, für den Konvergenzradius folgt hieraus nun

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^* x)^n|} = 0,$$

was zu beweisen war.

4. Positive Funktionale auf einer Banachschen symmetrischen Algebra.

I. *Jedes positive Funktional $f(x)$ auf einer* Banach*schen symmetrischen Algebra mit Einselement ist beschränkt, und zwar gilt*

$$|f(x)| \leqq f(e)\,|x|. \tag{1}$$

Beweis. Zunächst bezeichne x ein hermitesches Element mit $|x| \leqq 1$. Die binomische Reihe

$$(1-\lambda)^{\frac{1}{2}} = 1 - \frac{1}{2}\lambda - \frac{1}{2!}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\lambda^2 - \cdots$$

konvergiert absolut für $|\lambda| \leqq 1$. Wir ersetzen in dieser Reihe λ durch x und 1 durch e. Da R ein vollständiger Raum und $|x| \leqq 1$ ist, konvergiert die so entstehende Reihe

$$e - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2!}\,\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}x^2 - \cdots$$

in R absolut. Wegen der Stetigkeit der Involution ist ihre Summe y ein hermitesches Element. Außerdem gilt

$$y^* y = y^2 = e - x.$$

Hieraus folgt

$$f(e-x) = f(y^* y) \geqq 0;$$

daher ist

$$f(x) \leqq f(e).$$

Wird hier x durch $-x$ ersetzt, so folgt, daß auch $-f(x) \leqq f(e)$ ist. Es gilt also

$$|f(x)| \leqq f(e).$$

Nun sei $x \neq 0$ ein beliebiges hermitesches Element (für $x = 0$ ist die Ungleichung (1) trivialerweise erfüllt). Wir setzen $x_1 = \frac{1}{|x|} x$. Dann ist x_1 ebenfalls hermitesch, und es gilt $|x_1| = 1$. Demnach ist $|f(x_1)| \leqq f(e)$, also $\frac{|f(x)|}{|x|} \leqq f(e)$, womit die Gültigkeit von (1) für alle hermiteschen Elemente bewiesen ist.

Es bleibt der Fall eines beliebigen Elements $x \in R$ zu betrachten. Da $x^* x$ für jedes $x \in R$ ein hermitesches Element ist, gilt

$$f(x^* x) \leqq f(e)\,|x^* x| \leqq f(e)\,|x^*|\,|x| = f(e)\,|x|^2. \tag{2}$$

Andererseits ergibt sich aus der SCHWARZschen Ungleichung [vgl. (1) aus Nr. 2] für $y = e$

$$|f(x)|^2 \leqq f(e)\, f(x^* x).$$

Hieraus und aus (2) folgt schließlich

$$|f(x)|^2 \leqq |f(e)|^2\,|x|^2,$$

d. h., die Ungleichung (1) gilt für alle $x \in R$.

II. *Die Norm $|f|$ eines positiven Funktionals auf einer* BANACH*schen symmetrischen Algebra mit Einselement ist gleich $f(e)$.*

Beweis. Per definitionem gilt

$$|f| = \sup_{|x|=1} |f(x)|.$$

Nach (1) gilt aber $\sup\limits_{|x|=1} |f(x)| \leqq f(e)$, und für $x = e$ gilt das Gleichheitszeichen.

III. *Für jedes positive Funktional f auf einer* BANACH*schen symmetrischen Algebra mit Einselement gilt*

$$f(x^* x) \leqq f(e) \varlimsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^* x)^n|}. \tag{3}$$

Beweis. Durch wiederholte Anwendung der SCHWARZschen Ungleichung ergibt sich unter Berücksichtigung der Ungleichung (1) zunächst

$$\begin{aligned}
|f(x)| &\leqq [f(e)]^{\frac{1}{2}} [f(x^* x)]^{\frac{1}{2}} \\
&\leqq [f(e)]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}} [f((x^* x)^2)]^{\frac{1}{4}} \\
&\leqq [f(e)]^{\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\cdots+\frac{1}{2^m}} [f((x^* x)^{2^{m-1}})]^{\frac{1}{2^m}} \\
&\leqq [f(e)]^{1-\frac{1}{2^m}}\, |f|^{\frac{1}{2^m}}\, |(x^* x)^{2^{m-1}}|^{\frac{1}{2^m}} = f(e)\, |(x^* x)^{2^{m-1}}|^{\frac{1}{2^m}};
\end{aligned}$$

für $m \to \infty$ folgt hieraus

$$|f(x)| \leqq f(e) \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[2n]{|(x^*x)^n|}.$$

Ersetzt man hier x durch x^*x, so erhält man die Ungleichung (3).

Offenbar kann für den oberen Limes in (3) der Limes genommen werden, weil dieser stets existiert (vgl. § 11, Nr. 2, Satz V).

Wir ziehen abschließend noch eine einfache Folgerung aus der Ungleichung (3).

IV. *Gehört das Element x zum Radikal einer* BANACH*schen symmetrischen Algebra R mit Einselement, so gilt $f(x^*x) = 0$ für jedes positive Funktional f über R.*

Für ein Element x des Radikals gilt nämlich $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|} = 0$, so daß nur noch die Ungleichung (3) anzuwenden bleibt.

KAPITEL III

KOMMUTATIVE NORMIERTE ALGEBREN

§ 11. Realisierung einer kommutativen Algebra als Funktionenalgebra

Eines der Hauptergebnisse der Theorie der kommutativen normierten Algebren besteht in der Aussage, daß eine solche Algebra R unter gewissen Voraussetzungen einer Funktionenalgebra isomorph ist.[1]) Diese Aussage wird sich durch Untersuchung der Quotientenalgebra von R nach einem maximalen Ideal ergeben.

1. Die Quotientenalgebra nach einem maximalen Ideal. Es sei R eine BANACHsche kommutative Algebra mit Einselement. Wegen der Kommutativität von R ist jedes Rechts- bzw. Linksideal von R ein zweiseitiges Ideal. Wir betrachten ein beliebiges maximales Ideal M von R. Da M abgeschlossen ist, ist die Quotientenalgebra R/M eine BANACHsche Algebra, die ebenfalls ein Einselement hat (vgl. § 9, Nr. 3, Satz II und IV). Wegen der Maximalität von M ist R/M einfach, d. h., es gibt in R/M kein von (0) verschiedenes Ideal. Folglich gehört kein Element $\tilde{x} \neq 0$ der Algebra R/M einem Ideal von R/M an, d. h., jedes Element $\tilde{x} \neq 0$ von R/M hat ein Inverses (vgl. § 7, Nr. 4, Satz III, und Nr. 6, Satz III). Mit anderen Worten, R/M ist eine vollständige normierte Divisionsalgebra. Nach dem Satz von GELFAND-MAZUR (§ 9, Nr. 3, Satz III) ist dann R/M dem Körper der komplexen Zahlen isomorph, d. h., jedes Element $\tilde{x}$ der Algebra R/M hat die Gestalt $\tilde{x} = \lambda\tilde{e}$, wobei $\tilde{e}$ das Einselement von R/M ist. Es gilt also

Theorem 1. *Die Restklassenalgebra einer* BANACH*schen kommutativen Algebra mit Einselement nach einem ihrer maximalen Ideale ist dem Körper der komplexen Zahlen isomorph.*

Auf Grund dieses Satzes ist der natürliche Homomorphismus von R auf R/M im wesentlichen ein Homomorphismus der Algebra R auf den Körper der komplexen Zahlen. Folglich gilt:

I. *Jedes maximale Ideal in einer* BANACH*schen kommutativen Algebra R mit Einselement erzeugt einen Homomorphismus der Algebra R auf den Körper der komplexen Zahlen.*

Auch die Umkehrung gilt:

II. *Jeder Homomorphismus einer* BANACH*schen kommutativen Algebra R mit Einselement auf den Körper der komplexen Zahlen stimmt mit dem*

---

[1]) Die genaue Formulierung dieses Ergebnisses wird in Nr. 3 gegeben.

natürlichen Homomorphismus überein, den ein maximales Ideal M von R erzeugt.

Beweis. Bei einem Homomorphismus von R auf den Körper der komplexen Zahlen ist das volle Urbild der Zahl Null stets ein Ideal in R. Bezeichnen wir dieses mit M, so stimmt der betrachtete Homomorphismus mit dem natürlichen Homomorphismus von R auf R/M überein (vgl. § 7, Nr. 6, Satz II). Hierbei ist M ein maximales Ideal; anderenfalls wäre nämlich M in einem maximalen Ideal M_1 enthalten, dessen Bild dann ein vom Nullideal verschiedenes Ideal im Körper der komplexen Zahlen sein müßte, was aber unmöglich ist.

2. Funktionen von maximalen Idealen, die durch Elemente der Algebra erzeugt werden. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit aller maximalen Ideale M einer gegebenen Banachschen kommutativen Algebra R mit Einselement. Nach Satz I aus Nr. 1 erzeugt jedes Ideal $M \in \mathfrak{M}$ einen Homomorphismus der Algebra R auf den Körper der komplexen Zahlen. Es sei $x(M)$ die Zahl, die bei diesem Homomorphismus dem Element $x \in R$ entspricht. Für festes $x \in R$ und variables M ergibt sich die auf der Menge $\mathfrak{M}$ definierte Funktion $x(M)$. Denken wir uns nun $x \in R$ variabel, so ist $x \to x(M)$ eine Zuordnung zwischen den Elementen x der Algebra R einerseits und den auf der Menge $\mathfrak{M}$ definierten Funktionen $x(M)$ andererseits.

I. *Die Zuordnung $x \to x(M)$ hat folgende Eigenschaften:*

a) *Aus* $x = x_1 + x_2$ *folgt* $x(M) = x_1(M) + x_2(M)$;

b) *aus* $x = \alpha x_1$ *folgt* $x(M) = \alpha x_1(M)$;

c) *aus* $x = x_1 x_2$ *folgt* $x(M) = x_1(M) x_2(M)$;

d) $e(M) = 1$;

e) $x(M_0) = 0$ *genau dann, wenn* $x \in M_0$;

f) *ist* $M_1 \neq M_2$, *so gibt es ein Element* $x \in R$, *für das* $x(M_1) \neq x(M_2)$ *ist*;

g) $|x(M)| \leqq |x|$.

Beweis. Die Eigenschaften a) bis d) gelten, weil die Abbildung $x \to x(M_0)$ für festes M_0 ein Homomorphismus ist. Die Gleichung $x(M_0) = 0$ bedeutet, daß x durch $x \to x(M_0)$ in die Zahl Null abgebildet wird. Dann ist $x \in M_0$, womit die Eigenschaft e) nachgewiesen ist. Ist $M_1 \neq M_2$, so gibt es in R ein Element x_0 mit $x_0 \in M_1$ und $x_0 \notin M_2$ (oder $x_0 \in M_2$, $x_0 \notin M_1$), was wegen e) bedeutet, daß $x(M_1) = 0$ und $x(M_2) \neq 0$ (oder umgekehrt) ist. Es gilt also $x(M_1) \neq x(M_2)$, und Eigenschaft f) ist nachgewiesen.

In g) ist $|x(M)|$ die Norm des Bildes $x(M)\tilde{e}$ des Elements x bei dem Homomorphismus von R auf R/M. Aus der Definition der Norm in R/M (vgl. § 9, Nr. 3) folgt dann

$$|x(M)| = \inf |x'|,$$

wobei x' die Restklasse modulo M durchläuft, die x enthält. Daher gilt tatsächlich $|x(M)| \leqq |x|$.

II. *Ein Element x der Algebra R hat genau dann ein Inverses, wenn die Funktion $x(M)$ überall auf $\mathfrak{M}$ von Null verschieden ist.*

In der Tat, x hat genau dann ein Inverses, wenn es keinem maximalen Ideal angehört. Nach Satz I, Eigenschaft e), ist dies aber gleichwertig mit der Bedingung $x(M) \neq 0$ für alle $M \in \mathfrak{M}$.

III. *Für festes $x \in R$ stimmt die Gesamtheit der Werte, welche die Funktion $x(M)$ annimmt, mit dem Spektrum des Elements x überein.*

Beweis. Ist $x(M_0) = \lambda_0$, so gilt $(x - \lambda_0 e)(M_0) = 0$, und daher existiert $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ nicht, d. h., λ_0 gehört zum Spektrum von x. Umgekehrt gehöre nun λ_0 zum Spektrum von x. Dann existiert $(x - \lambda_0 e)^{-1}$ nicht; $x - \lambda_0 e$ muß daher auf einem maximalen Ideal M_0 gleich Null sein, d. h., es gilt $x(M_0) = \lambda_0$.

IV. *Für jedes $x \in R$ gilt*

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}. \tag{1}$$

Beweis. Wird $\sup\limits_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = a$ gesetzt, so hat das Element $x - \mu e$ nach Satz II für $|\mu| > a$ ein Inverses. Daher ist die Vektorfunktion

$$(e - \lambda x)^{-1} = -\lambda^{-1}\left(x - \frac{1}{\lambda} e\right)^{-1}$$

für $|\lambda| < \frac{1}{a}$ analytisch, so daß der Konvergenzradius der Taylorschen Reihe dieser Funktion (vgl. § 4, Nr. 7) gewiß nicht kleiner als $\frac{1}{a}$ ist. Da er gleich $\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|x^n|}}$ ist, muß also

$$\overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|x^n|} \leqq a \tag{2}$$

sein. Wegen der Eigenschaft g) aus Satz I gilt andererseits für alle natürlichen n

$$|x^n| \geqq \sup_{M \in \mathfrak{M}} |x^n(M)| = \left(\sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|\right)^n = a^n.$$

Hieraus folgt

$$\sqrt[n]{|x^n|} \geqq a,$$

und daher ist

$$\underline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{|x^n|} \geqq a. \tag{3}$$

Durch Vergleich von (2) mit (3) ergibt sich schließlich die Gültigkeit von Formel (1).

Bemerkung. Offenbar wurde dabei auch folgende Aussage bewiesen: *Für jedes Element x einer Banachschen kommutativen Algebra R mit Einselement existiert $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$.* Dieses Ergebnis läßt sich leicht verallgemeinern:

V. *Für jedes Element x einer normierten (nicht notwendig kommutativen) Algebra R existiert $\lim\limits_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß R eine vollständige normierte Algebra mit Einselement ist; anderenfalls könnte R durch diejenige Algebra ersetzt werden, welche aus R durch Adjunktion eines Einselements und Vervollständigung entsteht. Es sei R_1 die kleinste abgeschlossene kommutative Teilalgebra von R, welche die Elemente x und e enthält. Dann ist x ein Element der vollständigen kommutativen normierten Teilalgebra R_1 mit Einselement. Nach Satz IV existiert dann $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|}$ in R_1 und damit auch in R.

Nun sei $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$ die Gesamtheit aller auf der Menge $\mathfrak{M}$ definierten Funktionen. Offenbar wird $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$ eine Algebra, wenn die Multiplikation mit einer Zahl, die Addition und die Multiplikation als die üblichen Operationen mit den Funktionen definiert werden. Die Eigenschaften a) bis d) von Satz I bedeuten dann: *Die Zuordnung $x \to x(M)$ ist ein Homomorphismus der Algebra R in die Algebra $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$.*

VI. *Das volle Urbild des Nullelements bei dem Homomorphismus $x \to x(M)$ von R in $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$ ist das Radikal der Algebra R.*

Beweis. Das volle Urbild des Nullelements besteht aus den und nur den Elementen x der Algebra R, für die $x(M) = 0$ auf ganz $\mathfrak{M}$ gilt, d. h. die zum Durchschnitt aller maximalen Ideale von R gehören. Dieser Durchschnitt ist aber gerade das Radikal der Algebra R (vgl. § 7, Nr. 5, Satz III).

Aus Satz IV und VI ergibt sich die

Folgerung. *In einer* BANACH*schen kommutativen Algebra R mit Einselement gehört x genau dann dem Radikal an, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^n|} = 0$ ist.*

VII. *Ist R eine halbeinfache Algebra, so ist die Zuordnung $x \to \{x(M)\}$ ein Isomorphismus der Algebra R in die Algebra $\mathscr{F}(\mathfrak{M})$.*

Beweis. Nach Satz VI ist das Urbild des Nullelements bei dem Homomorphismus $x \to x(M)$ in diesem Fall das Nullideal (0), so daß dieser Homomorphismus ein Isomorphismus ist.

Wir ziehen aus dem letzten Satz die Folgerung: *Jede halbeinfache* BANACH*sche kommutative Algebra R mit Einselement ist einer Algebra von Funktionen über der Menge aller maximalen Ideale der Algebra R isomorph.*

Beispiele. 1. Wir betrachten die Algebra W der Funktionen $x(t) = \sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ mit $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} |c_n| < \infty$ (§ 9, Nr. 1, Beispiel 3) und stellen uns die Aufgabe, alle maximalen Ideale von W zu finden. Es sei M ein maximales Ideal von W. Bei dem von M erzeugten Homomorphismus gehe das Element $x_0 = e^{it}$ in die Zahl a über, so daß das Element $x_0^{-1} = e^{-it}$ in die Zahl a^{-1} übergeht. Das Element $x_0 = e^{it}$ hat die Norm Eins. Auf Grund der Eigenschaft g) aus Satz I gilt folglich $|a| \leqq |x_0| = 1$. Entsprechend ergibt sich $|a^{-1}| \leqq |x_0^{-1}| = 1$, weil $x_0^{-1} = e^{-it}$ ebenfalls die Norm Eins hat. Daher gilt $|a| = 1$, und es gibt ein t_0, $0 \leqq t_0 \leqq 2\pi$, für das $a = e^{it_0}$ ist. Dann geht aber e^{int} in e^{int_0} und damit $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ in $\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int_0}$ über. Demnach wird jedes maximale Ideal M der Algebra W durch eine Zahl t_0 aus dem

Intervall $0 \leqq t \leqq 2\pi$ bestimmt, und zwar besteht M aus den und nur den Funktionen $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ der Algebra W, die für $t = t_0$ gleich Null sind.

Nun sei $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ eine Funktion aus W, die für kein t gleich Null ist. Dies bedeutet, daß $x(t)$ keinem maximalen Ideal angehört und daher in W ein Inverses hat. Dieses Inverse ist gleich der Funktion $\frac{1}{x(t)}$, die somit ebenfalls zu W gehören muß. Damit haben wir den folgenden Satz von WIENER [1, 2] bewiesen.

Wenn die Summe einer absolut konvergenten trigonometrischen Reihe $\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$ *nirgends verschwindet, so kann die Funktion* $\frac{1}{\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}}$ *ebenfalls in eine absolut konvergente trigonometrische Reihe entwickelt werden.*

2. Wir betrachten die Algebra $C(T)$ aller Funktionen $x = x(t)$, die auf dem bikompakten Raum T stetig sind (§ 9, Nr. 1, Beispiel 1). Gesucht sind die maximalen Ideale dieser Algebra.

Ist t_0 ein fester Punkt von T, so ist die Zuordnung $x(t) \to x(t_0)$ ein Homomorphismus der Algebra $C(T)$ auf den Körper der komplexen Zahlen. Wie wir wissen, wird dieser Homomorphismus durch ein maximales Ideal erzeugt. Wir bezeichnen es mit M_{t_0}. Dieses Ideal ist die Gesamtheit aller Funktionen $x(t)$ von $C(T)$, die im Punkt t_0 verschwinden. Umgekehrt gilt:

Zu jedem maximalen Ideal M_0 der Algebra $C(T)$ gibt es einen Punkt $t_0 \in T$ derart, daß M_0 die Gesamtheit M_{t_0} der in t_0 verschwindenden Funktionen von $C(T)$ ist.

Zum Beweis betrachten wir ein beliebiges maximales Ideal M_0 von $C(T)$. Zu zeigen ist, daß es einen Punkt t_0 mit der erwähnten Eigenschaft gibt. Wir nehmen das Gegenteil an. Dann gibt es zu jedem $\tau \in T$ eine Funktion $x_\tau(t) \in M_0$, die im Punkt τ von Null verschieden ist. Da die Funktion $x_\tau(t)$ stetig ist, ist sie auch in einer ganzen Umgebung $U(\tau)$ von τ von Null verschieden. Nun ist T bikompakt. Also lassen sich aus diesen Umgebungen endlich viele $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$ auswählen, die T vollständig überdecken. Die ihnen entsprechenden Funktionen $x_\tau(t) \in M_0$ bezeichnen wir mit $x_{\tau_1}(t), \ldots, x_{\tau_n}(t)$. Dann gehört die Funktion

$$x(t) = x_{\tau_1}(t)\overline{x_{\tau_1}(t)} + \cdots + x_{\tau_n}(t)\overline{x_{\tau_n}(t)} = |x_{\tau_1}(t)|^2 + \cdots + |x_{\tau_n}(t)|^2$$

ebenfalls zu M_0. Sie verschwindet nirgends auf T; also ist $\frac{1}{x(t)}$ auf T stetig und gehört zur Algebra $C(T)$. Dies bedeutet aber, daß das Element $x = x(t)$ ein Inverses hat und daher zu keinem maximalen Ideal gehört, insbesondere nicht zu M_0. Damit sind wir auf einen Widerspruch gestoßen; es gibt also tatsächlich einen Punkt $t_0 \in T$, in dem alle Funktionen des Ideals verschwinden. Dann gilt $M_0 \subset M_{t_0}$, woraus aber sofort $M_0 = M_{t_0}$ folgt, weil M_0 ein maximales Ideal ist. Offenbar ist die Abbildung $t_0 \to M_{t_0}$ der Menge aller Punkte $t_0 \in T$ auf die Menge aller maximalen Ideale der Algebra $C(T)$ umkehrbar eindeutig.

Aus $x(t) - x(t_0) \in M_0$ folgt $x(M_{t_0}) = x(t_0)$. Folglich geht die Funktion $x(M)$ bei der Zuordnung $t_0 \to M_{t_0}$ in die Ausgangsfunktion $x(t)$ über.

Offenbar haben wir in diesen Überlegungen nur folgende Eigenschaften der Algebra $R = C(T)$ benutzt: 1. Alle Funktionen $x(t) \in R$ sind stetig; 2. mit $x(t) \in R$ ist auch $\overline{x(t)} \in R$; 3. wenn eine Funktion $x(t)$ der Algebra R nirgends auf T verschwindet, so gehört auch $\frac{1}{x(t)}$ zu R. Daher haben wir den folgenden allgemeineren Satz bewiesen:

VIII. *Ist R eine Algebra von Funktionen über einem bikompakten Raum T, die den Bedingungen 1, 2 und 3 genügt, so stimmt jedes maximale Ideal M von R mit einem Ideal M_{t_0}, $t_0 \in T$,* überein.

3. Wir bezeichnen mit $D_n(a, b)$ die Gesamtheit aller komplexen Funktionen $x = x(t)$, die in dem abgeschlossenen Intervall $[a, b]$ definiert sind und eine stetige n-te Ableitung haben. Als Operationen in $D_n(a, b)$ nehmen wir die übliche Addition und Multiplikation von Funktionen sowie die Multiplikation von Funktionen mit Zahlen. Ferner definieren wir in $D_n(a, b)$ eine Norm $|x|$, indem wir

$$|x| = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} \max_{a \leq t \leq b} |x^{(k)}(t)|$$

setzen. Damit wird $D_n(a, b)$ zu einer Banachschen kommutativen Algebra mit Einselement. Offenbar genügt $D_n(a, b)$ den vor Satz VIII in Beispiel 2 genannten drei Bedingungen. Daher gibt es nach Satz VIII zu jedem Ideal M in $D_n(a, b)$ eine Zahl $t_0 \in [a, b]$ derart, daß M die Gesamtheit M_{t_0} derjenigen Funktionen $x(t) \in D_n(a, b)$ ist, die in $t = t_0$ verschwinden.

3. Topologisierung der Menge aller maximalen Ideale. Wir führen jetzt in der Menge $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale von R die durch die Familie der Funktionen $x(M)$, $x \in R$, definierte schwache Topologie ein (vgl. § 2, Nr. 11). Man erhält eine zu dieser Topologie gehörende Umgebungsbasis, wenn man alle möglichen Mengen $U(M_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ von Idealen M betrachtet, die durch Ungleichungen der Gestalt

$$|x_k(M) - x_k(M_0)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

definiert werden; hierbei ist $\varepsilon > 0$ eine jeweils feste Zahl, während $x_1, x_2, \ldots, x_n$ jeweils feste Elemente von R bezeichnen. Aus der Definition dieser Topologie folgt unmittelbar, daß alle Funktionen $x(M)$, $x \in R$, auf $\mathfrak{M}$ stetig sind. Außerdem ist $\mathfrak{M}$ ein Hausdorffscher Raum, weil die Funktionen $x(M)$, $x \in R$, nach Nr. 2, Satz I, auf $\mathfrak{M}$ die Punkte trennen.

Theorem 2. *Der Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale einer* Banachschen *kommutativen Algebra R mit Einselement ist bikompakt.*

Beweis. Wir ordnen jedem Element x der Algebra R in der komplexen Ebene den Kreis Q_x mit dem Mittelpunkt O und dem Radius $|x|$ zu. Nun sei Q das topologische Produkt aller dieser Kreise. Dann ist Q der Raum, dessen Punkte alle möglichen Systeme $\Lambda = \{\lambda_x\}$ von Zahlen $\lambda_x \in Q_x$ sind; x durchläuft hierbei sämtliche Elemente der Algebra R. Es sei $\Lambda^0 = \{\lambda_x^0\}$ ein beliebiger Punkt von Q. Man erhält eine Umgebungsbasis von Λ^0, wenn man für alle möglichen positiven Zahlen ε und alle möglichen endlichen Systeme von Elementen $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ das System der durch die Ungleichungen

$$|\lambda_{x_1} - \lambda_{x_1}^0| < \varepsilon, \ldots, |\lambda_{x_n} - \lambda_{x_n}^0| < \varepsilon \tag{1}$$

definierten Mengen in Q betrachtet (vgl. § 2, Nr. 12). Wir bezeichnen nun mit $U(\Lambda^0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ die durch (1) beschriebene Umgebung. Auf Grund des Satzes von Tychonoff (Satz II aus § 2, Nr. 12) ist Q ein bikompakter Raum.

Da $|x(M)| \leq |x|$ ist, entspricht jedem maximalen Ideal M der Punkt $\{\lambda_x\} \in Q$, $\lambda_x = x(M)$. Hierbei entsprechen verschiedenen maximalen Idealen M

verschiedene Punkte $\{\lambda_x\}$. In der Tat, ist $M \neq M_1$, so gibt es ein Element $x_0 \in R$, für das $x_0(M_1) \neq x_0(M)$ gilt. Dies bedeutet aber, daß die entsprechenden Punkte $\{\lambda_x\}$, $\{\lambda'_x\}$ sich in wenigstens einer Koordinate unterscheiden (nämlich in der mit dem Index x_0) und daher verschieden sind. Die durch $\lambda_x = x(M)$ hergestellte Zuordnung $M \to \{\lambda_x\}$ ist demnach umkehrbar eindeutig. Aus dem Vergleich der in $\mathfrak{M}$ und Q erklärten Topologien erkennt man ferner, daß diese Zuordnung eine Homöomorphie ist. Wir werden anschließend beweisen, daß das Bild Q_1 des Raumes $\mathfrak{M}$ in Q bei diesem Homöomorphismus abgeschlossen ist. Dann ist Q_1 als abgeschlossene Teilmenge des bikompakten Raumes Q selbst bikompakt (vgl. § 2, Nr. 6, Satz III), und folglich ist sein homöomorphes Urbild $\mathfrak{M}$ ebenfalls bikompakt.

Es sei $\Lambda^0 = \{\lambda_x^0\}$ ein beliebiger Häufungspunkt der Menge Q_1. Wir gehen nun so vor, daß wir die Existenz eines maximalen Ideals M_0 nachweisen, für das $x(M_0) = \lambda_x^0$ ist. Dann gilt $\{\lambda_0^x\} \in Q_1$, und die Abgeschlossenheit von Q_1 in Q ist bewiesen. Offenbar genügt es zum Beweis der Existenz dieses M_0 zu zeigen, daß $x \to \lambda_x^0$ ein Homomorphismus der Algebra R auf den Körper der komplexen Zahlen ist, d. h., daß

$$\lambda_x^0 \neq 0, \quad \lambda_{\alpha x}^0 = \alpha \lambda_x^0, \quad \lambda_{x+y}^0 = \lambda_x^0 + \lambda_y^0, \quad \lambda_{xy}^0 = \lambda_x^0 \lambda_y^0 \tag{2}$$

gilt; denn nach Satz II aus Nr. 1 wird dieser Homomorphismus von einem maximalen Ideal M_0 erzeugt, d. h., es ist $\lambda_x^0 = x(M_0)$ für ein $M_0 \in \mathfrak{M}$. Wir beschränken uns auf den Beweis der letzten Beziehung in (2); die übrigen Beziehungen lassen sich analog beweisen. Hierzu betrachten wir die Umgebung $U(\Lambda^0; x, y, xy; \varepsilon)$ des Punktes Λ^0. Da Λ^0 ein Häufungspunkt der Menge Q_1 ist, gibt es ein maximales Ideal M derart, daß der entsprechende Punkt $\Lambda = \{\lambda_x\}$, $\lambda_x = x(M)$, zu dieser Umgebung gehört. Das bedeutet

$$|\lambda_x^0 - x(M)| < \varepsilon, \quad |\lambda_y^0 - y(M)| < \varepsilon,$$
$$|\lambda_{xy}^0 - (xy)(M)| = |\lambda_{xy}^0 - x(M)\, y(M)| < \varepsilon.$$

Dann gilt aber

$$|\lambda_{xy}^0 - \lambda_x^0 \lambda_y^0| \leqq |\lambda_{xy}^0 - x(M)\, y(M)| + |x(M)\,[y(M) - \lambda_y^0]| + |\lambda_y^0 [x(M) - \lambda_x^0]|$$
$$< \varepsilon + |x|\, |y(M) - \lambda_y^0| + |\lambda_y^0|\, |x(M) - \lambda_x^0| < \varepsilon (1 + |x| + |\lambda_y^0|),$$

woraus die zu beweisende Beziehung $\lambda_{xy}^0 = \lambda_x^0 \lambda_y^0$ folgt, da $\varepsilon > 0$ beliebig ist. Die Zuordnung $x \to \lambda_x^0$ ist also tatsächlich ein Homomorphismus, und der Satz ist damit vollständig bewiesen.

Die oben in der Menge der maximalen Ideale definierte Topologie ist im Sinne des folgenden Satzes die einzig mögliche.

Theorem 3. *Es sei $\mathfrak{M}'$ die Menge aller maximalen Ideale einer Algebra R, die in einer Weise topologisiert ist, daß folgendes gilt:*

a) *$\mathfrak{M}'$ ist bikompakt;*

b) *alle Funktionen $x(M)$, die den Elementen der Algebra R entsprechen, sind auf $\mathfrak{M}'$ stetig.*

Dann ist $\mathfrak{M}'$ dem oben definierten Raum $\mathfrak{M}$ homöomorph. Dieser Satz folgt unmittelbar aus § 2, Nr. 7, Satz VI (vgl. auch § 2, Nr. 11, Satz II).

Beispiel. Wir betrachten den Raum $\mathfrak{M}$ aller maximalen Ideale der Algebra $C(T)$ (Beispiel 2 in Nr. 2). Zwischen den Punkten $t \in T$ und den Idealen $M \in \mathfrak{M}$ besteht die umkehrbar eindeutige Zuordnung $t_0 \to M_{t_0}$. Wir führen in der Gesamtheit der maximalen Ideale von $C(T)$ eine Topologie ein, indem wir als Umgebungen der Ideale die Bilder der Umgebungen des Raumes T bei dieser Zuordnung definieren. Dann erhalten wir einen topologischen Raum $\mathfrak{M}'$, der dem Raum T homöomorph ist. Hierbei gehen die Funktionen $x(t) \in C(T)$ in Funktionen $x(M)$ über, die auf $\mathfrak{M}'$ stetig sind. Nach Theorem 3 sind die Räume $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{M}$ und damit auch T und $\mathfrak{M}$ homöomorph. Es gilt also:

Der Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale der Algebra $C(T)$ aller stetigen Funktionen über einem bikompakten Raum C ist dem Raum T homöomorph.

Kombiniert man Theorem 2 mit den in Nr. 2 gefundenen Ergebnissen, so gelangt man zu

Theorem 4. *Für jede* BANACH*sche kommutative Algebra R mit Einselement ist die Zuordnung $x \to x(M)$ ein Homomorphismus von R auf eine Algebra von stetigen Funktionen über einem bikompakten Raum, wobei der Kern dieses Homomorphismus mit dem Radikal von R übereinstimmt. Ist insbesondere R eine halbeinfache Algebra, so ist R einer Algebra von stetigen Funktionen über einem bikompakten Raum isomorph.*

Ist die Algebra R selbst schon eine Algebra von stetigen Funktionen über einem topologischen Raum T (zu R brauchen nicht alle stetigen Funktionen über T zu gehören), so bestimmt jeder Punkt $t_0 \in T$ ein maximales Ideal M_{t_0} von R in Gestalt der Gesamtheit aller Funktionen $x(t)$ von R, die im Punkt t_0 verschwinden. Hierbei kann sich herausstellen, daß verschiedene Punkte t_0 ein und dasselbe maximale Ideal bestimmen. Folglich kann der Übergang zu den maximalen Idealen zu einer „Verheftung" der Punkte des Raumes T führen.

Außerdem kann der Fall eintreten, daß nicht jedes maximale Ideal der Algebra R sich durch einen Punkt des Raumes T bestimmen läßt, so daß der Übergang zu den maximalen Idealen auch zu einer Erweiterung des Ausgangsraumes führen kann.

Wir wollen dies an Beispielen erläutern.

a) In der Algebra W der absolut konvergenten trigonometrischen Reihen $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$, die im Intervall $(-\infty, \infty)$ definiert sind, erzeugt jede reelle Zahl t_0 ein maximales Ideal, die Gesamtheit aller $x(t)$, die für $t = t_0$ verschwinden. Zwei verschiedene Zahlen t_1 und t_2 bestimmen genau dann ein und dasselbe maximale Ideal, wenn $t_1 - t_2$ ein Vielfaches von 2π ist. Daher bedeutet der Übergang zu den maximalen Idealen in diesem Fall, daß alle Punkte, die sich um ein Vielfaches von 2π voneinander unterscheiden, miteinander verheftet werden. Der Raum der maximalen Ideale der Algebra W ist dann einer Kreislinie homöomorph, d. h. dem natürlichen Definitionsbereich der Funktionen von W.

b) Es bezeichne A die Gesamtheit aller Funktionen $x = x(\zeta)$, die im Kreis $|\zeta| < 1$ regulär und auf $|\zeta| \leqq 1$ stetig sind. In A sei durch

$$|x| = \sup_{|\zeta| \leqq 1} |x(\zeta)|$$

eine Norm erklärt, die Operationen seien wie üblich definiert. Wir suchen die maximalen Ideale in A. Jeder Punkt ζ_0 von $|\zeta| \leqq 1$ erzeugt gewiß ein maximales Ideal in A, nämlich die Gesamtheit aller Funktionen $x(\zeta)$ von A, die für $\zeta = \zeta_0$ verschwinden. Umgekehrt wird auch jedes maximale Ideal in A auf diese Weise von einem Punkt des Kreises $|\zeta| \leqq 1$

erzeugt. Um dies einzusehen, betrachten wir irgendein maximales Ideal M_0 und die Zahl ζ_0, in welche die Funktion $x_0(\zeta) = \zeta$ bei dem Homomorphismus $x \to x(M_0)$ übergeht. Da $|x_0| = 1$ ist, muß $|\zeta_0| \leqq 1$ sein. Für ein beliebiges Polynom $x(\zeta) = c_0 + c_1\zeta + \cdots + c_n\zeta^n$ gilt $x(M_0) = c_0 + c_1\zeta_0 + \cdots + c_n\zeta_0^n = x(\zeta_0)$. Nun sind aber alle Funktionen von A Grenzwerte von Folgen solcher Polynome, die auf $|\zeta| \leqq 1$ gleichmäßig (d. h. im Sinne der in A erklärten Norm) konvergieren. Folglich gilt $x(M_0) = x(\zeta_0)$ für jede Funktion $x(\zeta) \in A$, so daß das maximale Ideal M_0 von dem Punkt ζ_0 erzeugt wird. Die Gleichung $x(M_0) = x(\zeta_0)$ bedeutet, daß die maximalen Ideale mit den entsprechenden Punkten des Kreises $|\zeta| \leqq 1$ identifiziert werden können.

Jetzt bezeichne $x^\wedge(\zeta)$ die nur auf der Kreisperipherie $|\zeta| = 1$ betrachtete Funktion $x(\zeta)$ der Algebra A. Wir erhalten auf diese Weise eine Algebra von Funktionen, die auf $|\zeta| = 1$ definiert sind. Diese werde mit $A^\wedge$ bezeichnet. Wir behaupten, $A^\wedge$ und A sind isomorph. Gewiß ist die Zuordnung $x \to x^\wedge$ ein Homomorphismus. Sein Kern besteht aus den analytischen Funktionen $x(\zeta)$, die auf $|\zeta| = 1$ verschwinden. Da diese aber identisch gleich Null sind, ist dieser Homomorphismus ein Isomorphismus.

In $A^\wedge$ werde durch

$$|x^\wedge| = \sup_{|\zeta| = 1} |x^\wedge(\zeta)|$$

eine Norm erklärt. Auf Grund des Maximumprinzips stimmt diese mit

$$|x| = \sup_{|\zeta| \leqq 1} |x(\zeta)|,$$

überein, so daß der Isomorphismus $x \to x^\wedge$ die Norm invariant läßt. Daher lassen sich die maximalen Ideale der Algebra $A^\wedge$ auch durch die Punkte des Kreises $|\zeta| \leqq 1$ beschreiben, obgleich $A^\wedge$ aus Funktionen besteht, die nur auf der Peripherie $|\zeta| = 1$ gegeben sind. Somit ist der gesamte Kreis $|\zeta| \leqq 1$ und nicht nur seine Peripherie $|\zeta| = 1$ der natürliche Definitionsbereich der Funktionen der Algebra $A^\wedge$.

Demnach kann der Übergang vom Raum T zum Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale tatsächlich dazu führen, daß

1. Punkte des Raumes T miteinander verheftet werden und
2. neue Elemente zum Raum T hinzutreten.

Eine Algebra R heiße *antisymmetrisch*, wenn aus $x(M) \in R$ und $\overline{x(M)} \in R$ folgt, daß $x = \lambda e$ ist. Als Beispiel für eine solche Algebra kann die soeben betrachtete Algebra A dienen. Eines der wichtigsten und bis jetzt ungelösten Probleme ist die Untersuchung der antisymmetrischen Algebren, insbesondere die Untersuchung des Raumes ihrer maximalen Ideale.

4. Algebren ohne Einselement. Es sei R eine Banachsche kommutative Algebra ohne Einselement und R' die aus R durch Adjunktion eines Einselements hervorgehende Algebra. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ die Gesamtheit der maximalen regulären Ideale M von R und mit $\mathfrak{M}'$ die Gesamtheit der maximalen Ideale M' von R'. Ferner sei $\mathfrak{M}'_0$ die aus $\mathfrak{M}'$ durch Weglassen des Ideals $M'_0 = R$ der Algebra R' entstehende Menge. Da $\mathfrak{M}'$ bikompakt ist, ist $\mathfrak{M}'_0$ lokal bikompakt. Andererseits gibt es eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Idealen $M \in \mathfrak{M}$ und den Idealen $M' \in \mathfrak{M}'_0$ (vgl. § 7, Nr. 4, Satz VI). Mit Hilfe dieser Zuordnung läßt sich die in $\mathfrak{M}'_0$ erklärte Topologie auf $\mathfrak{M}$ übertragen. Dann ist $\mathfrak{M}$ ein lokal bikompakter Raum, der aus den maximalen regulären Idealen der Algebra R besteht. Ist hierbei $x \in R$, so gilt $x(M'_0) = 0$.

Dies bedeutet, daß die Funktionen $x(M')$, $x \in R$, als Funktionen $x(M)$ betrachtet werden können, die der Bedingung

$$\lim_{M \to \infty} x(M) = 0 \tag{1}$$

genügen. Demzufolge können unsere obigen Resultate auf BANACHsche kommutative Algebren ohne Einselement übertragen werden, wenn man anstelle des Raumes der maximalen Ideale den lokal bikompakten Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen regulären Ideale und anstelle beliebiger stetiger Funktionen nur solche Funktionen betrachtet, die über $\mathfrak{M}$ stetig sind und der Bedingung (1) genügen. Insbesondere gilt der Satz:

Jede halbeinfache BANACH*sche kommutative Algebra ohne Einselement ist einer Algebra von Funktionen isomorph, die auf einem lokal bikompakten Raum $\mathfrak{M}$ definiert sind und der Bedingung* (1) *genügen.*

Die Übertragung der früheren Ergebnisse sowie der weiteren Ergebnisse dieses Kapitels im einzelnen sei dem Leser überlassen (vgl. hierzu LOOMIS [1]).

5. Erzeugendensysteme einer Algebra. Eine Menge K von Elementen einer BANACHschen Algebra R werde ein *Erzeugendensystem* dieser Algebra genannt, wenn die kleinste abgeschlossene Teilalgebra mit Einselement, welche die Menge K enthält, mit R übereinstimmt. Hierbei soll das Einselement nicht zu den Erzeugenden gezählt werden.

Theorem 5. *Die Gesamtheit aller Umgebungen $U(M; y_1, \ldots, y_n; \varepsilon)$, die entstehen, wenn jedes y_k sämtliche Elemente eines Erzeugendensystems K von R durchläuft, ist eine Umgebungsbasis im Raum der maximalen Ideale der Algebra R.*

Beweis. Zu zeigen ist, daß jede Umgebung $U(M_0; x_1, \ldots, x_m; \varepsilon)$ eine Umgebung

$$U(M_0;\ y_1, \ldots, y_n;\ \delta)$$

enthält. Auf Grund der Definition des Erzeugendensystems gibt es zunächst Polynome

$$p_k = p_k(y_1, \ldots, y_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, m)$$

in endlich vielen Elementen $y_j \in K$, die sich von den x_k bezüglich der Norm um weniger als $\frac{\varepsilon}{3}$ unterscheiden:

$$|x_k - p_k| < \frac{\varepsilon}{3} \qquad (k = 1, 2, \ldots, m).$$

Da $p_k(M) = p_k(y_1(M), \ldots, y_n(M))$ eine stetige Funktion von $y_1(M), \ldots, y_n(M)$ ist, gibt es eine Zahl $\delta > 0$, für die

$$U(M_0;\ y_1, \ldots, y_n;\ \delta) \subset U\left(M_0;\ p_1, \ldots, p_m;\ \frac{\varepsilon}{3}\right)$$

gilt. Für alle $M \in U(M_0; y_1, \ldots, y_n; \delta)$ ist dann

$$|p_k(M) - p_k(M_0)| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Die Umgebung $U(M_0; y_1, \ldots, y_n; \delta)$ ist nun aber in $U(M_0; x_1, \ldots, x_m; \varepsilon)$ enthalten, weil für alle $M \in U(M_0; y_1, \ldots, y_n; \delta)$ und $k = 1, 2, \ldots, n$ die Abschätzung

$$\begin{aligned} |x_k(M) - x_k(M_0)| &\leqq |x_k(M) - p_k(M)| + |p_k(M) - p_k(M_0)| \\ &\quad + |p_k(M_0) - x_k(M_0)| \\ &\leqq |x_k - p_k| + \frac{\varepsilon}{3} + |x_k - p_k| < 3 \cdot \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon \end{aligned}$$

gilt. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten jetzt den Fall, daß die Algebra R ein endliches Erzeugendensystem hat, d. h., daß es ein aus endlich vielen Elementen bestehendes Erzeugendensystem von R gibt.

Theorem 6. *Hat die Algebra R ein endliches Erzeugendensystem aus n Elementen, so ist der Raum $\mathfrak{M}$ ihrer maximalen Ideale einer abgeschlossenen beschränkten Teilmenge des n-dimensionalen komplexen Raumes C^n isomorph.*

Beweis. Das Erzeugendensystem bestehe aus den Elementen $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Die Funktionen $y_1(M), y_2(M), \ldots, y_n(M)$ bilden $\mathfrak{M}$ eindeutig und stetig auf eine Teilmenge $\mathfrak{M}'$ des n-dimensionalen komplexen Raumes ab. Wir werden zeigen, daß diese Abbildung sogar eineindeutig ist. Wegen der Bikompaktheit des Raumes $\mathfrak{M}$ folgt hieraus dann die Behauptung (vgl. § 2, Nr. 7, Satz IV).

Angenommen, es gäbe zwei Punkte $M_1, M_2 \in \mathfrak{M}$, die in ein und denselben Punkt des Raumes $\mathfrak{M}$ abgebildet werden. Dann müßte

$$y_k(M_1) = y_k(M_2) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

sein. Für jedes Polynom $p = p(y_1, \ldots, y_n)$ wäre also

$$p(M_1) = p(M_2),$$

und da die Polynome $p(y_1, \ldots, y_n)$ eine in R dichte Menge bilden, wäre auch $x(M_1) = x(M_2)$ für alle $x \in R$, woraus auf Grund der Eigenschaft f) aus Satz I in Nr. 2, entgegen der Annahme, $M_1 = M_2$ folgen würde.

Aus Theorem 6 folgt insbesondere: *Ist R eine Algebra mit einem aus einem einzigen Element bestehenden Erzeugendensystem, so ist $\mathfrak{M}$ einer abgeschlossenen beschränkten Teilmenge der komplexen Ebene homöomorph.*

6. Analytische Funktionen von Elementen einer Algebra. Eine Banachsche Algebra R mit Einselement enthält mit einem Element x stets auch alle Polynome $p(x) = c_0 e + c_1 x + \cdots + c_n x^n$ und darüber hinaus alle Funktionen $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$, für die $f(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \zeta^n$ eine ganze Funktion der komplexen Veränderlichen ζ ist. Zum Beweis braucht man nur zu berücksichtigen, daß die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n x^n|$ im Fall einer ganzen Funktion $f(\zeta)$ die konvergente Majorante $\sum_{n=0}^{\infty} |c_n|\,|x|^n$ hat; denn hieraus folgt sofort die absolute Konvergenz der Reihe

$\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ gegen ein Element der Algebra R. Dieses Element werde mit $f(x)$ bezeichnet und *ganze analytische Funktion f des Elements $x \in R$* genannt.

Andererseits entspricht der Funktion $f(\zeta) = \frac{1}{\zeta}$, die nur in $\zeta = 0$ einen Pol hat, genau dann ein Element $f(x) = x^{-1}$ der Algebra R, wenn $x(M)$ für kein M gleich Null ist, d. h., wenn die Polstelle $\zeta = 0$ nicht zum Spektrum des Elements x gehört.

Wir wollen zeigen, daß sich die entsprechende Konstruktion auch für andere analytische Funktionen durchführen läßt. Hierzu bezeichne x irgendein Element der Algebra R und $f(\zeta)$ eine Funktion, die in einem beschränkten Gebiet D, das in seinem Inneren das Spektrum S_x des Elements x enthält, holomorph ist. Wir setzen

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\zeta e - x)^{-1} f(\zeta)\, d\zeta, \tag{1}$$

wobei Γ eine rektifizierbare JORDAN-Kurve in D sei, in derem Inneren S_x liege (dann hat Γ von S_x einen positiven Abstand). Das so definierte Element $f(x)$ der Algebra R hängt nicht von der speziellen Wahl einer solchen Kurve Γ ab, weil die Vektorfunktion $\frac{1}{2\pi i}(\zeta e - x)^{-1} f(\zeta)$ in $D - S_x$ holomorph ist und für holomorphe Vektorfunktionen der CAUCHYsche Integralsatz gilt. Wir sagen, *die analytische Funktion $f(\zeta)$ sei auf das Element $x \in R$ anwendbar*, wenn $f(\zeta)$ auf S_x und damit auch in einem beschränkten Gebiet, das S_x umschließt, holomorph ist. Aus dem oben Gesagten folgt, daß durch die Formel (1) für jede auf das Element x anwendbare analytische Funktion $f(\zeta)$ ein Element $f(x)$ der Algebra definiert wird.

Theorem 7. *Es sei F_x die Gesamtheit aller analytischen Funktionen $f(\zeta)$, die auf das Element $x \in R$ anwendbar sind. Dann hat die Zuordnung $f(\zeta) \to f(x)$ zwischen den Funktionen $f \in F_x$ und den Elementen $f(x)$ folgende Eigenschaften:*

1. *Aus $f(\zeta) \equiv 1$ folgt $f(x) = e$;*
2. *aus $f(\zeta) = \zeta$ folgt $f(x) = x$;*
3. *aus $f(\zeta) = \alpha_1 f_1(\zeta) + \alpha_2 f_2(\zeta)$ folgt $f(x) = \alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)$;*
4. *aus $f(\zeta) = f_1(\zeta) f_2(\zeta)$ folgt $f(x) = f_1(x) f_2(x)$;*
5. *konvergiert die Folge $f_n(\zeta)$ in einem Gebiet D, das S_x ganz im Inneren enthält, gleichmäßig gegen $f(\zeta)$, so konvergiert die Folge $\{f_n(x)\}$ im Sinne der Norm gegen $f(x)$.*

Beweis. Die Funktionen $f(\zeta) = 1$ und $f(\zeta) = \zeta$ sind in der ganzen komplexen Ebene regulär. Folglich kann man im Fall $f(\zeta) = 1$ bzw. $f(\zeta) = \zeta$ für Γ jeden Kreis mit dem Mittelpunkt im Ursprung und hinreichend großem Radius nehmen. Auf diesem Kreis gilt nun aber

$$(\lambda e - x)^{-1} = \lambda^{-1} e + \lambda^{-2} x + \lambda^{-3} x^2 + \cdots.$$

Daher ist für $f(\zeta) \equiv 1$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} (\lambda^{-1} e + \lambda^{-2} x + \lambda^{-3} x^2 + \cdots)\, d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma} \lambda^{-1} e\, d\lambda = e$$

und für $f(\zeta) = \zeta$

$$f(x) = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda(\lambda^{-1}e + \lambda^{-2}x + \lambda^{-3}x^2 + \cdots)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma \lambda^{-1} x\,d\lambda = x.$$

Die Behauptung 3 ist offenbar trivialerweise erfüllt. Um die Gültigkeit der Eigenschaft 4 nachzuweisen, beachten wir zunächst, daß sie, ausführlich geschrieben, folgendes bedeutet. Für in $D \supset S_x$ holomorphe Funktionen $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$ gilt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} f_1(\lambda) f_2(\lambda)\,d\lambda \\ &\quad = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} f_1(\lambda)\,d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} f_2(\lambda)\,d\lambda. \end{aligned} \tag{2}$$

Wird im zweiten Integral der rechten Seite für Γ eine Kurve Γ_1 genommen, die in D enthalten ist und in deren Innerem Γ liegt, so bekommt die rechte Seite von (2) die Gestalt

$$\begin{aligned} &\frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} f_1(\lambda)\,d\lambda \cdot \frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} (\mu e - x)^{-1} f_2(\mu)\,d\mu \\ &\quad = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_\Gamma \oint_{\Gamma_1} (\lambda e - x)^{-1} (\mu e - x)^{-1} f_1(\lambda) f_2(\mu)\,d\lambda\,d\mu \\ &\quad = -\frac{1}{4\pi^2} \oint_\Gamma \oint_{\Gamma_1} \frac{f_1(\lambda) f_2(\mu)}{\mu - \lambda} [(\lambda e - x)^{-1} - (\mu e - x)^{-1}]\,d\lambda\,d\mu \\ &\quad = \frac{1}{2\pi i} \oint_\Gamma (\lambda e - x)^{-1} f_1(\lambda) \left(\frac{1}{2\pi i} \oint_{\Gamma_1} \frac{f_2(\mu)\,d\mu}{\mu - \lambda} \right) d\lambda \\ &\qquad + \frac{1}{4\pi^2} \oint_{\Gamma_1} (\mu e - x)^{-1} f_2(\mu) \left(\oint_\Gamma \frac{f_1(\lambda)\,d\lambda}{\mu - \lambda} \right) d\mu. \end{aligned}$$

Da die Funktion $\frac{f_1(\lambda)}{\mu - \lambda}$ auf und innerhalb Γ holomorph ist, verschwindet der zweite Summand. Andererseits ist das innere Integral im ersten Summanden gleich $f_2(\lambda)$. Damit ist (2) bewiesen.

Um die Behauptung 5 nachzuweisen, bezeichnen wir mit D ein Gebiet, das S_x ganz im Inneren enthält, und betrachten eine Folge von Funktionen $f_n(\zeta)$, die in D holomorph sind und dort gleichmäßig gegen $f(\zeta)$ konvergieren, so daß

$$\max_{\lambda \in D} |f(\lambda) - f_n(\lambda)| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Ist nun Γ eine geschlossene Kurve aus D, die S_x im Inneren enthält, so folgt

$$|f(x)-f_n(x)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma [f(\lambda)-f_n(\lambda)](\lambda e - x)^{-1} d\lambda\right|$$

$$\leqq \max_{\lambda\in D}|f(\lambda)-f_n(\lambda)|\frac{1}{2\pi}\oint_\Gamma |(\lambda e - x)^{-1}||d\lambda| \to 0 \quad \text{für} \quad n\to\infty.$$

Bemerkung. Man kann zeigen (vgl. GELFAND, RAIKOW und SCHILOW [1]), daß jede Zuordnung $f(\zeta)\to f(x)$, $f\in F_x$, die den Bedingungen 1 bis 5 von Theorem 7 genügt, notwendigerweise durch die Formel (1) gegeben wird.

Folgerung. *Ist die Funktion $f(\zeta)$ in einem offenen Gebiet D, das alle Werte der Funktion $x(M)$ enthält, holomorph, so gibt es in der Algebra R ein Element y derart, daß $y(M) = f(x(M))$ für alle maximalen Ideale M gilt.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $f(\zeta)\in F_x$, weil S_x auch gleich der Gesamtheit aller Werte der Funktion $x(M)$ ist (vgl. Satz III in Nr. 2). Es gibt in der Algebra R also ein Element $y = f(x)$, und hierbei gilt

$$y = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma f(\lambda)(\lambda e - x)^{-1} d\lambda, \tag{3}$$

wobei Γ eine geschlossene rektifizierbare JORDAN-Kurve ist, die ganz im Regularitätsgebiet von $f(\zeta)$ liegt und S_x in ihrem Inneren enthält.

Da die Zuordnung $x\to x(M)$ ein stetiger Homomorphismus ist und das Integral auf der rechten Seite von (3) im Sinne der Norm konvergiert, folgt aus (3)

$$y(M) = \frac{1}{2\pi i}\oint_\Gamma \frac{f(\lambda)}{\lambda - x(M)} d\lambda = f(x(M)).$$

Hieraus ergibt sich als Spezialfall der anschließend formulierte Satz von P. LÉVY [1], eine Verallgemeinerung des auf S. 207 bewiesenen WIENERschen Satzes.

Wenn die FOURIERsche Reihe einer Funktion $x(t)$ absolut konvergiert und sämtliche Werte dieser Funktion in einem Kreis $|\zeta-\zeta_0|\leqq\varrho$ liegen, so konvergiert die FOURIERsche Reihe der mit einer beliebigen Funktion $f(\zeta)$, die in allen Punkten dieses Kreises holomorph ist, gebildete Funktion $y(t) = f(x(t))$ ebenfalls absolut.

In der Tat, $x(t)$ ist ein Element der Algebra W, wobei $x(M) = x(t)$ gilt, wenn M das durch den Punkt t erzeugte Ideal bezeichnet. Es gibt also in W ein Element $y = f(x)$. Dies bedeutet aber, daß $y(t) = y(M) = f(x(M)) = f(x(t))$ ebenfalls in eine absolut konvergente FOURIERsche Reihe entwickelt werden kann.

Eine andere Anwendung der Folgerung aus Theorem 7 ergibt sich, wenn für R die Gesamtheit aller im Kreis $|\zeta|\leqq 1$ definierten Funktionen $x(\zeta) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n\zeta^n$ mit $\sum_{n=0}^{\infty}|c_n| < \infty$ betrachtet wird. Dabei sollen als Grundoperationen die entsprechenden Operationen mit den Funktionen genommen werden, während die Norm $|x|$ durch $|x| = \sum_{n=0}^{\infty}|c_n|$ definiert sei. Wiederholt man die Überlegungen von S. 211, so erkennt man, daß durch $x(M) = x(\zeta_0)$ eine eineindeutige Zuordnung zwischen den maximalen Idealen M der Algebra R einer-

seits und den Punkten ζ des Kreises $|\zeta| \leqq 1$ andererseits vermittelt wird. Wendet man nun die Folgerung aus Theorem 7 an, so ergibt sich der Satz:

Ist die MACLAURIN*sche Reihe einer Funktion $x(\zeta)$ im Kreis $|\zeta| \leqq 1$ absolut konvergent und liegen alle Werte dieser Funktion im Inneren eines beschränkten Gebietes D, so ist die* MACLAURIN*sche Reihe der mit einer beliebigen in D holomorphen Funktion $f(z)$ gebildete mittelbare Funktion $f(x(\zeta))$ ebenfalls im Kreis $|\zeta| \leqq 1$ absolut konvergent.*

Es gibt in R nämlich ein Element y mit

$$y(\zeta) = y(M) = f(x(M)) = f(x(\zeta)).$$

7. Analytische Funktionen von mehreren Elementen einer Algebra. Der Begriff der analytischen Funktion eines Elements einer Algebra wurde von G. E. SCHILOW [18] folgendermaßen verallgemeinert.

Es sei R eine vollständige normierte kommutative Algebra mit Einselement und dem endlichen Erzeugendensystem $\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$. Der Raum M der maximalen Ideale dieser Algebra kann, wie in Nr. 5 gezeigt wurde, mit einer abgeschlossenen Teilmenge des n-dimensionalen komplexen Raumes C^n identifiziert werden; hierzu ordnet man jedem maximalen Ideal $M \in \mathfrak{M}$ den Punkt $\{x_1(M), \ldots, x_n(M)\} \in C^n$ zu.

Theorem 8. *Zu jeder in einem Gebiet $G \supset \mathfrak{M}$ analytischen Funktion $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ gibt es ein Element $y \in R$ mit der Eigenschaft, daß $y(M) = f(x_1(M), \ldots, x_n(M))$ für alle $M \in \mathfrak{M}$* ist.

Das Element $y \in R$ wird mit $f(x_1, \ldots, x_n)$ bezeichnet und analytische Funktion f der Elemente $x_1, \ldots, x_n$ genannt.

Der Beweis dieses Satzes beruht auf dem Begriff des WEILschen Gebietes. Unter einem WEIL*schen Gebiet* des Raumes C^n versteht man eine Menge, die durch endlich viele Ungleichungen der Gestalt

$$|P_\nu(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| < 1 \qquad (\nu = 1, 2, \ldots, N)$$

beschrieben wird, wobei die $P_\nu(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ Polynome in $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ sind. Es läßt sich zeigen, daß es ein WEILsches Gebiet gibt, das in G enthalten ist und $\mathfrak{M}$ enthält, und daß sich eine in G analytische Funktion $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ auf der Menge $\mathfrak{M}$ in der Gestalt

$$f(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \frac{1}{(2\pi i)^n} \sum_{i_1, i_2, \ldots, i_n} \int\limits_{\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n}} \frac{f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \det \|Q_{i_k j}\|}{\prod\limits_{\nu=1}^{n} [P_{i_\nu}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - P_{i_\nu}(\tau_1, \ldots, \tau_n)]} \, d\lambda_1 \cdots d\lambda_n \quad (1)$$

darstellen läßt; hierbei bezeichnen die $Q_{\mu\nu}$ die durch die Beziehungen

$$P_\mu(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - P_\mu(\tau_1, \ldots, \tau_n) = \sum_\nu (\lambda_\nu - \tau_\nu) Q_{\mu\nu}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n; \tau_1, \ldots, \tau_n)$$

definierten Polynome, die $\sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ sind die passend zu orientierenden, durch die Gleichungen

$$|P_{i_1}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| = 1, \ \ldots, \ |P_{i_n}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)| = 1$$

definierten Mannigfaltigkeiten in C^n, während die Summe über alle Kombinationen $i_1, i_2, \ldots, i_n$ der Zahlen $1, 2, \ldots, N$ zu erstrecken ist.

Das Element $y \in R$ ergibt sich, wenn auf der rechten Seite der Formel (1) die $\tau_1, \ldots, \tau_n$ durch $x_1, \ldots, x_n$ ersetzt werden. Der Integrand gehört dann zur Algebra R und ist eine im Sinne der Norm von R stetige Funktion der $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$, weil sein Zähler ein Polynom in $x_1, \ldots, x_n$ ist und

$$[P_{i_\nu}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - P_{i_\nu}(x_1, \ldots, x_n)]^{-1}$$

in R existiert. Dies folgt aus der Tatsache, daß die Funktion

$$P_{i_\nu}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) - P_{i_\nu}(x_1, \ldots, x_n)$$

der Veränderlichen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ für $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\} \in \sigma_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ auf ganz $\mathfrak{M}$, d. h. für alle maximalen Ideale der Algebra R, von Null verschieden ist. Also ergibt sich durch die Integration nach $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ und die Summation über $i_1, i_2, \ldots, i_n$ ein ebenfalls zu R gehörendes Element. Da der Homomorphismus $R \to R/M$ stetig ist, folgt schließlich

$$y(M) = f(x_1(M), \ldots, x_n(M)).$$

Die Frage, ob dieses SCHILOWsche Ergebnis auf Algebren mit beliebig vielen Erzeugenden übertragen werden kann, ist noch nicht beantwortet.

Der Begriff der analytischen Funktion wurde von LORCH [2] auf Funktionen übertragen, deren Definitionsbereich und Wertevorrat zu einer Algebra R gehören. Derartige Funktionen wurden von LORCH [2] und von BLUM [1] untersucht.

Der Fall der Algebra aus sämtlichen beschränkten rationalen Funktionen eines beschränkten linearen Operators in einem BANACHschen Raum wurde von TOMITA [4] betrachtet.

Der Begriff der analytischen Funktion von mehreren Elementen einer Algebra wurde später von WAELBROECK [1] auf topologische Algebren mit stetigen Inversen übertragen.

Der von WAELBROECK eingeführte Begriff läßt sich wie folgt auf die Untersuchung der Struktur topologischer Algebren mit stetigen Inversen anwenden. WAELBROCK versteht unter dem *Spektrum* $S(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ *eines Systems von Elementen* $x_1, x_2, \ldots, x_n \in R$ die Gesamtheit aller Systeme von komplexen Zahlen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, für die $P(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ für alle Polynome P in n Veränderlichen zum Spektrum des Elements $P(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ gehört. Weiter nennt WAELBROECK eine Teilmenge $\{x_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, von R ein *System von analytischen Erzeugenden* der Algebra R, wenn jedes Element $x \in R$ eine analytische Funktion von endlich vielen Elementen x_α ist.

Nun sei $\mathscr{H}(S(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}))$ die Algebra aller auf $S(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})$ definierten analytischen Funktionen mit der Topologie, die der im Beispiel 1 aus § 8, Nr. 3, betrachteten Topologie analog ist. Ferner sei H der induktive Limes[1]) der Algebren $\mathscr{H}(S(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n}))$. Ist hierbei in H das Trennungsaxiom nicht erfüllt, so wird H durch eine Quotientenalgebra ersetzt. Diese bzw. deren vollständige Hülle, falls sie selbst nicht vollständig ist, nennt WAELBROECK die *Algebra der analytischen Funktionen* über dem Spektrum $\mathfrak{M}$ der Algebra R, das als projektiver Limes der Spektren $S(x_{\alpha_1}, \ldots, x_{\alpha_n})$ definiert ist. $\mathfrak{M}$ erweist sich als identisch mit dem Raum der maximalen Ideale der Algebra R, der in derselben Weise topologisiert wird wie im Fall einer normierten Algebra.

Eines der wichtigsten Ergebnisse von WAELBROECK lautet:

Jede vollständige kommutative Algebra R mit stetigen Inversen ist isomorph der Quotientenalgebra der Algebra der analytischen Funktionen über dem Spektrum $\mathfrak{M}$ von R nach dem abgeschlossenen Ideal der Funktionen, die auf $\mathfrak{M}$ gleich Null sind.

8. Zerlegung einer Algebra in die direkte Summe von Idealen. Es sei R eine vollständige normierte kommutative Algebra mit Einselement und $\mathfrak{M}$ der Raum ihrer maximalen Ideale. Man nennt R die *direkte Summe der Ideale* I_1 *und* I_2 ($I_1, I_2 \subset R$) und schreibt $R = I_1 \dotplus I_2$, wenn folgendes gilt: 1. $I_1 \cap I_2 = (0)$; 2. jedes Element $x \in R$ läßt sich als Summe $x = x_1 + x_2$ darstellen, wobei $x_1 \in I_1$ und $x_2 \in I_2$ ist.

---

[1]) Es sei $\{F_\alpha\}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, eine gerichtete Menge lokal konvexer Räume und E ein Vektorraum, in dem zunächst keine Topologie definiert ist. Weiter sei zu jedem α eine lineare Abbildung g_α des Raumes F_α in E gegeben, wobei $g_\alpha(F_\alpha) \subset g_\beta(F_\beta)$ für $\alpha < \beta$ und $\bigcup g_\alpha(F_\alpha) = E$ sei. Der Raum E mit der stärksten lokal konvexen Topologie, für die noch alle Funktionen g_α stetig sind, heißt *induktiver Limes* der Räume F_α.

Aus 1 folgt, daß die in 2 geforderte Darstellung jedenfalls eindeutig ist.

Nun sei $R = I_1 \dotplus I_2$ die direkte Summe der Ideale $I_1, I_2 \subset R$. Wendet man die Bedingung 2 auf das Einselement e von R an, so ergibt sich $e = e_1 + e_2$, $e_1 \in I_1$, $e_2 \in I_2$, wobei $e_1 e_2 \in I_1 \cap I_2 = (0)$, also $e_1 e_2 = 0$ und daher $e_1 + e_2 = e = e^2 = e_1^2 + e_2^2$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ ist. Außerdem gilt $e_1 I_2 \subset I_1 \cap I_2 = (0)$, so daß $e_1 I_2 = (0)$ sein muß. Entsprechend gilt $e_2 I_1 = (0)$.

Hieraus schließt man leicht, daß

$$I_1 = \{x \in R : e_1 x = x\} \quad \text{und} \quad I_2 = \{x \in R : e_2 x = x\} \tag{1}$$

ist. Folglich sind I_1, I_2 abgeschlossene Ideale, wobei e_1 bzw. e_2 in den Algebren I_1 bzw. I_2 die Rolle der Einselemente spielen.

Gibt es in R von Null verschiedene Elemente e_1 und e_2, die den Bedingungen $e = e_1 + e_2$, $e_1^2 = e_1$, $e_2^2 = e_2$ und $e_1 e_2 = 0$ genügen, so werden durch (1), wie man leicht sieht, abgeschlossene Ideale I_1, I_2 definiert, und für diese gilt $R = I_1 \dotplus I_2$. Letzteres folgt aus der Gleichung $x = xe = xe_1 + xe_2$.

Da $e_1^2 = e_1$ und $e_2^2 = e_2$ ist, nehmen die Funktionen $e_1(M)$ und $e_2(M)$ nur die Werte 0 und 1 an, wobei

$$e_1(M) + e_2(M) = 1 \quad \text{und} \quad e_1(M)\, e_2(M) = 0$$

ist.

Wird also

$$F_1 = \{M : e_1(M) = 1\} \quad \text{und} \quad F_2 = \{M : e_2(M) = 1\}$$

gesetzt, so folgt, daß sich $\mathfrak{M}$ als Vereinigung der beiden abgeschlossenen disjunkten Mengen F_1 und F_2 darstellen läßt und daher nicht zusammenhängend ist.

Ordnen wir jedem $x \in I_1$ die Zahl $x(M)$, $M \in F_1$, zu, so erhalten wir einen Homomorphismus der Algebra I_1 auf den Körper der komplexen Zahlen und damit ein Ideal M_1 der Algebra I_1. Wie man leicht sieht, ist die Zuordnung $M \to M_1$ eine Homöomorphie von F_1 auf den Raum $\mathfrak{M}(I_1)$ der maximalen Ideale der Algebra I_1. Genauso ist F_2 dem entsprechenden Raum $\mathfrak{M}(I_2)$ homöomorph. Es gilt also: *Ist $R = I_1 \dotplus I_2$, so ist $\mathfrak{M}$ die Vereinigung von zwei abgeschlossenen elementfremden Mengen, nämlich der Räume der maximalen Ideale von I_1 bzw. I_2.*

G. E. Schilow [18] bewies mit Hilfe seiner Theorie der analytischen Funktionen von mehreren Elementen einer Algebra (vgl. Nr. 7), daß auch die Umkehrung gilt:

Ist die Menge $\mathfrak{M}$ nicht zusammenhängend, so läßt sich R in die direkte Summe von Idealen in R zerlegen.

9. Primäre Ideale. Es sei R eine vollständige normierte kommutative Algebra mit Einselement. Ein abgeschlossenes Ideal I in R werde *primär* genannt, wenn es in nur einem einzigen maximalen Ideal der Algebra R enthalten ist.

Geht man zur Restklassenalgebra R/I über, so bedeutet diese Bedingung, daß es in R/I nur ein maximales Ideal gibt. Dieses stimmt dann mit dem Radikal der Algebra R/I überein. Dies bedeutet, daß jedes Element der Algebra R/I, das kein Inverses hat, im Radikal dieser Algebra enthalten ist.

Bei der Untersuchung der primären Ideale stützt man sich auf folgenden Satz:

Theorem 9. *Es sei x ein nilpotentes Element der Algebra R, das der Bedingung*

$$|(e - \lambda x)^{-1}| \leq \frac{c\, r^n}{|\cos^m \varphi|}, \qquad m \geq n, \tag{1}$$

für alle hinreichend großen $r = |\lambda|$ und alle $\varphi = \arg \lambda \neq \pm \frac{\pi}{2}$ genügt. Dann ist $x^{n+1} = 0$.

Beweis. Es sei $P(\lambda)$ ein Polynom n-ten Grades, dessen sämtliche Nullstellen in der unteren Halbebene liegen. Dann gilt für die Vektorfunktion $y(\lambda) = \frac{1}{P(\lambda)}(e - \lambda x)^{-1}$ für genügend großes r

$$|y(\lambda)| = \left|\frac{(e-\lambda x)^{-1}}{P(\lambda)}\right| \leqq \frac{c r^n}{|\cos^m \varphi|} \cdot \frac{1}{K r^n} = \frac{c'}{|\cos^m \varphi|}.$$

Also ist $|y(\lambda)|$ auf der reellen Achse beschränkt, und es folgt[1])

$$\int_0^\pi \log^+ |y(re^{i\varphi})| \sin\varphi \, d\varphi \leqq \pi \log^+ c' + \int_0^\pi \log^+ \left|\frac{1}{\cos^m \varphi}\right| \sin\varphi \, d\varphi$$

$$= \pi \log^+ c' + \int_0^1 \log^+ \frac{1}{u^m} \, du$$

$$= \pi \log^+ c' - m \int_0^1 \log u \, du < \infty$$

und somit

$$\lim_{r\to\infty} \frac{1}{r} \int_0^\pi \log^+ |y(re^{i\varphi})| \sin\varphi \, d\varphi = 0.$$

Auf Grund des Satzes von Phragmén-Lindelöf (vgl. etwa Markow [1][2])) schließen wir hieraus, daß die mit einem beliebigen Funktional $f \in R'$ gebildete Funktion $f(y(\lambda))$ in der oberen Halbebene beschränkt ist, so daß $|f((e-\lambda x)^{-1})| \leqq c|\lambda|^n$ für $0 \leqq \varphi \leqq \pi$ ist. Entsprechend läßt sich zeigen, daß diese Abschätzung auch für $-\pi \leqq \varphi \leqq 0$ gilt. Dann ist $f((e-\lambda x)^{-1})$ für jedes $f \in R'$ ein Polynom, dessen Grad höchstens gleich n ist. Hieraus und aus der Formel $(e-\lambda x)^{-1} = e + \lambda x + \lambda^2 x^2 + \cdots$ folgt nun aber, daß $f(x^{n+1}) = 0$ für alle $f \in R'$ ist. Es ist also tatsächlich $x^{n+1} = 0$.

Durch Anwendung von Theorem 9 gelangt man zu

Theorem 10. *Es sei $\{x_\alpha\}$ ein Erzeugendensystem der Algebra R und es gelte für ein festes maximales Ideal M_0 und alle Erzeugenden x_α eine Bedingung*

$$|(x_\alpha - \lambda e)^{-1}| = o\left(\frac{1}{|\operatorname{Im}(\lambda - \lambda_\alpha^{(0)})|^{n_\alpha}}\right) \tag{2}$$

in einer gewissen Umgebung des Punktes $\lambda_\alpha^{(0)} = x_\alpha(M_0)$ (einzeln für jedes x_α). Dann gibt es ein minimales primäres Ideal I der Algebra R, das in M_0 enthalten ist. Dieses Ideal wird von den Elementen $(x_\alpha - \lambda_\alpha^{(0)} e)^{n_\alpha - 1}$ erzeugt.

Ist $n_\alpha \leqq 2$ für alle α, so gibt es nur ein in M_0 liegendes primäres Ideal, nämlich M_0 selbst.

Beweis. Es sei J irgendein in M_0 enthaltenes primäres Ideal, und es bezeichne $\tilde{x}$ das Bild des Elements x bei dem natürlichen Homomorphismus $R \to R/J$. Dann existiert für $\lambda \neq \lambda_\alpha^{(0)}$ das Element $(\tilde{x}_\alpha - \lambda \tilde{e})^{-1}$. Da $|\tilde{x}| \leqq |x|$ ist, gilt wegen (2)

$$|(\tilde{x}_\alpha - \lambda \tilde{e})^{-1}| = o\left(\frac{1}{|\operatorname{Im}(\lambda - \lambda_\alpha^{(0)})|^{n_\alpha}}\right). \tag{3}$$

---

[1]) $\log^+ x$ bezeichnet $\log x \cup 0$.

[2]) Vgl. auch L. Bieberbach, Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. II, 2. Auflage, Leipzig 1931, S. 129. — *Anm. d. Red.*

Wird hier nun $\mu = \frac{1}{\lambda - \lambda_\alpha^{(0)}} = r e^{i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}$ und $\tilde{y}_\alpha = \tilde{x}_\alpha - \lambda_\alpha^{(0)} \tilde{e}$ gesetzt, so folgt

$$|(\tilde{e} - \mu \tilde{y}_\alpha)^{-1}| = o\left(\frac{1}{|\mu| \left|\operatorname{Im}\left(\frac{1}{\mu}\right)\right|^{n_\alpha}}\right) = o\left(\frac{r^{n_\alpha - 1}}{\left|\operatorname{Im}\left(e^{-i\left(\varphi + \frac{\pi}{2}\right)}\right)\right|^{n_\alpha}}\right) = o\left(\frac{r^{n_\alpha - 1}}{|\cos^{n_\alpha} \varphi|}\right). \tag{3'}$$

Nach Theorem 9 gilt dann aber $\tilde{y}_\alpha^{n_\alpha} = 0$ und $(\tilde{e} - \mu \tilde{y}_\alpha)^{-1} = \sum_{p=0}^{n_\alpha - 1} \mu^p \tilde{y}_\alpha^p$. Wegen (3′) ist dann $\tilde{y}^{n_\alpha - 1} = 0$, d. h. $(\tilde{x}_\alpha - \lambda_\alpha^{(0)} \tilde{e})^{n_\alpha - 1} = 0$. Folglich ist $(x_\alpha - \lambda_\alpha^{(0)} e)^{n_\alpha - 1} \in J$, so daß J alle $x_\alpha - (\lambda_\alpha^{(0)} e)^{n_\alpha - 1}$ enthält. Dann gehört auch das von diesen Elementen erzeugte abgeschlossene Ideal I zu J. Das Ideal I ist primär; denn aus $I \subset M_1$ folgt $(x_\alpha(M_1) - \lambda_\alpha^{(0)})^{n_\alpha - 1} = 0$ und $x_\alpha(M_1) = \lambda_\alpha^{(0)} = x_\alpha(M_0)$ für alle Erzeugenden x_α, so daß $M_1 = M_0$ sein muß.

Nun sei $n_\alpha \leqq 2$. Dann gilt $\tilde{y}_\alpha = 0$, also $\tilde{x}_\alpha = \lambda_\alpha^{(0)} e_\alpha$. Demnach ist R/J der Körper der komplexen Zahlen, so daß J ein maximales Ideal und $J = M_0$ ist.

Bemerkung. Die Bedingung in Theorem 10, daß die Abschätzung (2) in einer vollen Umgebung von $\lambda_\alpha^{(0)}$ gilt, kann abgeschwächt werden. Es genügt zu verlangen, daß in einer Umgebung jedes Punktes $\lambda_\alpha^{(0)} = x_\alpha(M_0)$ eine Strecke $\lambda = \lambda_\alpha^{(0)} + t e^{i \varphi_\alpha}$, $|t| \leqq \varepsilon$, existiert, die durch den Punkt geht, auf welchem

$$|(x_\alpha - \lambda e)^{-1}| = o\left(\frac{1}{|\lambda - \lambda_\alpha^{(0)}|^{n_\alpha}}\right)$$

ist, und daß für $t \to \infty$ und $\lambda = \lambda_\alpha^{(0)} + t e^{i\varphi}$

$$\frac{1}{t} \int_0^{2\pi} \log^+ |(e - \lambda x)^{-1}| \sin\varphi \, d\varphi \to 0$$

gilt.

Folgerung 1. *Es sei R eine Algebra mit einer einzigen Erzeugenden x, und in einer Umgebung des Punktes $\lambda_0 = x(M_0)$ sei die Bedingung*

$$|(x - \lambda e)^{-1}| = o\left(\frac{1}{|\operatorname{Im}(\lambda - \lambda_0)|^n}\right) \tag{4}$$

erfüllt. Dann gibt es in R höchstens $n - 1$ primäre Ideale, die in M_0 enthalten sind. Jedes dieser Ideale wird von einem der Elemente $(x - \lambda_0 e)^k$ $(k = 1, 2, \ldots, n - 1)$ erzeugt.

Beweis. Benutzt man dieselben Bezeichnungen wie im Beweis von Theorem 10, so ist R/I ein hyperkomplexes System mit den Basiselementen $\tilde{e}, \tilde{y}, \ldots, \tilde{y}^{n-1}$, wobei $\tilde{y} = \tilde{x} - \lambda_0 \tilde{e}$ ist. Die einzigen Ideale in R/I sind also die von jeweils einem der Elemente $\tilde{y}, \ldots, \tilde{y}^{n-1}$ erzeugten Ideale.

Diese Folgerung zeigt, daß die Theorie der primären Ideale eine wesentliche Rolle bei der Übertragung der Theorie der Elementarteiler auf Operatoren in unendlichdimensionalen Räumen spielen wird.

Folgerung 2. *Es sei R eine Algebra mit den beiden Erzeugenden x und x^{-1}. Dabei sei $|x(M)| = 1$, und es gelte*

$$\lim_{r \to 1} (1 - r)^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n = 0, \quad \lim_{r \to 1} (1 - r)^k \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-n} r^n = 0, \tag{5}$$

wobei $\alpha_n = |x^n|$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ sei. Dann gibt es in jedem maximalen Ideal M_0 der Algebra R außer den Idealen $I_1, I_2, \ldots, I_{k-1}$, wobei I_l das durch $(x - \lambda_0 e)^l$, $\lambda_0 = x(M_0)$, erzeugte Ideal ist, kein weiteres primäres Ideal.

Ist $|\lambda| = r < 1$, so gilt

$$|(e - \lambda x)^{-1}| \leqq \sum_{n=0}^{\infty} |\lambda|^n |x^n| = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n r^n$$

und daher wegen (5)

$$|(e - \lambda x)^{-1}| = o\left(\frac{1}{(1-r)^k}\right) \tag{6}$$

für $r < 1$. Für $|\lambda| = r > 1$ gilt

$$|(e - \lambda x)^{-1}| = |\lambda|^{-1} |x^{-1}| \left|\left(e - \frac{1}{\lambda} x^{-1}\right)^{-1}\right| \leqq \frac{|x^{-1}|}{r} \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_{-n} r^{-n},$$

also $|(e - \lambda x)^{-1}| = o\left(\frac{1}{|1-r|^k}\right)$ für $r \searrow 1$ und $|(e - \lambda x)^{-1}| \to 0$ für $r \to \infty$. Mit Rücksicht auf die Bemerkung zu Theorem 10 ist der weitere Beweis analog dem von Folgerung 1.[1])

Beispiel. Es sei R die Algebra aller k-mal stetig differenzierbaren Funktionen $x(t)$, $0 \leqq t \leqq 1$, mit den in üblicher Weise definierten Operationen und der Norm

$$|x| = \max|x(t)| + \frac{1}{1!} \max|x'(t)| + \cdots + \frac{1}{k!} \max|x^{(k)}(t)|.$$

Diese Algebra hat die beiden Erzeugenden $x(t) = e^{it}$ und $x^{-1}(t) = e^{-it}$, wobei $\alpha_n = |x^n| \sim c|n|^k$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ ist. Hieraus folgt

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_n r^n \sim \frac{c_1}{(1-r)^{k+1}}, \quad c_1 > 0.$$

Folglich gibt es in R höchstens $k+1$ primäre Ideale, die in einem gegebenen maximalen Ideal M_0 enthalten sind. Im vorliegenden Fall gibt es genau $k+1$ primäre Ideale, nämlich $I_0 = M_0, I_1 = M_1, \ldots, I_k = M_k$, wobei M_i $(i = 0, 1, \ldots, k)$ die Gesamtheit aller $x(t)$ ist, für die $x(t_0) = x'(t_0) = \cdots = x^{(i)}(t_0) = 0$ ist.

§ 12. Homomorphismen und Isomorphismen von kommutativen Algebren

1. Die Eindeutigkeit der Norm in einer halbeinfachen Algebra. Eines der wichtigsten Ergebnisse der Theorie der kommutativen Algebren besagt, daß die Norm einer halbeinfachen Algebra allein durch die algebraische Struktur bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt ist.

Wir beweisen zunächst einen Hilfssatz.

Hilfssatz. *Es sei R_1 eine kommutative Algebra und R eine Teilalgebra von R_1. In R_1 sei die Norm $|x|_1$ und in R die Norm $|x|$ definiert. Mit diesen Normen seien R und R_1* Banach*sche Algebren. Sind dann $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{M}$ die Räume der maximalen regulären Ideale von R_1 bzw. R, so gilt für jedes Element $x \in R$*

$$\max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x(M_1)| \leqq \max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|. \tag{1}$$

[1]) Der Beweis ist gegenüber dem Original etwas ausführlicher gehalten. — *Anm. d. Red.*

Beweis. Es seien S_x und S_x^1 die Spektren[1]) des Elements $x \in R$ in den Algebren R bzw. R_1. Offenbar gilt

$$S_x \supset S_x^1. \tag{2}$$

Andererseits ist S_x die Menge aller Werte der Funktion $x(M)$, $M \in \mathfrak{M}$, und S_x^1 die Menge aller Werte der Funktion $x(M_1)$, $M_1 \in \mathfrak{M}_1$. Hieraus und aus (2) folgt schon die Ungleichung (1).

Theorem 1. *Auf einer* BANACH*schen kommutativen Algebra R mit der Norm $|x|$ sei eine zweite Norm $|x|_1$ gegeben, und die vollständige Hülle R_1 der Algebra R in bezug auf die Norm $|x|_1$ sei eine halbeinfache Algebra. Dann gilt $|x|_1 \leqq C|x|$ für alle $x \in R$, wobei C eine Konstante ist.*

Beweis. Wir definieren in R eine neue Norm $|x|_2$, indem wir

$$|x|_2 = \max\{|x|, |x|_1\} \tag{3}$$

setzen. Man bestätigt sofort, daß $|x|_2$ allen Axiomen der Norm einer Algebra genügt, so daß R auch in bezug auf die Norm $|x|_2$ eine normierte Algebra ist.

Wir behaupten, R ist bezüglich $|x|_2$ vollständig.

Es sei $\{x_n\}$ eine Fundamentalfolge aus R in bezug auf $|x|_2$. Wegen (3) ist $\{x_n\}$ dann auch bezüglich $|x|$ und $|x|_1$ eine Fundamentalfolge. Es seien x_0 und x_0' die Limites von $\{x_n\}$ bezüglich $|x|$ bzw. $|x|_1$.

Aus dem obigen Hilfssatz ergibt sich für $n \to \infty$

$$\max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x_0(M_1) - x_n(M_1)| \leqq \max_{M \in \mathfrak{M}} |x_0(M) - x_n(M)| \leqq |x_0 - x_n| \to 0,$$

$$\max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x_0'(M_1) - x_n(M_1)| \leqq |x_0' - x_n|_1 \to 0$$

(vgl. § 11, Nr. 2, Satz I, g), und daher gilt

$$x_0'(M_1) - x_0(M_1) = 0$$

für alle $M_1 \in \mathfrak{M}_1$. Folglich gehört $x_0' - x_0$ zum Radikal der Algebra R_1. Da R_1 als halbeinfach vorausgesetzt wurde, schließen wir hieraus, daß $x_0' - x_0 = 0$ ist.

Aus $x_0 = x_0'$ folgt nun aber, daß R bezüglich $|x|_2$ vollständig ist.

Wir wissen damit, daß R sowohl bezüglich der Norm $|x|$ als auch bezüglich der Norm $|x|_2 \geqq |x|$ vollständig ist. Auf Grund einer Folgerung aus dem BANACHschen Satz (vgl. § 4, Nr. 4, Satz VII) gibt es dann eine Konstante C mit $|x|_2 \leqq C|x|$ für alle $x \in R$. Wegen (3) gilt dann aber auch $|x|_1 \leqq C|x|$ für alle $x \in R$, womit der Satz bewiesen ist.[2])

Folgerung 1. *Jeder Isomorphismus einer* BANACH*schen kommutativen Algebra R auf eine dichte Teilmenge R_1' einer halbeinfachen* BANACH*schen kommutativen Algebra R_1 ist stetig.*

---

[1]) Ist R eine Algebra ohne Einselement, so wird unter dem Spektrum eines Elements $x \in R$ sein Spektrum in der aus R durch Adjunktion des Einselements entstehenden Algebra verstanden.

[2]) Dieser Satz stellt eine Verallgemeinerung eines von I. M. GELFAND [4] angegebenen Satzes dar; die Verallgemeinerung stammt von G. E. SCHILOW [5] und RICKART [3].

Beweis. Übertragen wir die in R definierte Norm auf R_1', so erhalten wir in R_1' zwei Normen, auf die das Theorem 1 anwendbar ist. Sind $x' \in R_1'$ und $x \in R$ Elemente, die bei dem Isomorphismus einander entsprechen, so gilt folglich $|x'| \leq C|x|$, wobei C für alle x, x' dieselbe Konstante ist.

Folgerung 2. *Sind halbeinfache* BANACH*sche kommutative Algebren isomorph, so sind sie auch topologisch isomorph.*

Die Folgerung 2 bedeutet, daß die Norm in einer halbeinfachen kommutativen Algebra bis auf Äquivalenz eindeutig durch die algebraische Struktur bestimmt ist.

Folgerung 3. *Jeder Automorphismus* (d. h. *Isomorphismus auf sich*) *einer halbeinfachen* BANACH*schen kommutativen Algebra ist stetig.*

Die Folgerung 2 wurde von RICKART [3] auf gewisse nichtkommutative Algebren ausgedehnt. Insbesondere bewies RICKART folgende Aussage: *In jeder einfachen* BANACH*schen Algebra mit Einselement ist die Norm bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.* Andere Verallgemeinerungen dieser Ergebnisse findet man bei YOOD [5].

2. Symmetrische Algebren.

Theorem 2. *Jede Involution in einer halbeinfachen* BANACH*schen kommutativen Algebra ist stetig.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $R^{\wedge}$ die aus denselben Elementen wie R bestehende Algebra, in der die Addition und die Multiplikation sowie die Norm genauso wie in R erklärt sind, während die Multiplikation mit einer Zahl (wir deuten sie durch einen Punkt an) in $R^{\wedge}$ durch die Formel $\lambda \cdot x = \bar{\lambda} x$ definiert sei. Offenbar ist $R^{\wedge}$ eine halbeinfache BANACHsche kommutative Algebra und die Zuordnung $x \to x^*$ ein Isomorphismus der Algebren R und $R^{\wedge}$. Daher braucht nur noch die Folgerung 2 aus Nr. 1 angewendet zu werden.

§13. Der Schilowsche Rand

1. Definition und Eigenschaften des Schilowschen Randes. Es sei R eine BANACHsche kommutative Algebra mit Einselement und $\mathfrak{M}$ der Raum der maximalen Ideale von R. Eine abgeschlossene Menge $F \subset \mathfrak{M}$ heiße *wesentliche Menge*, wenn der absolute Betrag jeder Funktion $x(M)$ von R sein Maximum in einem Punkt von F annimmt. Offenbar gibt es stets eine wesentliche Menge, nämlich $\mathfrak{M}$ selbst. Eine wesentliche Menge werde *minimal* genannt, wenn sie keine echte Teilmenge besitzt, die auch noch wesentlich ist.

Theorem 1. *Im Raum der maximalen Ideale einer* BANACH*schen kommutativen Algebra mit Einselement gibt es genau eine minimale wesentliche Menge.* Diese heißt SCHILOW*scher Rand* von $\mathfrak{M}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß es überhaupt eine minimale wesentliche Menge gibt.

Die Gesamtheit $\{F\}$ aller wesentlichen Mengen ist in bezug auf die Inklusion eine halbgeordnete Menge, die der Voraussetzung des ZORNschen Lemmas

genügt; die untere Grenze einer abnehmenden Gesamtheit $\{F_\alpha\}$ von wesentlichen Mengen ist einfach der Durchschnitt aller Mengen dieser Gesamtheit, der wegen der Bikompaktheit von $\mathfrak{M}$ nicht leer und ebenfalls eine wesentliche Menge ist. Ist nämlich $x(M)$ eine feste Funktion aus R und F_x die Menge aller Punkte $M \subset \mathfrak{M}$, in denen ihr absoluter Betrag sein Maximum annimmt, so haben die bikompakten Mengen $F_x \cap F_\alpha$ einen nichtleeren Durchschnitt, also ist auch der Durchschnitt von F_x mit $\bigcap_\alpha F_\alpha$ nicht leer.

Demzufolge gibt es in $\{F\}$ ein minimales Element.

Um die Eindeutigkeit des minimalen Elements zu zeigen, nehmen wir an, es gäbe zwei minimale wesentliche Mengen. Wir bezeichnen diese mit Γ_1 bzw. Γ_2 und behaupten, daß jede Umgebung eines beliebigen Punktes $M_1 \in \Gamma_1$ einen Punkt aus Γ_2 enthält. Auf Grund der Abgeschlossenheit von Γ_2 folgt hieraus, daß $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$ und damit $\Gamma_1 = \Gamma_2$ ist, weil natürlich auch $\Gamma_2 \subset \Gamma_1$ gilt.

Es sei also $U = U(M_1; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ irgendeine Umgebung aus der Umgebungsbasis des Punktes $M_1 \in \Gamma_1$. Sie wird durch die Ungleichungen

$$|x_k(M) - x_k(M_1)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

beschrieben. Da die Elemente x_k durch die Elemente $x_k - x_k(M_1)e$ ersetzt werden können, darf angenommen werden, daß $x_k \in M_1$ ist und daß die Umgebung U durch die Ungleichungen

$$|x_k(M)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{1}$$

beschrieben wird. Nun gibt es in der Algebra R eine Funktion $y = y(M)$, für die das Maximum ihres absoluten Betrages,

$$m = \max_{M \in \mathfrak{M}} |y(M)|,$$

in $\Gamma_1 \cap U$ angenommen wird und deren Betrag auf $\Gamma_1 - \Gamma_1 \cap U$ kleiner als m ist; anderenfalls wäre $\Gamma_1 - \Gamma_1 \cap U$ eine wesentliche Menge, was wegen der Minimaleigenschaft von Γ_1 unmöglich ist. Da y durch $\frac{1}{m}\, y$ ersetzt werden kann, darf ohne Beschränkung der Allgemeinheit angenommen werden, daß $m = 1$ ist. Weiter darf angenommen werden, daß

$$|y(M)| < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1 \leq k \leq n} |x_k|} \quad \text{für} \quad M \in \Gamma_1 - U \cap \Gamma_1$$

gilt. Man braucht ja y nur durch ein geeignetes y^n zu ersetzen. Wegen (1) sind dann die Beträge der Funktionen $(x_k y)(M) = x_k(M)\, y(M)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ überall auf Γ_1 und damit auch auf ganz $\mathfrak{M}$ kleiner als ε, also

$$|x_k(M)\, y(M)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad M \in \mathfrak{M} \quad \text{und} \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{2}$$

Da aber Γ_2 wesentlich ist, gibt es einen Punkt $M_2 \in \Gamma_2$, in dem $|y(M)|$ sein Maximum $m = 1$ annimmt,

$$|y(M_2)| = 1.$$

Wird in (2) nun $M = M_2$ gesetzt, so erhalten wir

$$|x_k(M_2)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

und folglich gilt $M_2 \subset U$. Auf Grund des oben Gesagten schließen wir hieraus, daß $\Gamma_1 = \Gamma_2$ sein muß, womit Theorem 1 vollständig bewiesen ist.

Theorem 2. *Ein maximales Ideal M_0 gehört dann und nur dann zum* SCHILOW*schen Rand Γ, wenn es zu jeder Umgebung $U(M_0)$ von M_0 in der Algebra eine Funktion $y(M)$ gibt, deren absoluter Betrag sein Maximum in $U(M_0)$ annimmt und außerhalb von $U(M_0)$ überall kleiner als sein Maximum ist.*

Beweis. Würde es keine solche Funktion $y(M)$ geben, so müßte der absolute Betrag jeder Funktion $y(M)$ der Algebra sein Maximum in $\mathfrak{M} - U(M_0)$ annehmen, so daß $\Gamma \subset \mathfrak{M} - U(M_0)$ und $M_0 \notin \Gamma$ wäre. Folglich ist die Bedingung notwendig. Sie ist aber auch hinreichend, weil es, wenn sie erfüllt ist, in jeder Umgebung des Punktes M_0 einen Punkt des SCHILOWschen Randes gibt und daher M_0 zum SCHILOWschen Rand gehört.

Beispiel. Es sei A die Algebra aller Funktionen $x = x(\zeta)$, die in $|\zeta| < 1$ regulär und auf $|\zeta| \leqq 1$ stetig sind (§ 11, Nr. 3, Beispiel b). Der Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale von A ist der abgeschlossene Kreis $|\zeta| \leqq 1$. Auf Grund des Prinzips vom Maximum des absoluten Betrages ist die Kreisperipherie $|\zeta| = 1$ der SCHILOWsche Rand der Algebra A.

2. Erweiterung maximaler Ideale. Es sei R_1 eine BANACHsche kommutative Algebra mit Einselement und R eine BANACHsche kommutative Algebra, die R_1 als Teilalgebra mit derselben Norm enthält. Mit $\mathfrak{M}$ bzw. $\mathfrak{M}_1$ bezeichnen wir den Raum der maximalen Ideale von R bzw. R_1. Für jedes Element x von R_1 können dann die Funktionen $x(M)$ über $\mathfrak{M}$ und $x(M_1)$ über $\mathfrak{M}_1$ gleichzeitig betrachtet werden.

Hilfssatz. *Für jedes $x \in R_1$ gilt*

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x(M_1)|. \tag{1}$$

Die Behauptung folgt unmittelbar aus der Formel

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^n|}$$

(vgl. § 11, Nr. 2, Satz IV), weil die Potenzen x^n gleichzeitig in R_1 und R enthalten sind und ihre Normen in R_1 und R übereinstimmen.

Wir können jetzt folgenden Satz beweisen.

Theorem 3. *Jedes maximale Ideal des* SCHILOW*schen Randes Γ_1 der Algebra R_1 kann zu einem maximalen Ideal jeder R_1 umfassenden Algebra R erweitert werden.*

Beweis. Es sei $M_0 \in \Gamma_1$ ein Element mit der Eigenschaft, in keinem maximalen (und damit in überhaupt keinem) Ideal der Algebra $R \supset R_1$ zu liegen. Dann muß die Gesamtheit aller Summen der Gestalt $\sum_{k=1}^{n} x_k z_k$, $x_k \in M_0$, $z_k \in R$, mit der ganzen Algebra R übereinstimmen; anderenfalls wäre nämlich diese Gesamtheit ein M_0 enthaltendes Ideal I von R.

Insbesondere muß eine dieser Summen gleich dem Einselement e der Algebra sein:

$$e = \sum_{k=1}^{n} x_k z_k. \tag{2}$$

Wir können annehmen, daß

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |x_k(M)| \leq 1 \tag{3}$$

ist; anderenfalls hätte man nur x_k durch $\alpha_k x_k$ und z_k durch $\frac{1}{\alpha_k} z_k$ zu ersetzen. Nun sei μ die größte der Zahlen

$$\mu_k = \max_{M \in \mathfrak{M}} |z_k(M)| \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{4}$$

und $U(M_0)$ die durch die Ungleichungen

$$|x_k(M_1)| < \frac{1}{2n\mu}, \quad M_1 \in \mathfrak{M}_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{5}$$

definierte Umgebung des Punktes M_0 von $\mathfrak{M}_1$. Nach Theorem 2 aus Nr. 1 gibt es in R_1 eine Funktion $y(M_1)$, deren absoluter Betrag in $U(M_0)$ sein Maximum Eins annimmt und außerhalb von $U(M_0)$ kleiner als Eins ist. Wir dürfen annehmen, daß

$$|y(M_1)| < \frac{1}{2n\mu} \quad \text{in} \quad \mathfrak{M}_1 - U(M_0) \tag{6}$$

ist; anderenfalls ersetze man das Element y durch eine geeignete Potenz y^m. Wenden wir nun den oben bewiesenen Hilfssatz an und berücksichtigen dabei die Beziehungen (2) bis (6), so folgt

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |y(M)| = \max_{M \in \mathfrak{M}} \left| \sum_{k=1}^{n} x_k(M)\, y(M)\, z_k(M) \right| \leq \mu \sum_{k=1}^{n} \max_{M \in \mathfrak{M}} |x_k(M)\, y(M)|$$

$$= \mu \sum_{k=1}^{n} \max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |x_k(M_1)\, y(M_1)| < \mu \cdot n \frac{1}{2n\mu} = \frac{1}{2}.$$

Andererseits gilt auf Grund desselben Hilfssatzes

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |y(M)| = \max_{M_1 \in \mathfrak{M}_1} |y(M_1)| = 1.$$

Aus diesem Widerspruch folgt die Richtigkeit des Satzes.

§ 14. Vollsymmetrische kommutative Algebren

1. Definition der vollsymmetrischen Algebra. Ist R eine Banachsche kommutative symmetrische Algebra mit Einselement und M ein maximales Ideal in R, so gilt für jedes Element $x \in R$

$$x = x(M)\, e + m, \quad m \in M.$$

Hieraus folgt

$$x^* = \overline{x(M)}\, e + m^*. \tag{1}$$

Offenbar ist M^* (d. h. die Gesamtheit aller m^* mit $m \in M$) ebenfalls ein maximales Ideal in R. Daher bedeutet (1), daß

$$x^*(M^*) = \overline{x(M)} \tag{2}$$

ist. Eine BANACHsche symmetrische Algebra R mit Einselement heißt *vollsymmetrisch*[1]), wenn $x^*(M) = \overline{x(M)}$ für alle $x \in R$ und alle $M \in \mathfrak{M}$ ist.

Eine BANACH*sche symmetrische kommutative Algebra R mit Einselement ist genau dann vollsymmetrisch, wenn ihre maximalen Ideale sämtlich symmetrisch sind.*

Beweis. Sind alle maximalen Ideale M symmetrisch ($M^* = M$), so folgt aus (2), daß $x^*(M) = \overline{x(M)}$ ist, und R ist vollsymmetrisch. Ist dagegen R vollsymmetrisch, so gilt mit $x(M) = 0$ auch $x^*(M) = 0$, d. h., aus $x \in M$ folgt $x^* \in M$, und folglich ist jedes maximale Ideal symmetrisch.

Beispiele. 1. Die Algebra $C(T)$ aller stetigen Funktionen über einem bikompakten Raum T ist offenbar vollsymmetrisch.

2. Die Algebra W aller absolut konvergenten trigonometrischen Reihen

$$x = x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{int}$$

ist ebenfalls vollsymmetrisch.

3. Die Algebra A aller Funktionen $x(\zeta)$, die im Kreis $|\zeta| < 1$ holomorph und auf $|\zeta| = 1$ stetig sind, ist für keine Involution vollsymmetrisch, denn die Funktionen $x(\zeta)$ und $\overline{x(\zeta)}$ können nur dann in $|\zeta| < 1$ gleichzeitig holomorph sein, wenn $x(\zeta) = \text{const}$ ist.

In A kann durch $x^*(\zeta) = \overline{x(\overline{\zeta})}$ aber eine Involution eingeführt werden; alle Axiome der Involution (§ 10, Nr. 1) sind erfüllt. Somit kann A als Beispiel für eine Algebra dienen, die wohl symmetrisch, aber nicht vollsymmetrisch ist.

2. Ein Kriterium für die Vollsymmetrie.

Theorem 1. *Es sei R eine* BANACH*sche kommutative Algebra mit Einselement. In R sei eine Involution $x \to x^*$ definiert. Diese Involution genügt der Bedingung*

$$x^*(M) = \overline{x(M)} \quad \textit{für alle} \quad M \in \mathfrak{M}$$

genau dann, wenn jedes Element $e + x^*x$ ein Inverses in R hat.

Beweis. Natürlich ist die Bedingung notwendig; ist nämlich R vollsymmetrisch, so gilt

$$(e + x^*x)(M) = 1 + \overline{x(M)}\, x(M) \geqq 1,$$

so daß $e + x^*x$ in keinem maximalen Ideal M enthalten ist und daher ein Inverses hat.

Um zu beweisen, daß die Bedingung auch hinreichend ist, nehmen wir an, jedes Element $e + x^*x$ habe ein Inverses. Zunächst zeigen wir, daß für jedes

[1]) In der Literatur wird eine in diesem Sinne vollsymmetrische Algebra häufig einfach symmetrische Algebra genannt, während unsere symmetrischen Algebren statt dessen Algebren mit Involution genannt werden.

hermitesche Element $x \in R$ die Beziehung $\overline{x(M)} = x(M)$ gilt. Hierzu genügt es nachzuweisen, daß das Spektrum jedes hermiteschen Elements x reell ist, d. h., daß $(x - (\lambda + i\mu)e)^{-1}$, wo λ und μ reelle Zahlen sind, für $\mu \neq 0$ existiert. Wir setzen $y = \frac{1}{\mu}(x - \lambda e)$. Dann ist $y^* = \frac{1}{\mu}(x - \lambda e)$ und

$$(x - (\lambda + i\mu)e)(x - (\lambda - i\mu)e) = (x - \lambda e)^2 + \mu^2 e = \mu^2(e + y^* y).$$

Nach Voraussetzung hat die rechte und damit auch die linke Seite dieser Gleichung ein Inverses; folglich existiert

$$(x - (\lambda + i\mu)e)^{-1} = (x - (\lambda - i\mu)e)\,[(x - \lambda e)^2 + \mu^2 e]^{-1}.$$

Damit ist gezeigt, daß $x(M)$ für ein hermitesches Element x reell ist. Nun läßt sich aber jedes Element x in der Form $x = x_1 + i x_2$ darstellen, wobei x_1 und x_2 hermitesche Elemente sind. Daher gilt

$$x^*(M) = (x_1 - i x_2)(M) = x_1(M) - i x_2(M) = \overline{x_1(M) + i x_2(M)} = \overline{x(M)},$$

womit das Theorem 1 bewiesen ist.

Wir können jetzt die folgende allgemeinere Definition der vollsymmetrischen Algebra aussprechen. Eine BANACHsche symmetrische Algebra R mit Einselement heißt *vollsymmetrisch,* wenn in ihr jedes Element der Gestalt $e + x^* x$ ein Inverses hat.

Theorem 1 bedeutet nun, daß im Fall einer kommutativen Algebra die neue Definition mit der ursprünglichen äquivalent ist.

3. Eine Anwendung des Satzes von Stone.

Theorem 2. *Ist R eine vollsymmetrische kommutative Algebra und $\mathfrak{M}$ der Raum ihrer maximalen Ideale, so ist jede über $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $f(M)$ Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen $x_n(M)$, $x_n \in R$.*

Beweis. Wir bezeichnen die Gesamtheit aller reellen Funktionen $x(M)$, $x \in R$, mit K. Dann ist K eine Algebra von reellen stetigen Funktionen über dem bikompakten Raum $\mathfrak{M}$. Ist $M_1 \neq M_2$, so gibt es eine Funktion $x(M) = x_1(M) + i x_2(M)$, $x \in R$, (vgl. § 10, Nr. 1, Satz I) mit der Eigenschaft, daß $x(M_1) \neq x(M_2)$ ist. Folglich nimmt wenigstens eine der reellen Funktionen $x_1(M)$, $x_2(M) \in K$ in den Punkten M_1 und M_2 verschiedene Werte an. Demnach genügt K allen Voraussetzungen des Satzes von STONE (vgl. § 2, Nr. 10), aus dem folgt, daß jede reelle stetige Funktion über $\mathfrak{M}$ Grenzwert einer gleichmäßig konvergenten Folge von reellen Funktionen $x(M) \in K$ ist. Wendet man dieses Ergebnis auf die reellen stetigen Funktionen $\mathrm{Re}\, f(M)$ und $\mathrm{Im}\, f(M)$ an, so erkennt man die Richtigkeit der Behauptung.

Folgerung 1. *Ist R eine* BANACH*sche vollsymmetrische kommutative Algebra, in der*

$$|x| = \max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$$

ist, so ist R der Algebra $C(\mathfrak{M})$ isometrisch isomorph.[1])

[1]) Wir erinnern daran, daß $C(\mathfrak{M})$ die Algebra aller auf $\mathfrak{M}$ stetigen Funktionen mit den üblichen Operationen und der Norm $\max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$ ist (vgl. Beispiel 1 aus § 9, Nr. 1).

Beweis. In diesem Fall bilden die Funktionen $x(M)$ eine im Sinne der Norm $\max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$ vollständige Algebra, weil R im Sinne der Norm $|x|$ vollständig ist. Daher ist jede Funktion aus $C(\mathfrak{M})$, die Grenzwert einer Folge von Funktionen $x_n(M)$, $x_n \in R$, ist, selbst eine solche Funktion.

Folgerung 2. *Gilt in einer vollsymmetrischen Algebra R*

$$|x^2| = |x|^2$$

für alle $x \in R$, so ist R der Algebra $C(\mathfrak{M})$ isometrisch isomorph.

In diesem Fall gilt nämlich

$$\max_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{|x^{2^n}|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{|x|^{2^n}} = |x|,$$

so daß nur noch die Folgerung 1 anzuwenden bleibt.

Eine Banachsche symmetrische kommutative Algebra R ohne Einselement heiße *vollsymmetrisch*, wenn die aus R durch Adjunktion eines Einselements entstehende Algebra R_1 vollsymmetrisch ist.

Folgerung 3. *Ist R eine vollsymmetrische Algebra ohne Einselement und $\mathfrak{M}$ der Raum der regulären maximalen Ideale von R, so ist jede über $\mathfrak{M}$ stetige Funktion $f(M)$, die im Unendlichen gleich Null ist, Grenzwert einer auf $\mathfrak{M}$ gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen $x_n(M)$, $x_n \in R$.*

Beweis. Wir dürfen annehmen, daß $\mathfrak{M}$ der lokal bikompakte Raum ist, den man aus dem Raum $\mathfrak{M}_1$ der maximalen Ideale der Algebra R_1 erhält, wenn man das Ideal $M_0 = R$ fortläßt, das in $\mathfrak{M}_1$ die Rolle des unendlich fernen Elements spielt (vgl. § 11, Nr. 4). Die Elemente $x \in R$ dürfen als Funktionen $x(M)$ über $\mathfrak{M}_1$ angesehen werden, die im Punkt M_0 gleich Null sind.

Nun sei $f(M)$ eine über $\mathfrak{M}_1$ stetige Funktion, die im Punkt M_0 gleich Null ist. Nach Theorem 2 gibt es eine Folge $x_n \in R_1$ derart, daß

$$\sup_{\mathfrak{M}_1} |f(M) - x_n(M)| \to 0 \text{ für } n \to \infty.$$

Da $f(M_0) = 0$ ist, folgt hieraus

$$|x_n(M_0)| = |x_n(M_0) - f(M_0)| \to 0 \quad \text{für} \quad n \to \infty.$$

Wird $y_n = x_n - x_n(M_0)e$ gesetzt, so hat demnach die Folge $y_n \in R$ die Eigenschaft, daß $\sup_{\mathfrak{M}} |y_n(M) - f(M)| \to 0$ für $n \to \infty$.

4. Der Schilowsche Rand $\mathfrak{M}$ einer vollsymmetrischen Algebra.

Theorem 3. *Der Schilowsche Rand einer vollsymmetrischen kommutativen Algebra stimmt mit dem Raum ihrer maximalen Ideale überein.*

Beweis. Es sei R eine vollsymmetrische kommutative Algebra, $\mathfrak{M}$ der Raum ihrer maximalen Ideale, M_0 ein beliebiges maximales Ideal von R und $f(M)$ eine stetige Funktion, die außerhalb einer gegebenen Umgebung $U(M_0)$ von M_0 gleich Null und in M_0 selbst gleich 1 sei. Nach Theorem 2 aus Nr. 3 gibt es eine Funktion $x(M)$, $x \in R$, die auf $\mathfrak{M}$ der Ungleichung $|f(M) - x(M)| < \frac{1}{3}$

genügt. Dann nimmt aber $|x(M)|$ sein Maximum in der Umgebung $U(M_0)$ an. Folglich ist für den Punkt M_0 die Voraussetzung von Theorem 2 aus § 13, Nr. 1, erfüllt, so daß M_0 zum SCHILOWschen Rand gehört. Da nun $M_0 \in \mathfrak{M}$ beliebig gewählt war, können wir schließen, daß der SCHILOWsche Rand mit $\mathfrak{M}$ übereinstimmt.

Folgerung. *Jedes maximale Ideal einer vollsymmetrischen kommutativen Algebra R_1 läßt sich zu einem maximalen Ideal einer beliebigen, R_1 umfassenden vollständigen normierten kommutativen Algebra erweitern.*

Zum Beweis genügt es, Theorem 3 aus § 13, Nr. 2, auf den hier vorliegenden Fall anzuwenden.

§ 15. Reguläre Algebren

1. Definition der regulären Algebra. Eine Familie $\mathscr{F}$ von Funktionen $x(t)$ über einem topologischen Raum T werde *regulär* genannt, wenn es zu jeder abgeschlossenen Menge $F \subset T$ und jedem Punkt $t_0 \notin F$ eine Funktion $x(t) \in \mathscr{F}$ gibt, die die Eigenschaften

$$x(t_0) \neq 0, \quad x(t) = 0 \quad \text{auf} \quad F$$

besitzt. Die Familie $\mathscr{F}$ heiße *normal*, wenn es zu je zwei disjunkten abgeschlossenen Mengen $F_1, F_2 \subset T$ eine Funktion $x(t) \in \mathscr{F}$ gibt, für die

$$x(t) = 0 \quad \text{auf} \quad F_1, \quad x(t) = 1 \quad \text{auf} \quad F_2 \quad .$$

gilt. Eine kommutative BANACHsche Algebra R mit Einselement soll *regulär* genannt werden, wenn die Familie aller Funktionen $x(M)$, die den Elementen x von R entsprechen, regulär ist. Ist diese Familie normal, so soll auch die Algebra R *normal* genannt werden.

Offenbar ist jede normale Familie regulär, so daß eine normale Algebra stets auch regulär ist. Weiter unten (vgl. Nr. 4) werden wir sehen, daß auch die Umkehrung richtig ist.

Beispiele. 1. Die Algebra $C(T)$ aller über einem HAUSDORFFschen bikompakten Raum T definierten stetigen Funktionen ist nach dem URYSOHNschen Lemma normal (vgl. § 2, Nr. 8, Satz II) und damit auch regulär.

2. Die Algebra $D_n(a, b)$ aus § 11, Nr. 2, Beispiel 3, ist offenbar ebenfalls regulär.

3. Die Algebra A (§ 11, Nr. 3) ist nicht regulär, denn jede Funktion $x(\zeta)$, die im Kreis $|\zeta| < 1$ holomorph und auf einer offenen Teilmenge dieses Kreises gleich Null ist, ist identisch gleich Null.

2. Normale Funktionenalgebren.

I. *Es sei $\mathscr{F}$ eine normale Familie von Funktionen $x(t)$, die auf einem topologischen Raum T definiert sind. In bezug auf die üblichen Operationen sei $\mathscr{F}$ eine Algebra mit Einselement. Ferner sei $\{U_1, U_2, \ldots, U_n\}$ eine aus den offenen*

Mengen $U_1, \ldots, U_n$ bestehende endliche Überdeckung des Raumes T. Dann gibt es in $\mathscr{F}$ Funktionen $x_1(t), \ldots, x_n(t)$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $x_k(t) = 0$ *außerhalb* U_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

b) $x_1(t) + x_2(t) + \cdots + x_n(t) = 1$ *auf* T.

Wir wollen den Satz durch einen Induktionsschluß beweisen. Zunächst sei $n = 2$. Dann sind die abgeschlossenen Mengen $F_1 = T - U_1$ und $F_2 = T - U_2$ disjunkt. Folglich gibt es in der normalen Familie $\mathscr{F}$ eine Funktion $x_1(t)$, die auf F_1 gleich Null und auf F_2 gleich Eins ist. Wird nun $x_2(t) = 1 - x_1(t)$ gesetzt, so sind $x_1(t)$ und $x_2(t)$ Funktionen, die den Bedingungen a) und b) für $n = 2$ genügen.

Angenommen, der Satz wäre bereits für Überdeckungen bewiesen, die aus $n - 1$ offenen Mengen bestehen. Gegeben sei eine Überdeckung, die aus den n offenen Mengen $U_1, U_2, \ldots, U_{n-1}, U_n$ besteht. Wir setzen

$$V_1 = U_1, \ldots, V_{n-2} = U_{n-2}, \quad V_{n-1} = U_{n-1} \cup U_n.$$

Nach Induktionsvoraussetzung gibt es in $\mathscr{F}$ Funktionen $y_1(t), \ldots, y_{n-1}(t)$ mit

α) $y_k(t) = 0$ außerhalb V_k;

β) $y_1(t) + \cdots + y_{n-1}(t) = 1$ auf T.

Setzen wir $W_1 = U_1 \cup \ldots \cup U_{n-1}$ und $W_2 = U_n$, so bilden auch W_1 und W_2 eine offene Überdeckung von T. Es gibt also zwei Funktionen $z_1(t)$ und $z_2(t)$ in $\mathscr{F}$ mit $z_1(t) + z_2(t) = 1$ auf T, $z_1(t) = 0$ außerhalb W_1 und $z_2(t) = 0$ außerhalb W_2. Wir setzen

$$x_1(t) = y_1(t), \ldots, x_{n-2}(t) = y_{n-2}(t), \; x_{n-1}(t) = y_{n-1}(t)\, z_1(t), \; x_n(t) = y_{n-1}(t)\, z_2(t)$$

Die so definierten Funktionen $x_1, \ldots, x_n \in \mathscr{F}$ leisten auf Grund der Bedingungen α) und β) das Gewünschte.[1])

Genügen die Funktionen $x_1, \ldots, x_n$ der Familie $\mathscr{F}$ den Bedingungen a) und b), so wollen wir sagen, $x_1, \ldots, x_n$ bilden eine zur Überdeckung $\{U_1, \ldots, U_n\}$ gehörige *Zerlegung des Einselements.*

Ist $\mathscr{F}$ insbesondere die Algebra $C(T)$ aller stetigen Funktionen über einem HAUSDORFFschen bikompakten Raum T, so sind die Voraussetzungen von Satz I gewiß erfüllt. Es gilt also der Satz

II. *Ist $\{U_1, \ldots, U_n\}$ eine aus den offenen Mengen $U_1, \ldots, U_n$ bestehende endliche Überdeckung des* HAUSDORFF*schen bikompakten Raumes T, so gibt es stetige Funktionen $x_1(t), x_2(t), \ldots, x_n(t)$, die folgenden Bedingungen genügen:*

a) $x_k(t) = 0$ *außerhalb* U_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$;

b) $x_1(t) + \cdots + x_n(t) = 1$.

Von den in Satz II erwähnten Funktionen $x_1, \ldots, x_n$ darf angenommen werden, daß für sie $0 \leq x_k(t) \leq 1$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ gilt; denn auf Grund des URYSOHNschen Lemmas (vgl. §2, Nr. 8, Satz II) können im Fall $\mathscr{F} = C(T)$ alle im Beweis von Satz I auftretenden Funktionen so gewählt werden, daß ihre Werte zwischen 0 und 1 liegen.

---

[1]) Der Beweis ist gegenüber dem Original leicht abgeändert. — *Anm. d. Red.*

Es sei $\mathscr{F}$ eine Familie von Funktionen, die auf einem topologischen Raum T definiert sind. Wir wollen von einer auf T definierten Funktion $y(t)$ sagen, *sie gehöre im Punkt* $\tau \in T$ *lokal zur Familie* $\mathscr{F}$, wenn es eine Funktion $x_\tau(t) \in \mathscr{F}$ und eine Umgebung $U(\tau)$ des Punktes τ gibt derart, daß $y(t) = x_\tau(t)$ für alle $t \in U(\tau)$ ist. Gehört $y(t)$ in jedem Punkt $\tau \in T$ lokal zu $\mathscr{F}$, so sagen wir kurz, *$y(t)$ gehöre lokal zur Familie $\mathscr{F}$.*

Theorem 1. *Es sei $\mathscr{F}$ eine normale Familie von Funktionen über einem bikompakten Raum T, die in bezug auf die üblichen Operationen eine Algebra mit Einselement bilden.*

Ist $y(t)$ eine auf T definierte Funktion, die lokal zu $\mathscr{F}$ gehört, so gehört $y(t)$ selbst zu $\mathscr{F}$, und zwar liegt $y(t)$ in dem von den Funktionen $x_\tau(t)$ erzeugten Ideal.

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es zu jedem Punkt $\tau \in T$ eine Funktion $x_\tau(t) \in \mathscr{F}$ und eine Umgebung $U(\tau)$ derart, daß

$$y(t) = x_\tau(t) \quad \text{in} \quad U(\tau).$$

Die Umgebungen $U(\tau)$ bilden eine Überdeckung des Raumes T, die wegen der Bikompaktheit von T eine endliche Überdeckung $\{U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)\}$ enthält. Es sei $\{y_1(t), \ldots, y_n(t)\}$ eine zu dieser Überdeckung gehörende Zerlegung der Einheit, bestehend aus Funktionen $y_1, \ldots, y_n \in \mathscr{F}$. Dann gilt

$$y(t)\, y_k(t) = x_{\tau_k}(t)\, y_k(t), \tag{1}$$

weil $y(t) = x_{\tau_k}(t)$ in $U(\tau_k)$ und $y_k(t) = 0$ außerhalb $U(\tau_k)$ gilt. Daher gehört auch $y(t) = y(t)\,y_1(t) + \cdots + y(t)\,y_n(t)$ zu $\mathscr{F}$. Wegen (1) gehört $y(t)$ zu dem von den $x_\tau(t)$ erzeugten Ideal.

3. Der Strukturraum einer Algebra. Es sei Δ eine Menge von primitiven[1]) zweiseitigen Idealen einer (nicht notwendig kommutativen) Algebra R mit Einselement. Wir wollen den Durchschnitt aller zu Δ gehörenden Ideale den *Kern* der Menge Δ nennen und mit $k(\Delta)$ bezeichnen. Offenbar ist $k(\Delta)$ ein zweiseitiges Ideal von R.

Nun sei I irgendein zweiseitiges Ideal von R. Die Gesamtheit aller primitiven zweiseitigen Ideale, die I umfassen, heiße *Hülle* des Ideals I und werde mit $h(I)$ bezeichnet. Offenbar gilt

$$\Delta \subset hk(\Delta), \quad I \subset kh(I). \tag{1}$$

Die Gesamtheit aller primitiven zweiseitigen Ideale der Algebra R bezeichnen wir mit $\mathfrak{M}$. In $\mathfrak{M}$ wird durch $\bar{\Delta} = hk(\Delta)$ für $\Delta \neq \emptyset$ und $\bar{\emptyset} = \emptyset$ eine Abschließungsoperation[2]) definiert. Die Axiome der Abschließung sind hierbei tatsächlich erfüllt. Wie man sofort sieht, gilt $\Delta \subset \bar{\Delta}$, $\bar{\bar{\Delta}} = \bar{\Delta}$ und $\bar{\emptyset} = \emptyset$. Es bleibt also nur noch die Beziehung $\overline{\Delta_1 \cup \Delta_2} = \bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2$ zu beweisen.

---

[1]) Vgl. § 7, Nr. 7.

[2]) Vgl. Fußnote auf S. 37.

Es sei $I \in \bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2$, etwa $I \in \bar{\Delta}_1$. Dann gilt $I \supset k(\Delta_1)$ und erst recht $I \supset k(\Delta_1 \cup \Delta_2)$. Dies bedeutet aber, daß $I \in hk(\Delta_1 \cup \Delta_2) = \overline{\Delta_1 \cup \Delta_2}$ ist. Folglich gilt

$$\bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2 \subset \overline{\Delta_1 \cup \Delta_2},$$

und es bleibt die umgekehrte Beziehung nachzuweisen.

Es sei I ein primitives Ideal mit $I \notin \bar{\Delta}_1 \cup \bar{\Delta}_2$. Dann gilt $I \not\supset k(\Delta_1)$ und $I \not\supset k(\Delta_2)$. Die Quotientenalgebra R/I ist primitiv, und folglich gilt für zwei beliebige zweiseitige Ideale $J_1 \neq (0)$ und $J_2 \neq (0)$ von R/I stets $J_1 J_2 \neq (0)$ (vgl. § 7, Nr. 7, Satz III). Dies gilt insbesondere für die Bilder J_1 und J_2 der Ideale $k(\Delta_1) + I$ bzw. $k(\Delta_2) + I$ bei dem natürlichen Homomorphismus $R \to R/I$; denn wegen $k(\Delta_1) + I \supset I$, $k(\Delta_2) + I \supset I$ und $k(\Delta_1) + I \neq I$, $k(\Delta_2) + I \neq I$ gilt $J_1 \neq (0)$ und $J_2 \neq (0)$. Nun bedeutet die Beziehung $J_1 J_2 \neq (0)$ aber, daß $k(\Delta_1)\, k(\Delta_2) \not\subset I$ gilt. Erst recht gilt dann $k(\Delta_1 \cup \Delta_2) \not\subset I$ wegen $k(\Delta_1)\, k(\Delta_2) \subset k(\Delta_1) \cap k(\Delta_2)$. Folglich ist $I \notin \overline{\Delta_1 \cup \Delta_2}$.

Somit ist $\bar{\Delta} = hk(\Delta)$ tatsächlich eine Abschließungsoperation. Mit der hierdurch festgelegten Topologie wird $\mathfrak{M}$ ein topologischer Raum. Im allgemeinen ist $\mathfrak{M}$ kein HAUSDORFFscher Raum. Man nennt $\mathfrak{M}$ den *Strukturraum* der Algebra R. Der Strukturraum werde fortan mit $\mathfrak{M}_s$ bezeichnet.

Wie man leicht sieht, ist im Fall einer BANACHschen kommutativen Algebra R mit Einselement ein Ideal R genau dann primitiv, wenn es maximal ist. Daher besteht der Raum $\mathfrak{M}_s$, wenn die Algebra R kommutativ ist, aus denselben Elementen wie der Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale von R. Die Topologie in $\mathfrak{M}_s$ ist jedoch im allgemeinen von der in $\mathfrak{M}$ definierten Topologie verschieden.

I. *Ist R eine* BANACH*sche kommutative Algebra mit Einselement, so ist die Topologie von $\mathfrak{M}_s$ höchstens so stark wie die von $\mathfrak{M}$, und die beiden Topologien stimmen dann und nur dann miteinander überein, wenn R regulär ist.*

Beweis. Es sei I ein Ideal der Algebra R und $\mathfrak{M}_x$ die Gesamtheit aller maximalen Ideale von R, die das Element x enthalten. Als Gesamtheit aller Punkte M, in denen die stetige Funktion $x(M)$ gleich Null wird, ist $\mathfrak{M}_x$ in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen. Daher ist $h(I) = \bigcap_{x \in I} \mathfrak{M}_x$ ebenfalls in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen. Insbesondere ist $hk(\Delta)$ in $\mathfrak{M}$ abgeschlossen. Folglich enthält $hk(\Delta)$ die abgeschlossene Hülle von Δ in $\mathfrak{M}$, so daß die Topologie von $\mathfrak{M}_s$ gewiß höchstens so stark wie die von $\mathfrak{M}$ ist. Die Topologien von $\mathfrak{M}_s$ und $\mathfrak{M}$ stimmen offenbar genau dann überein, wenn für jede in $\mathfrak{M}$ abgeschlossene Menge Δ die Gleichung

$$\Delta = hk(\Delta) = \bigcap_{x \in k(\Delta)} \mathfrak{M}_x$$

gilt. Wegen (1) gilt sie genau dann, wenn mit $M_0 \notin \Delta$ auch $M_0 \notin \bigcap_{x \in k(\Delta)} \mathfrak{M}_x$ ist, d. h., wenn $M_0 \notin \mathfrak{M}_{x_0}$ für wenigstens ein $x_0 \in k(\Delta)$ gilt. Dies bedeutet nun aber, daß $x_0(M_0) \neq 0$ und $x_0(M) = 0$ auf Δ ist, d. h., R ist regulär.

Diese Überlegungen sind auch auf eine beliebige Algebra R von stetigen Funktionen über einem topologischen Raum T anwendbar (R braucht nicht

alle stetigen Funktionen über T zu enthalten). In diesem Fall ist T im allgemeinen ein Teil der Menge $\mathfrak{M}$ aller maximalen Ideale von R. Wird die als topologischer Teilraum von $\mathfrak{M}_s$ betrachtete Menge T mit T_s bezeichnet, so gelangt man durch Wiederholung der beim Beweis von Satz I geführten Überlegungen zu folgendem Ergebnis:

II. *Ist R eine Algebra von stetigen Funktionen über einem topologischen Raum T und hat R ein Einselement, so ist die Topologie von T_s nicht stärker als die von T, und die beiden Topologien stimmen genau dann miteinander überein, wenn R eine reguläre Funktionenfamilie ist.*

4. Eigenschaften regulärer Algebren.

I. *Der* SCHILOW*sche Rand einer regulären Algebra R stimmt mit dem Raum der maximalen Ideale von R überein.*

Beweis. Es sei $M_0 \in \mathfrak{M}$ und $U(M_0)$ eine Umgebung des Ideals M_0. Nach der Definition der regulären Algebra gibt es in R eine Funktion $x(M)$, die außerhalb von $U(M_0)$ gleich Null und im Punkt M_0 gleich Eins ist. Der absolute Betrag von $x(M)$ kann dann nur in $U(M_0)$ sein Maximum annehmen. Auf Grund von Theorem 2 aus § 13, Nr. 1, folgt hieraus, daß M_0 zum SCHILOWschen Rand gehört. Folglich stimmt der SCHILOWsche Rand mit $\mathfrak{M}$ überein.

II. *Es sei R eine reguläre Algebra und F eine abgeschlossene Teilmenge des Raumes $\mathfrak{M}$ ihrer maximalen Ideale. Dann ist F der Raum der maximalen Ideale der Quotientenalgebra $R_F = R/k(F)$.*

Beweis. Es sei $x^\wedge \in R_F$ und x ein Repräsentant der Klasse $x^\wedge$. Für $M \in F$ setzen wir

$$x^\wedge(M) = x(M).$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl des Repräsentanten ab; aus $x' \in x^\wedge$ folgt nämlich $x' - x \in k(F)$, so daß $x'(M) - x(M) = 0$ ist für alle $M \in F$. Für $M \in F$ definiert die Zuordnung $x^\wedge \to x^\wedge(M)$ also einen Homomorphismus der Algebra R_F auf den Körper der komplexen Zahlen, wodurch ein bestimmtes maximales Ideal $M^\wedge$ der Algebra R_F festgelegt ist. Dieses maximale Ideal $M^\wedge$ ordnen wir dem Ideal M zu. Offenbar ist dann

$$x^\wedge(M^\wedge) = x^\wedge(M) = x(M).$$

Die auf diese Weise festgelegte Zuordnung $M \to M^\wedge$ ist eineindeutig. Um dies einzusehen, betrachten wir zwei verschiedene Ideale $M_1, M_2 \in F$, $M_1 \neq M_2$. In R gibt es dann ein Element $x(M)$, für das $x(M_1) \neq x(M_2)$ gilt. Ist $x^\wedge$ die x enthaltende Restklasse nach $k(F)$, so gilt $x^\wedge(M_1^\wedge) = x(M_1)$ und $x^\wedge(M_2^\wedge) = x(M_2)$, also auch $x^\wedge(M_1^\wedge) \neq x^\wedge(M_2^\wedge)$; folglich ist $M_1^\wedge \neq M_2^\wedge$.

Wir werden jetzt zeigen, daß F bei der Abbildung $M \to M^\wedge$ auf den Raum $\mathfrak{M}^\wedge$ aller maximalen Ideale der Algebra $R/k(F)$ abgebildet wird. Jedes Ideal $M_0^\wedge \in \mathfrak{M}^\wedge$ definiert einen Homomorphismus der Algebra $R/k(F)$ und damit auch der Algebra R auf den Körper der komplexen Zahlen. Demnach definiert

$M_0^\wedge$ ein Ideal $M_0 \in \mathfrak{M}$ derart, daß

$$x^\wedge(M_0^\wedge) = x(M_0) \quad \text{für} \quad x \in x^\wedge$$

ist. Hierbei ist $M_0 \in F$. Anderenfalls würde es nämlich in der regulären Algebra R ein Element $x(M)$ geben, das den Bedingungen

$$x(M_0) = 1, \quad x(M) = 0 \quad \text{auf} \quad F$$

genügt, so daß $x \in k(F)$ und $x^\wedge = 0$ wäre, was jedoch der Gleichung

$$x^\wedge(M_0^\wedge) = x(M_0) = 1$$

widerspricht. Somit wird F durch $M \to M^\wedge$ umkehrbar eindeutig auf $\mathfrak{M}^\wedge$ abgebildet. Bei dieser Abbildung gehen die stetigen Funktionen $x(M)$, $M \in F$, in stetige Funktionen $x^\wedge(M^\wedge)$, $x^\wedge \in R/k(F)$, über. Da F bikompakt ist, muß $M \to M^\wedge$ auf Grund von Theorem 3 aus § 11, Nr. 3, eine Homöomorphie sein, so daß $\mathfrak{M}^\wedge$ mit F identifiziert werden kann.

Theorem 2. *Ist I ein Ideal einer regulären Algebra R, so gibt es zu jeder abgeschlossenen Teilmenge F von $\mathfrak{M}$, die zu $h(I)$ disjunkt ist, in I eine Funktion $x(M)$, die auf F gleich Eins ist.*

Beweis. Wir betrachten die Quotientenalgebra $R/k(F)$. Auf Grund von Satz II ist F der Raum der maximalen Ideale von $R/k(F)$. Es sei I' das Bild des Ideals I bei dem natürlichen Homomorphismus $R \to R/k(F)$. Wir behaupten, daß $I' = R/k(F)$ ist. Anderenfalls wäre I' ein Ideal in $R/k(F)$. Dann müßte I' in einem maximalen Ideal $M^\wedge$ von $R/k(F)$ und damit auch I in einem Ideal $M \in F$ enthalten sein. Dies ist jedoch unmöglich, weil $h(I)$ und F nach Voraussetzung zueinander disjunkt sind. Es ist also tatsächlich $I' = R/k(F)$. Insbesondere enthält I' dann das Element $e^\wedge$ von $R/k(F)$. Dies bedeutet, daß das Ideal I ein Element x_0 enthält, das bei dem Homomorphismus $R \to R/k(F)$ in $e^\wedge$ übergeht. Nun wird aber e bei diesem Homomorphismus ebenfalls in $e^\wedge$ abgebildet. Daher ist $x_0 - e \in k(F)$, d. h., auf F gilt $x_0(M) - 1 = 0$ oder $x_0(M) = 1$, was zu zeigen war.

Folgerung. *Jede reguläre Algebra ist normal.*

Beweis. Es seien F_1 und F_2 abgeschlossene disjunkte Teilmengen von $\mathfrak{M}$. Wenden wir Theorem 2 auf das Ideal $I = k(F_1)$ und die Menge $F = F_2$ an, so erhalten wir eine Funktion $x_0(M)$, die auf F_1 gleich Null und auf F_2 gleich Eins ist.

Durch Kombination dieser Folgerung mit Theorem 1 aus Nr. 2 ergibt sich

Theorem 3. *Es sei R eine reguläre Algebra und $y(M)$ eine auf dem Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale von R definierte Funktion. Gehört $y(M)$ lokal zur Algebra aller Funktionen $x(M)$, $x \in R$, so gibt es ein Element $x \in R$ derart, daß $x(M) = y(M)$ für alle $M \in \mathfrak{M}$ ist. Hierbei gehört $y(M)$ zu dem Ideal, das von den mit $y(M)$ lokal übereinstimmenden Funktionen $x_\tau(M)$, $\tau \in \mathfrak{M}$, erzeugt wird.*

Man weiß bis jetzt noch nicht, ob dieser Satz auch dann gilt, wenn R nicht regulär ist.

Offenbar bleibt die Behauptung von Theorem 3 richtig, wenn die betrachtete reguläre Algebra durch eines ihrer Ideale ersetzt wird, d. h., es gilt

Theorem 3′. *Es sei R eine reguläre Algebra, I ein Ideal in R und schließlich $y(M)$ eine Funktion, die auf dem Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale von R definiert ist. Wenn $y(M)$ lokal zum Ideal I gehört, so gibt es ein Element $x \in I$ derart, daß $x(M) = y(M)$ für alle $M \in \mathfrak{M}$ ist.*

Die Voraussetzung, daß $y(M)$ lokal zu I gehört, läßt sich abschwächen, indem man den folgenden Satz heranzieht.

III. *Ist I ein Ideal der regulären Algebra R und y ein Element dieser Algebra, so gehört die Funktion $y(M)$ in jedem Punkt von $\mathfrak{M} - h(I)$ und in jedem inneren Punkt der Menge $h(y)$ lokal zu I.*

Beweis. Ist $M_0 \notin h(I)$, so gibt es eine Umgebung $U(M_0)$, deren abgeschlossene Hülle zu $h(I)$ disjunkt ist. Auf Grund von Theorem 2 gibt es daher im Ideal I eine Funktion $x_0(M)$, die auf der Umgebung $U(M_0)$ gleich Eins ist. Dann ist $y(M)x_0(M) = y(M)$ in $U(M_0)$ und $y(M)x_0(M) \in I$. Setzen wir nun $x_{M_0}(M) = y(M)x_0(M)$, so sehen wir, daß $y(M)$ im Punkt M_0 lokal zu I gehört. Ist $U(M_0) \subset h(y)$, so gilt $y(M) = 0$ in $U(M_0)$. Wird hier einfach $x_{M_0}(M) \equiv 0$ gesetzt, so folgt wiederum, daß $y(M)$ im Punkt M_0 lokal zu I gehört.

Es gilt demnach: *Die Behauptung von Theorem 3′ bleibt richtig, wenn $y(M)$ ein Element der Algebra R ist, das in jedem Punkt der Menge $h(I)$, der kein innerer Punkt der Menge $h(y)$ ist, lokal zum Ideal I gehört.*

Nun sei Δ irgendeine Menge von Idealen der Algebra R und I ein zu Δ gehörendes Ideal. Wir nennen I *minimal in* Δ, wenn es in Δ kein anderes Ideal gibt, das in I enthalten ist.

Theorem 4. *Es sei F eine abgeschlossene Menge im Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale einer halbeinfachen regulären Algebra R und $I_0(F)$ die Gesamtheit aller Elemente $x \in R$ mit der Eigenschaft, daß die Funktion $x(M)$ auf einer (von x abhängenden) offenen, F enthaltenden Menge gleich Null ist.*

Dann ist $I_0(F)$ das kleinste unter allen Idealen I von R, die der Bedingung $h(I) = F$ genügen.

Beweis. Offenbar gilt $hI_0(F) \supset F$. Andererseits gibt es, wenn $M_0 \notin F$ ist, eine offene Menge $U \supset F$, die M_0 ebenfalls nicht enthält, und eine Funktion $x_0(M)$, $x_0 \in R$, die in M_0 gleich Eins und auf U gleich Null ist. Folglich gilt auch $M_0 \notin hI_0(F)$. Daher ist

$$h\,I_0(F) = F. \tag{1}$$

Nun sei I irgendein Ideal, das der Bedingung $h(I) = F$ genügt. Wir wollen zeigen, daß $I \supset I_0(F)$ gilt. Es sei $y \in I_0(F)$ und $y(M) = 0$ auf der offenen Menge $U \supset F$. Die abgeschlossenen Mengen F und $\mathfrak{M} - U$ sind gewiß disjunkt, so daß es in I eine Funktion $z(M)$, $z \in R$, gibt, die auf $\mathfrak{M} - U$ gleich Eins ist. Dann ist aber $y(M) - y(M)z(M) \equiv 0$ und folglich $y = yz \in I$, weil R eine halbeinfache Algebra ist. Es gilt also $I \supset I_0(F)$, und unser Satz ist bewiesen.

IV. *Das Ideal $\overline{I_0(F)}$ ist das kleinste aller abgeschlossenen Ideale I der halbeinfachen regulären Algebra R, die der Bedingung $h(I) = F$ genügen. Es besteht aus den und nur den Elementen $x \in R$, für die es eine Folge $x_n \in R$ gibt mit folgenden Eigenschaften:*

a) $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$;

b) $x_n(M) = x(M)$ *auf einer offenen Menge* $U_n \supset F$.

Beweis. Auf Grund der Beziehung (1) gilt $h\overline{I_0(F)} = F$. Andererseits sei nun I ein abgeschlossenes Ideal mit der Eigenschaft $h(I) = F$. Dann gilt $I_0(F) \subset I$ und damit $\overline{I_0(F)} \subset I$. Folglich ist $\overline{I_0(F)}$ das kleinste aller abgeschlossenen Ideale I, für die $h(I) = F$ ist.

Jetzt sei $x \in \overline{I_0(F)}$, d. h., es sei $x = \lim\limits_{n\to\infty} y_n$, $y_n \in I_0(F)$. Dann gilt $y_n(M) = 0$ auf einer offenen Menge $U_n \supset F$ ($n = 1, 2, \ldots$). Folglich stimmt die Funktion $x_n(M) = x(M) - y_n(M)$ mit $x(M)$ auf U_n überein, und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} |x_n| = 0$, so daß die Bedingungen a) und b) erfüllt sind. Umgekehrt, ist $x_n \in R$ eine Folge, die diesen Bedingungen genügt, so gilt $y_n(M) = x(M) - x_n(M) = 0$ auf U_n, und daher ist $y_n \in I_0(F)$. Dann gilt aber $x = \lim\limits_{n\to\infty} y_n \in \overline{I_0(F)}$, womit Satz IV bewiesen ist.

Wir erinnern jetzt an die Definition eines primären Ideals I einer Algebra R: Ein Ideal I heißt *primär*, wenn es abgeschlossen und in nur einem maximalen Ideal dieser Algebra enthalten ist. Wird in Satz IV nun $F = \{M_0\}$ gesetzt, so folgt, daß $\overline{I_0(M_0)}$ das kleinste Ideal ist, für das $h\overline{I_0(M_0)} = M_0$ ist. Mit anderen Worten, es gilt der Satz

V. *Zu jedem maximalen Ideal einer halbeinfachen regulären Algebra gibt es unter allen in ihm enthaltenen primären Idealen ein kleinstes.*

Wir wollen sagen, eine Banachsche kommutative Algebra R mit Einselement *genüge der Bedingung* (D), wenn es zu jedem $M_0 \in \mathfrak{M}$ und jedem $x \in M_0$ eine Folge $x_n \in R$ gibt, für die folgendes gilt:

a) $x_n(M) = 0$ in einer gewissen Umgebung $U_n(M_0)$;

b) $xx_n \to x$ für $n \to \infty$.

Theorem 5 (G. E. Schilow [5])[1]). *Es sei R eine halbeinfache reguläre Algebra, die der Bedingung* (D) *genügt, und I ein abgeschlossenes Ideal von R. Dann enthält I jedes Element x aus $kh(I)$, für das der Durchschnitt des Randes von $h(x)$ mit $h(I)$ keine nichtleere perfekte Menge enthält.*

Beweis. Es sei Δ die Gesamtheit aller maximalen Ideale M, für die $x(M)$ nicht lokal zu I gehört. Es soll gezeigt werden, daß Δ eine perfekte Menge ist. Offenbar ist Δ abgeschlossen, und nach Satz III gilt $\Delta \subset h(I)$. Wir nehmen an, Δ enthalte einen isolierten Punkt M_0. Es sei U eine solche Umgebung von M_0, daß in jedem Punkt $M \neq M_0$ ihrer abgeschlossenen Hülle $\overline{U}$ die Funktion $x(M)$ lokal zu I gehört. Da $M_0 \in \Delta \subset h(I)$ und $x \in kh(I)$ ist, folgt $x \in M_0$.

---

[1]) Dieser Satz ist eine Verallgemeinerung eines Satzes von W. A. Ditkin [1].

Dann gibt es aber auf Grund von (D) eine Folge $y_n \in R$ derart, daß $y_n x \to x$ für $n \to \infty$ und in einer gewissen Umgebung $U_n(M_0)$ stets $y_n(M) = 0$ ist. Nun sei z ein Element von R, für das $z(M) = 0$ in $\mathfrak{M} - U$ und $z(M) = 1$ in einer gewissen Umgebung $V(M_0) \subset U$ gilt. Dann gehört $y_n xz$ in jedem Punkt $M \in \mathfrak{M}$ lokal zum Ideal I, und daher gilt $y_n xz \in I$ (vgl. Theorem 3′). Da I abgeschlossen ist, gilt wegen $y_n x \to x$ auch $xz \in I$, und folglich gehört $x(M)$ im Punkt M_0 lokal zu I. Dieser Widerspruch zeigt, daß Δ perfekt ist. Nach Satz III ist Δ im Durchschnitt von $h(I)$ mit dem Rand der Menge $h(x)$ enthalten. Dann kann Δ nach Voraussetzung nur die leere Menge sein, d. h., x gehört lokal zum Ideal I, und daher ist $x \in I$.

5. Algebren ohne Einselement. Unsere oben gewonnenen Ergebnisse lassen sich leicht auf den Fall einer Algebra R ohne Einselement übertragen. Die Rolle des oben betrachteten Raumes $\mathfrak{M}$ übernimmt hierbei der lokal bikompakte Raum der maximalen regulären Ideale von R unter Einbeziehung des unendlich fernen Punktes M_∞ und aller Funktionen $x(M)$ von R, die im Punkt M_∞ gleich Null sind. Daher ist in den oben formulierten Definitionen und Sätzen überall dort, wo von Werten $x(M) \neq 0$, insbesondere von Werten $x(M) = 1$, gesprochen wird, der Punkt M_∞ auszuschließen. Die genaueren Formulierungen und Begründungen seien dem Leser überlassen (vgl. Loomis [1]). Wir beschränken uns hier auf den Beweis nachstehender Folgerung aus Nr. 4, Theorem 4.

Folgerung. *Es sei R eine halbeinfache reguläre Algebra mit der Eigenschaft, daß die Menge R' aller Elemente x, für die $x(M)$ außerhalb einer bikompakten Menge in $\mathfrak{M} - M_\infty$ (die von x abhängen darf) gleich Null ist, in R dicht ist. Dann ist jedes abgeschlossene Ideal I von R in einem maximalen regulären Ideal enthalten.*

Beweis. Wir nehmen das Gegenteil an: Es sei I ein abgeschlossenes Ideal, das in keinem maximalen regulären Ideal enthalten ist. Dann wäre $h(I)$ die leere Menge. Außerdem ist aber auch $h(R')$ leer, weil R' in R dicht ist. Auf Grund von Theorem 4 aus Nr. 4 ist R' das kleinste unter allen Idealen I', für die $h(I')$ leer ist. Folglich wäre $I \supset R'$. Da R' in R dicht und I abgeschlossen ist, folgt hieraus, daß $I = R$ sein müßte. Dies widerspricht aber der Voraussetzung, daß I ein Ideal ist.

6. Eine hinreichende Bedingung für die Regularität einer Algebra. Erwähnt sei an dieser Stelle die folgende Regularitätsbedingung (ihren Beweis findet man bei Schilow [5]): *Ist R eine Banachsche Algebra mit Einselement und reellen*[1]) *Erzeugenden und gilt für jede dieser Erzeugenden z die Bedingung*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \ln |e^{itz}| \frac{dt}{1+t^2} < \infty,$$

so ist R regulär.

Wir bringen in diesem Paragraphen noch keine Anwendungen der Theorie der regulären Algebren. Es erschien zweckmäßig, diese erst in § 31, Nr. 8, zu behandeln.

[1]) Ein Element x einer Algebra R heiße *reell*, wenn die ihm entsprechende Funktion $x(M)$ für alle $M \in \mathfrak{M}$ reell ist.

§ 16. Vollreguläre kommutative Algebren

1. Definition und Eigenschaften der vollregulären Algebren. Es sei R eine symmetrische (nicht notwendig kommutative) Algebra. Eine auf R definierte Norm $|x|$ werde *vollregulär* genannt, wenn

$$|x^* x| = |x|^2 \quad \text{für alle} \quad x \in R \quad \text{ist.} \tag{1}$$

Ist $|x|$ eine vollreguläre Norm, so folgt aus

$$|x|^2 = |x^* x| \leqq |x|\,|x^*|,$$

daß $|x| \leqq |x^*|$ ist. Aus Symmetriegründen gilt dann aber auch $|x^*| \leqq |x|$. Daher ist $|x^*| = |x|$, d. h., *jede Algebra mit vollregulärer Norm ist eine normierte symmetrische Algebra* (vgl. § 10, Nr. 3). Eine normierte symmetrische Algebra heiße *vollregulär*, wenn ihre Norm vollregulär ist. Offenbar ist jede symmetrische Teilalgebra einer vollregulären Algebra ebenfalls vollregulär.

I. *Die vollständige Hülle einer vollregulären Algebra ist vollregulär.*

Beweis. Es sei $\tilde{R}$ die vollständige Hülle der vollregulären Algebra R. Ist $x \in \tilde{R}$, so gibt es eine Folge $x_n \in R$ derart, daß $|x - x_n| \to 0$ für $n \to \infty$. Dann gilt aber auch $|x^* - x_n^*| \to 0$ für $n \to \infty$. Daher folgt $|x^* x| = |x|^2$, indem man in der Gleichung $|x_n^* x_n| = |x_n|^2$ zur Grenze übergeht.

II. *In einer vollregulären Algebra R gilt*

$$|x| = \sup_{y \in R} \frac{|xy|}{|y|}.$$

Aus der Ungleichung $|xy| \leqq |x|\,|y|$ folgt nämlich, daß

$$\frac{|xy|}{|y|} \leqq |x|$$

ist, wobei wegen (1) für $y = x^*$ das Gleichheitszeichen steht.

III. *Es sei R eine vollreguläre (nicht notwendig kommutative) Algebra ohne Einselement und R_1 die aus R durch Adjunktion eines Einselements entstehende Algebra. Dann kann die vollreguläre Norm von R zu einer vollregulären Norm von R_1 fortgesetzt werden, und zwar so, daß mit R auch R_1 eine vollständige Algebra ist.*

Beweis. Wir definieren in R_1 eine Norm durch

$$|\lambda e + x| = \sup_{y \in R} \frac{|\lambda y + xy|}{|y|}. \tag{2}$$

Offenbar ist $|\lambda e + x|$ die Norm eines Operators, nämlich des Operators der Linksmultiplikation mit $\lambda e + x$. Daher genügt $|\lambda e + x|$ allen Axiomen der Norm einer Algebra und setzt die in R definierte Norm fort.

Um zu zeigen, daß die so definierte Norm vollregulär ist, betrachten wir eine beliebige positive Zahl c, die kleiner als Eins ist. Wegen (2) gibt es ein Element $y \in R$, für das

$$|y| = 1 \quad \text{und} \quad c\,|\lambda e + x| < |\lambda y + xy|$$

ist. Hieraus folgt

$$\begin{aligned} c^2|\lambda e+x|^2 &< |\lambda y+xy|^2 = |(\lambda y+xy)^*(\lambda y+xy)| \\ &= |y^*(\lambda e+x)^*(\lambda e+x)\,y| \leqq |y^*|\,|(\lambda e+x)^*(\lambda e+x)\,y| \\ &= |((\lambda e+x)^*(\lambda e+x))\,y| \leqq |(\lambda e+x)^*(\lambda e+x)|. \end{aligned}$$

Es gilt also

$$c^2|\lambda e+x|^2 \leqq |(\lambda e+x)^*(\lambda e+x)|.$$

Da c, $0<c<1$, beliebig ist, muß demzufolge

$$|\lambda e+x|^2 \leqq |(\lambda e+x)^*(\lambda e+x)| \tag{3}$$

sein. Andererseits gilt in einer normierten Algebra stets

$$|(\lambda e+x)^*(\lambda e+x)| \leqq |(\lambda e+x)^*|\,|\lambda e+x|.$$

Folglich ist $|\lambda e+x| \leqq |(\lambda e+x)^*|$. Aus Symmetriegründen ist dann aber auch $|(\lambda e+x)^*| \leqq |\lambda e+x|$, und folglich gilt

$$|(\lambda e+x)^*(\lambda e+x)| \leqq |(\lambda e+x)^*|\,|\lambda e+x| = |\lambda e+x|^2.$$

Durch Vergleich mit (3) folgt hieraus schließlich

$$|\lambda e+x|^2 = |(\lambda e+x)^*(\lambda e+x)|.$$

Wir setzen nun R als vollständig voraus. Zu zeigen ist, daß R_1 mit der oben definierten Norm ebenfalls vollständig ist. Hierzu betrachten wir irgendeine Fundamentalfolge $\{\lambda_n e+x_n\}$ von R_1. Die Folge $\{\lambda_n\}$ ist gewiß beschränkt. Anderenfalls gäbe es nämlich eine Teilfolge $\lambda_{k_n}\to\infty$ mit

$$e+\frac{1}{\lambda_{k_n}}x_{k_n} = \frac{1}{\lambda_{k_n}}(\lambda_{k_n}e+x_{k_n}) \to 0$$

für $n\to\infty$. Dann wäre e Limes der aus den Elementen $-\frac{1}{\lambda_{k_n}}x_{k_n}$ des vollständigen Raumes R gebildeten Folge, so daß e entgegen der Annahme zu R gehören würde. Demzufolge ist die Folge λ_n beschränkt, und es gibt eine Teilfolge λ_{k_n}, die einen endlichen Grenzwert λ hat. Dann ist aber $\lambda_{k_n}e$ eine Fundamentalfolge und mit ihr auch

$$x_{k_n} = (\lambda_{k_n}e+x_{k_n}) - \lambda_{k_n}e.$$

Wegen der Vollständigkeit von R hat die Folge x_{k_n} in R einen Limes x. Es gilt daher $\lambda_{k_n}e+x_{k_n}\to\lambda e+x\in R_1$. Da $\{\lambda_n e+x_n\}$ eine Fundamentalfolge ist, gilt auch $\lambda_n e+x_n\to\lambda e+x$, womit die Vollständigkeit von R_1 bewiesen ist.

Beispiele. 1. Die Algebra $C(T)$ aller beschränkten stetigen Funktionen über dem topologischen Raum T (vgl. § 10, Nr. 1, Beispiel 1) ist vollregulär; es gilt nämlich

$$|x^*x| = \sup_{t\in T}|\overline{x(t)}\,x(t)| = \sup_{t\in T}|x(t)|^2 = \left(\sup_{t\in T}|x(t)|\right)^2 = |x|^2.$$

2. Die Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ aller beschränkten Operatoren im Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ ist vollregulär. Dies folgt aus der im Hilbertschen Raum geltenden Beziehung (vgl. § 5, Nr. 10 (2))

$$|A^*A| = |A|^2.$$

2. Realisierungen vollregulärer kommutativer Algebren.

Theorem 1 (I. M. Gelfand und M. A. Neumark [1]). *Es sei R eine* Banach*sche kommutative Algebra mit Einselement. In R möge eine Involution definiert sein, welche außer den üblichen algebraischen Bedingungen*

$$(\lambda x + \mu y)^* = \bar{\lambda} x^* + \bar{\mu} y^*,$$

$$x^{**} = x,$$

$$(x y)^* = y^* x^*$$

noch der Bedingung[1])

$$|x^* x| = |x^*|\,|x| \tag{1}$$

genügt. Dann ist die Algebra R der Algebra $C(\mathfrak{M})$ aller stetigen Funktionen $x(M)$[2]) *über dem Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale von R vollisomorph.*

Beweis. Wir zeigen zunächst, daß in R die Gleichung

$$|x^2| = |x|^2$$

gilt. Aus (1) folgt

$$\begin{aligned} |x^{*2}|\,|x^2| = |x^{*2} x^2| = |(x^* x)^* (x^* x)| = |(x^* x)^*|\,|x^* x| \\ = |x^* x|\,|x^* x| = |x^* x|^2 = |x^*|^2 |x|^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Andererseits ist

$$|x^{*2}| \leqq |x^*|^2, \quad |x^2| \leqq |x|^2.$$

Folglich gilt (2) nur dann, wenn

$$|x^{*2}| = |x^*|^2, \quad |x^2| = |x|^2.$$

Hieraus folgt

$$\sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{|x^{2^n}|} = \lim_{n \to \infty} \sqrt[2^n]{|x|^{2^n}} = |x|$$

(vgl. § 11, Nr. 2, Satz IV), so daß R einer Teilalgebra der Algebra $C(\mathfrak{M})$ isometrisch isomorph ist.

Wir zeigen nun, daß

$$x^*(M) = \overline{x(M)}$$

ist. Hierzu bezeichnen wir mit M^* die Gesamtheit aller Elemente x^*, $x \in M$. Nach § 14, Nr. 1, ist M^* ebenfalls ein maximales Ideal, und es gilt

$$x^*(M^*) = \overline{x(M)} \tag{3}$$

für alle $x \in R$. Offenbar ist die Zuordnung $M \to M^*$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung von $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{M}$. Diese Zuordnung ist sogar eine Homöomorphie.

[1]) Das Erfülltsein der Bedingung $|x^*| = |x|$ ist nicht vorausgesetzt. Sie ergibt sich als Folgerung aus den übrigen Voraussetzungen des Satzes.

[2]) In der Algebra $C(\mathfrak{M})$, wie überhaupt in jeder Algebra $C(T)$, sind Norm und Involution durch die Formeln

$$|x| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|, \quad x^*(M) = \overline{x(M)}$$

definiert.

Zum Beweis betrachten wir eine Umgebung $U(M_0)$, die durch Ungleichungen

$$|x_k(M) - x_k(M_0)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

festgelegt ist; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ bezeichnen feste Elemente der Algebra R, und ε ist eine feste positive Zahl. Wegen (3) können diese Ungleichungen auch in der Gestalt

$$|x_k^*(M^*) - x_k^*(M_0^*)| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

geschrieben werden. Folglich bildet die Zuordnung $M \to M^*$ jede Umgebung $U(M_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon)$ in eine Umgebung $U(M_0^*; x_1^*, \ldots, x_n^*; \varepsilon)$ ab. Da der entsprechende Sachverhalt auch für die inverse Abbildung $M^* \to M$ gilt, ist $M \to M^*$ tatsächlich eine Homöomorphie.

Nun sei Γ der SCHILOWsche Rand von R (vgl. § 13, Nr. 1). Es soll gezeigt werden, daß $M^* = M$ für alle $M \in \Gamma$ ist. Wir nehmen das Gegenteil an, für ein gewisses $M_0 \in \Gamma$ sei also $M_0^* \neq M_0$. Dann existieren disjunkte Umgebungen $U(M_0^*)$ und $U(M_0)$. Wegen der Stetigkeit der Abbildung $M \to M^*$ gibt es eine Umgebung $V(M_0) \subset U(M_0)$ derart, daß $(V(M_0))^* \subset U(M_0^*)$ ist. Daher sind $V(M_0)$ und $(V(M_0))^*$ disjunkt. Auf Grund von Theorem 2 aus § 13, Nr. 1, gibt es ein Element $x_0(M)$ mit der Eigenschaft, daß $|x_0(M)|$ sein Maximum $|x_0|$ in $V(M_0)$ annimmt und außerhalb von $V(M_0)$ kleiner als $|x_0|$ bleibt. Dann nimmt die Funktion $|x_0^*(M)| = |x_0(M^*)|$ (vgl. (3)) ihr Maximum $|x_0^*|$ in $(V(M_0))^*$ an, während sie außerhalb von $(V(M_0))^*$ kleiner als $|x_0^*|$ bleibt. Auf Grund von Theorem 2 aus § 13, Nr. 1, schließen wir hieraus, daß auch $M_0^* \in \Gamma$ ist. Folglich ist $M \to M^*$ eine Abbildung von Γ auf Γ. Außerdem gilt nach Konstruktion der Funktion $x_0(M)$

$$|x_0^* x_0| = \max_{M \in \mathfrak{M}} |x_0^*(M)\, x_0(M)| = \max_{M \in \mathfrak{M}} (|x_0^*(M)|\,|x_0(M)|)$$
$$< \max_{M \in \mathfrak{M}} |x_0^*(M)| \max_{M \in \mathfrak{M}} |x_0(M)| = |x_0^*|\,|x_0|.$$

Damit haben wir einen Widerspruch zur Bedingung (1) erhalten.

Es gilt also $M^* = M$ für alle $M \in \Gamma$. Hieraus und aus (3) schließen wir auf

$$x^*(M) = \overline{x(M)} \quad \text{für alle} \quad M \in \Gamma. \tag{4}$$

Die Funktionen $x(M)$ sollen jetzt nur auf Γ betrachtet werden. Hierbei gilt auf Grund der Definition von Γ die Beziehung

$$|x| = \max_{M \in \Gamma} |x(M)|,$$

und daher ist die Zuordnung $x \to x(M)$, $M \in \Gamma$, ein Isomorphismus. Die Beziehung (4) zeigt, daß die Algebra der Funktionen $x(M)$ über Γ vollsymmetrisch ist. Daraus ziehen wir unter Berücksichtigung der Beziehung $|x^2| = |x|^2$ und unter Anwendung der Folgerung 2 aus § 14, Nr. 3, den Schluß, daß die Zuordnung $x \to x(M)$ ein voller Isomorphismus der Algebra R auf die gesamte Algebra $C(\Gamma)$ ist. Nach § 14, Theorem 3, ist dann aber Γ der Raum

der maximalen Ideale von R, d. h., es gilt $\Gamma = \mathfrak{M}$. Damit ist der Satz bewiesen.[1])

Theorem 2.[2]) *Jede vollständige vollreguläre kommutative Algebra mit Einselement ist der Algebra $C(\mathfrak{M})$ aller stetigen Funktionen über dem Raum $\mathfrak{M}$ ihrer maximalen Ideale vollisomorph.*

Eine vollreguläre Algebra genügt nämlich stets der Bedingung $|x^* x| = |x^*||x|$, so daß nur noch Theorem 1 anzuwenden bleibt.

Folgerung 1. *Es sei R eine* Banach*sche kommutative Algebra ohne Einselement, und es sei in R eine Involution definiert, die außer den üblichen algebraischen Bedingungen noch der Bedingung*

$$|x^* x| = |x^*||x| \tag{5}$$

genügt. Dann ist R vollisomorph der Algebra $C_0(T)$ aller über einem lokal bikompakten Raum T definierten stetigen Funktionen $x(t)$, die der Bedingung

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

genügen.

Beweis. Es sei R_1 die aus R durch Adjunktion des Einselements entstehende symmetrische Algebra. Wir definieren in R_1 durch die Formel (2) aus Nr. 1 eine Norm. Aus der beim Beweis von Satz III aus Nr. 1, geführten Überlegung geht hervor, daß die so definierte Norm ebenfalls der Bedingung (5) genügt und daß R_1 in bezug auf diese Norm vollständig ist. Daher ist R_1 der Algebra $C(\mathfrak{M})$ vollisomorph; $\mathfrak{M}$ bezeichnet hierbei den Raum der maximalen Ideale von R_1. Eines der maximalen Ideale ist die Algebra R. Wir setzen nun $M_0 = R$ und bezeichnen mit T den Raum, der aus $\mathfrak{M}$ durch Fortnahme des Punktes M_0 entsteht. Dann ist T lokal bikompakt. Eine Funktion $x(M)$ gehört dann und nur dann zu $R = M_0$, wenn $x(M_0) = 0$ ist, d. h., wenn $\lim\limits_{M \to M_0} (M) = 0$. Da M_0 aber der unendlich ferne Punkt von T ist, ist unsere Folgerung bewiesen.

Folgerung 2. *Jede vollständige vollreguläre kommutative Algebra ohne Einselement ist der Algebra $C_0(T)$ aller über einem lokal bikompakten Raum T definierten stetigen Funktionen $x(t)$, die der Bedingung*

$$\lim_{t \to \infty} x(t) = 0$$

genügen, vollisomorph.

Dies folgt unmittelbar aus der Folgerung 1, weil eine vollreguläre Algebra der Bedingung $|x^* x| = |x^*||x|$ genügt.

---

[1]) Ein anderer Beweis von Theorem 1, der ohne Benutzung des Schilowschen Randes auskommt, wurde später von Arens [1] gegeben.

[2]) Der Unterschied dieses Satzes zu Theorem 1 besteht darin, daß dort anstelle der Bedingung $|x^* x| = |x|^2$ die schwächere Bedingung $|x^* x| = |x^*||x|$ gestellt wird.

Folgerung 3. *Jede vollreguläre kommutative Algebra R ist einer symmetrischen Teilalgebra einer zu einem lokal bikompakten Raum T gehörenden Algebra $C(T)$ vollisomorph.*

Beweis. Wir adjungieren zunächst, falls dies notwendig ist, zu R das Einselement und vervollständigen die so erhaltene Algebra. So gelangen wir zu einer Algebra R_1, die ebenfalls vollregulär ist. In R_1 ist R als symmetrische Teilalgebra enthalten. Es bezeichne T den Raum der maximalen Ideale von R_1. Dann ist R_1 der Algebra $C(T)$ vollisomorph, so daß R einer symmetrischen Teilalgebra von $C(T)$ vollisomorph ist.

Folgerung 4. *Jede Algebra R, die den Voraussetzungen von Theorem 1 genügt (also auch jede vollständige vollreguläre kommutative Algebra mit Einselement), ist vollsymmetrisch.*

Eine solche Algebra R ist nämlich stets der vollsymmetrischen Algebra $C(\mathfrak{M})$ isomorph. Da $C(\mathfrak{M})$ regulär ist, gilt die

Folgerung 5. *Jede vollständige vollreguläre kommutative Algebra mit Einselement ist regulär.*

Die Umkehrung hiervon gilt nicht; die Algebra $D_n(a, b)$ (§ 11, Nr. 2, Beispiel 3) ist wohl regulär, aber nicht vollregulär.

In den weiteren Folgerungen soll R überall eine vollständige vollreguläre kommutative Algebra sein.

Folgerung 6. *Ist x_0 ein Element einer Algebra R mit Einselement und $f(\lambda)$ eine auf dem Spektrum von x_0 stetige Funktion, so gibt es in R ein und nur ein Element y_0 mit der Eigenschaft, daß $y_0(M) = f(x_0(M))$ für alle maximalen Ideale M von R gilt. Das Spektrum von y_0 besteht aus allen Zahlen $f(\lambda)$, die sich ergeben, wenn λ das Spektrum S_{x_0} von x_0 durchläuft. Es ist $|y_0| = \sup_{\lambda \in S_{x_0}} |f(\lambda)|$.*

Beweis. Die Funktion $f(x_0(M))$ ist stetig und gehört demzufolge zur Algebra $C(\mathfrak{M})$, die der Algebra R vollisomorph ist. Folglich gibt es in R genau ein Element y_0, für das $y_0(M) = f(x_0(M))$, $M \in \mathfrak{M}$, ist. Das Spektrum des Elements y_0 ist die Gesamtheit aller Werte $y_0(M) = f(\lambda)$ mit $\lambda = x_0(M)$. Daher gilt

$$|y_0| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |y_0(M)| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |f(x_0(M))| = \sup_{\lambda \in S_{x_0}} |f(\lambda)|. \tag{6}$$

Das Element y_0 werde mit $f(x_0)$ bezeichnet; die Funktion $y = f(x)$ heißt *stetige Funktion f des Elements x*. Wegen (6) gilt

$$\|f(x)\| = \sup_{\lambda \in S_x} |f(\lambda)|.$$

Die Folgerung 6 läßt sich leicht auf stetige Funktionen mehrerer Veränderlicher ausdehnen. Hierzu vereinbaren wir, die Gesamtheit aller Systeme $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$, $\lambda_k = x_k(M) \in S_{x_k}$, *Spektrum des Systems der Elemente* $x_1, \ldots, x_n$ zu nennen. Durch Wiederholen der obigen Überlegungen gelangt man dann zu folgendem Ergebnis, das als Verallgemeinerung der Folgerung 6 anzusehen ist.

Folgerung 7. *Sind $x_1, \ldots, x_n$ Elemente einer Algebra R mit Einselement, so gibt es zu jeder Funktion $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, die auf dem Spektrum der Elemente $x_1, \ldots, x_n$ stetig ist, ein und nur ein Element $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ der Algebra R derart, daß $y(M) = f(x_1(M), \ldots, x_n(M))$ für alle maximalen Ideale M von R gilt. Das Spektrum des Elements $f(x_1, \ldots, x_n)$ besteht aus allen Zahlen $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, die sich ergeben, wenn $\{\lambda_1, \ldots, \lambda_n\}$ das Spektrum des Systems $x_1, \ldots, x_n$ durchläuft. Außerdem gilt*

$$|f(x_1, \ldots, x_n)| = \sup |f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)|, \tag{7}$$

wobei die obere Grenze in bezug auf das Spektrum des Systems $x_1, \ldots, x_n$ zu nehmen ist.

Die Behauptungen der Folgerungen 6 und 7 lassen sich auf vollständige vollreguläre Algebren ohne Einselement übertragen. In diesem Fall existiert $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ für jede Funktion $f(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, die auf dem Spektrum des Systems $x_1, \ldots, x_n$ stetig und für $\lambda_1 = 0, \ldots, \lambda_n = 0$ gleich Null ist. Um dies einzusehen, genügt es, zu R ein Einselement zu adjungieren. Dann existiert das Element $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ in der durch Adjunktion erhaltenen Algebra R'. Da für das maximale Ideal R von R' die Beziehungen $x_1(R) = 0, \ldots, x_n(R) = 0$ bestehen und folglich $y(R) = f(x_1(R), \ldots, x_n(R)) = f(0, \ldots, 0) = 0$ ist gehört y zu R.

Folgerung 8. *Jedes hermitesche Element $x \in R$ läßt sich in der Gestalt $x = u - v$ darstellen, wobei u und v hermitesche Elemente von R sind, die nichtnegative Spektren haben und der Beziehung $uv = 0$ genügen.*

Beweis. Es genügt, $u = f_1(x)$ und $v = f_2(x)$ zu setzen, wobei

$$f_1(\lambda) = \max\{\lambda, 0\} \quad \text{und} \quad f_2(\lambda) = \max\{-\lambda, 0\}$$

ist. Da $\lambda = f_1(\lambda) - f_2(\lambda)$ und $f_1(\lambda) f_2(\lambda) = 0$ ist, folgt $x = u - v$ und $uv = 0$.

Folgerung 9. *Das Element $y = f(x)$ gehört zu jeder x enthaltenden abgeschlossenen symmetrischen Teilalgebra $R_1 \subset R$ mit Einselement. Ist $f(0) = 0$, so gehört $y = f(x)$ auch zu jeder x enthaltenden abgeschlossenen symmetrischen Teilalgebra ohne Einselement. Insbesondere gehört $f(x)$ für $f(0) = 0$ zu jedem x enthaltenden abgeschlossenen symmetrischen Ideal der Algebra R.*

Beweis. Wir setzen $x = x_1 + i x_2$, $\lambda = \lambda_1 + i \lambda_2$ und

$$f(\lambda) = f_1(\lambda_1, \lambda_2) + i f_2(\lambda_1, \lambda_2),$$

wobei x_1, x_2 hermitesche Elemente und $\lambda_1, \lambda_2, f_1, f_2$ sämtlich reell sind. Wie man leicht sieht, gilt dann $f(x) = f_1(x_1, x_2) + i f_2(x_1, x_2)$. Es bezeichne S das Spektrum des Systems x_1, x_2. Nach dem Satz von Weierstrass-Stone (vgl. § 2, Nr. 10, Theorem 2) gibt es eine Folge von Polynomen $p_n(\lambda_1, \lambda_2)$, die auf S gleichmäßig gegen $f_1(\lambda_1, \lambda_2)$ konvergiert. Wegen (7) gilt

$$|f_1(x_1, x_2) - p_n(x_1, x_2)| = \sup_S |f_1(\lambda_1, \lambda_2) - p_n(\lambda_1, \lambda_2)| \to 0$$

für $n \to \infty$. Ist nun $R_1 \subset R$ eine abgeschlossene symmetrische Teilalgebra mit Einselement, die x enthält, so gilt $p_n(x_1, x_2) \in R_1$ und damit $f_1(x_1, x_2) \in R_1$. Entsprechend gilt $f_2(x_1, x_2) \in R_1$, so daß auch $f(x) = f_1(x_1, x_2) + i f_2(x_1, x_2) \in R_1$. Ist nun R_1 eine Algebra ohne Einselement und $f(0) = 0$, so gilt $p_n(0, 0) \to 0$. Wird jetzt $\tilde{p}_n(\lambda_1, \lambda_2) = p_n(\lambda_1, \lambda_2) - p_n(0, 0)$ gesetzt, so gilt demzufolge $\sup\limits_S |f_1(\lambda_1, \lambda_2) - \tilde{p}_n(\lambda_1, \lambda_2)| \to 0$, wobei $\tilde{p}_n(x_1, x_2) \in R_1$ ist. Hieraus schließen wir wieder, daß $f(x)$ zu R_1 gehört.

Die hinsichtlich der Ideale ausgesprochene Behauptung ist ein Spezialfall des bereits Bewiesenen, weil ein Ideal als Algebra ohne Einselement angesehen werden kann.

Die Forderung nach Symmetrie des Ideals $I \subset R$ ist auf Grund des folgenden Satzes überflüssig.[1])

Theorem 3. *Jedes abgeschlossene Ideal I der Algebra $C(\mathfrak{M})$ stimmt mit der Gesamtheit derjenigen Funktionen $x(M)$ der Algebra $C(\mathfrak{M})$ überein, die auf der abgeschlossenen Menge $F = h(I)$ gleich Null sind, d. h., es ist*

$$I = kh(I).$$

Beweis. Wir setzen $\mathfrak{M}_1 = \mathfrak{M} - F$ und $I' = k(F) = kh(I)$. Dann ist $\mathfrak{M}_1$ lokal bikompakt, und es gilt $I' \supset I$. Hierbei ist I' per definitionem die Gesamtheit aller Funktionen $x(M)$, die auf F gleich Null sind. Die nur über $\mathfrak{M}_1$ betrachteten Funktionen von I' bilden folglich die Algebra aller stetigen Funktionen über $\mathfrak{M}_1$, die im Unendlichen gleich Null sind. Die nur über $\mathfrak{M}_1$ betrachteten Funktionen von I bilden dann eine Teilalgebra von I', die im Sinne der Norm $|x| = \sup\limits_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)|$ vollständig ist. Sind nun M_1 und M_2 zwei verschiedene Punkte von $\mathfrak{M}_1$, so gibt es auf Grund des Urysohnschen Lemmas (§ 2, Nr. 8, Satz II) in der Algebra $C(\mathfrak{M})$ eine Funktion $x(M)$, die auf F und in M_1 gleich Null und in M_2 gleich Eins ist. Da $M_2 \notin h(I)$ ist, gibt es im Ideal I eine Funktion $y(M)$, die im Punkt M_2 von Null verschieden ist. Dann ist aber $x(M)\, y(M)$ eine Funktion von I, die in M_1 gleich Null und in M_2 ungleich Null ist. Auf Grund des Satzes von Stone (§ 2, Nr. 10) folgt hieraus aber, daß $I' = I$ ist.

Theorem 3 läßt sich auch noch wie folgt formulieren:

Jedes abgeschlossene Ideal I einer vollständigen vollregulären kommutativen Algebra mit Einselement ist der Durchschnitt aller I umfassenden maximalen Ideale und daher symmetrisch.

Eine der wichtigsten und bis jetzt noch ungelösten Aufgaben der Theorie der normierten Algebren besteht in der Angabe von Bedingungen, unter denen jedes abgeschlossene zweiseitige Ideal einer Algebra der Durchschnitt der umfassenden maximalen Ideale ist (vgl. hierzu Schilow [5]).

---

[1]) Für Algebren, die aus reellen Funktionen bestehen, wurde dieser Satz zuerst von Stone [3] bewiesen; der Beweis für den allgemeinen Fall stammt von I. M. Gelfand und G. E. Schilow [1] (vgl. auch Schilow [5]).

Folgerung 10. *Ist I ein abgeschlossenes Ideal einer vollständigen vollregulären kommutativen Algebra R mit Einselement, so ist die Quotientenalgebra R/I eine vollständige vollreguläre Algebra mit Einselement, die der Algebra $C(F)$, $F = h(I)$, vollisomorph ist.*

Beweis. Wir ordnen jeder Funktion $x = x(M)$ der Algebra $R = C(\mathfrak{M})$ die nur über $F = h(I)$ betrachtete Funktion $x^\wedge(M) = x(M)$ zu. Die so erhaltene Zuordnung $x(M) \to x^\wedge(M)$ ist ein symmetrischer Homomorphismus der Algebra $C(\mathfrak{M})$ auf die Algebra $C(F)$. Sein Kern ist $kh(I) = I$. Daher ist $C(F)$ der Algebra R/I symmetrisch isomorph. Wir wollen zeigen, daß diese Zuordnung sogar isometrisch ist.

Es sei $\xi \in R/I$. Dann besteht ξ aus Funktionen $x(M) = x^\wedge(M)$ auf F. Hierbei gilt

$$|x| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)| \geqq \sup_{M \in F} |x(M)| = |x^\wedge|.$$

Daher gilt auch

$$|\xi| = \inf_{x \in \xi} |x| \geqq |x^\wedge|.$$

Um die entgegengesetzte Ungleichung zu beweisen, nehmen wir eine Funktion $x(M) = x^\wedge(M)$ auf F und eine Zahl $\varepsilon > 0$. Mit U bezeichnen wir die Gesamtheit aller Punkte $M \in \mathfrak{M}$ mit der Eigenschaft, daß $|x(M) - x(M')| < \varepsilon$ für ein $M' \in F$ ist. Dann ist U eine offene Menge, in der F enthalten ist. Auf U gilt $|x(M)| < |x^\wedge| + \varepsilon$. Nun gibt es auf Grund des Urysohnschen Lemmas eine stetige Funktion $y(M)$ mit Werten zwischen Null und Eins, die auf F gleich Eins und außerhalb von U gleich Null ist. Da $x(M)\,y(M) = x(M) = x^\wedge(M)$ auf F ist, ist auch $xy \in \xi$, und es gilt

$$|\xi| \leqq |xy| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |x(M)\,y(M)| \leqq \sup_{M \in U} |x(M)| \leqq |x^\wedge| + \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ willkürlich gewählt werden kann, folgt hieraus $|\xi| \leqq |x^\wedge|$, womit der Beweis abgeschlossen ist.

Bemerkung. Die Folgerung 10 läßt sich auf Algebren ohne Einselement ausdehnen; es gilt nämlich:

Ist I ein abgeschlossenes Ideal einer vollständigen vollregulären kommutativen Algebra R, so ist die Quotientenalgebra R/I ebenfalls eine vollständige vollreguläre Algebra und damit einer Algebra[1] $C_0(T)$ *vollisomorph.*

Beweis. Die aus der Algebra R ohne Einselement durch Adjunktion eines Einselements entstehende Algebra R' ist vollregulär. Daher ist R'/I einer Algebra $C(T)$ vollisomorph. Folglich ist auch R/I einer Algebra $C_0(T)$ vollisomorph.

3. Verallgemeinerung auf pseudonormierte Algebren. Ein über einer Algebra R definiertes konvexes Funktional $p(x)$ werde *Pseudonorm* genannt, wenn folgendes gilt:

$$p(xy) \leqq p(x)\,p(y) \quad \text{für alle} \quad x, y \in R \quad \text{und} \quad p(x) \not\equiv 0 \quad \text{in } R.$$

[1]) $C_0(T)$ bezeichnet die Gesamtheit aller stetigen Funktionen über dem lokal bikompakten Raum T, die im Unendlichen verschwinden (vgl. S. 244).

Eine topologische Algebra R heiße *pseudonormiert*, wenn es eine ausreichende Menge P von konvexen Funktionalen gibt, die über R Pseudonormen sind und die Topologie von R definieren.

Als Beispiel für eine solche Algebra kann die Algebra $C^\wedge(T)$ aller stetigen komplexen Funktionen über einem lokal bikompakten topologischen Raum T mit den in üblicher Weise definierten Operationen dienen.

Setzt man für jede bikompakte Menge $K \subset T$

$$p_K(x) = \max_{t \in K} |x(t)|,$$

so erhält man in der Gesamtheit der so definierten $p_K(x)$ eine ausreichende Menge konvexer Funktionale. Die $p_K(x)$ sind Pseudonormen von $C^\wedge(T)$. Wird

$$x^*(t) = \overline{x(t)}$$

gesetzt, so kann $C^\wedge(T)$ als symmetrische Algebra aufgefaßt werden.

Es entsteht die Frage, ob es möglich ist, alle kommutativen pseudonormierten Algebren zu charakterisieren, die einer solchen Algebra $C^\wedge(T)$ topologisch und symmetrisch isomorph sind. Eine Antwort auf diese Frage wurde von R. Arens [5] bei folgenden zusätzlichen Einschränkungen gegeben.

Unter einer *lokal endlichen Zerlegung des Einselements* versteht man eine Funktion x_p, $p \in P$, mit Werten in R, die folgenden Bedingungen genügt:

a) Für jedes $p \in P$ ist die Funktion $p'(x_p)$ nur für eine endliche Menge S_p von Funktionalen $p' \in P$ von Null verschieden;

b) $p'(x_p) \leqq 1$ für alle $p' \in S_p$;

c) für jedes $p \in P$ kann die Funktion $p(x_{p'})$ nur für $p' \in S_p$ von Null verschieden sein;

d) für beliebige $p' \in P$ und $y \in R$ gilt

$$p'(y - \sum_{p \in S_{p'}} y x_p) = 0.$$

Beispielsweise gibt es in der oben betrachteten Algebra $C^\wedge(T)$ eine lokal endliche Zerlegung des Einselements, wenn der Raum T so beschaffen ist, daß in jeder seiner offenen Überdeckungen $\{G\}$ eine lokal endliche Überdeckung $\{G'\}$ enthalten ist. Hierbei heißt $\{G'\}$ *lokal endlich*, wenn jeder Punkt $t \in T$ eine Umgebung hat, die nur endlich viele Mengen dieser Überdeckung schneidet. Ein Raum T mit der Eigenschaft, daß jede seiner offenen Überdeckungen eine lokal endliche Überdeckung umfaßt, wird *parakompakt* genannt (Dieudonné [1]).

Das von R. Arens erzielte Hauptresultat besteht in folgendem Satz: *Jede kommutative vollständige pseudonormierte symmetrische Algebra R, die eine lokal endliche Zerlegung des Einselements besitzt und in der*

$$p(xx^*) \geqq C_p\, p(x)\, p(x^*)$$

für jede Pseudonorm p von R gilt, ist einer Algebra $C^\wedge(T)$ topologisch und symmetrisch isomorph; dabei ist T ein lokal bikompakter parakompakter topologischer Raum.

Die Resultate der Paragraphen 11 bis 15 dieses Kapitels stammen von folgenden Autoren: § 11 von Gelfand [1,4]; § 12 und § 15 von Gelfand und Schilow [1] und von Schilow [5]; § 13 und § 14, Nr. 4, von Schilow [3] (vgl. auch Gelfand, Raikow und Schilow [1]); § 14 von Raikow [6] (vgl. auch Gelfand, Raikow und Schilow [1]). Von Schilow stammt eine große Anzahl von Arbeiten, in denen reguläre Algebren und eine Reihe anderer spezieller Fragen der Theorie der normierten Algebren behandelt werden (vgl. Schilow [1–18]).

Der Begriff des SCHILOWschen Randes (vgl. § 13) wurde in Arbeiten von MILMAN [4] sowie ARENS und SINGER [1] weiter entwickelt.

Theorem 1 aus § 15 wurde in einer etwas anderen Formulierung zuerst von M. G. KREIN [4, 5] bewiesen. Der Begriff des Strukturraumes wurde von JACOBSON [2] eingeführt; dieser Begriff führt zur Verallgemeinerung von Resultaten, die von GELFAND und SCHILOW [1] erzielt wurden.

Die Resultate von § 16 stammen im wesentlichen von GELFAND und NEUMARK [1]. Der Satz III aus § 16, Nr. 1, für den Fall einer kommutativen Algebra und die Ergebnisse von § 16, Nr. 3, wurden von ARENS [2, 5] erhalten. Theorem 3 aus § 16, Nr. 2, wurde von GELFAND und SCHILOW [1] bewiesen.

KAPITEL IV

DARSTELLUNGEN SYMMETRISCHER ALGEBREN

§ 17. Grundlegende Begriffe und Sätze der Darstellungstheorie

1. Definition der Darstellung. Einfache Eigenschaften. Unter einer *Darstellung* einer Algebra R versteht man einen Homomorphismus dieser Algebra in eine Algebra von linearen Operatoren in einem Vektorraum. Dieser Raum heißt der *Darstellungsraum.*

Wir werden uns im folgenden auf die Untersuchung von symmetrischen Darstellungen symmetrischer Algebren beschränken. Ein Beispiel für eine symmetrische Algebra ist die Gesamtheit $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ aller beschränkten linearen Operatoren im HILBERTschen Raum $\mathfrak{H}$ (vgl. § 10, Nr. 1, Beispiel 2). Die Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ wird von nun an eine wichtige Rolle spielen. Unter einer *symmetrischen Darstellung* einer symmetrischen Algebra R verstehen wir einen symmetrischen Homomorphismus $x \to A_x$ dieser Algebra in eine Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Wenn im folgenden von einer „Darstellung" gesprochen wird, so soll damit stets eine symmetrische Darstellung gemeint sein. Eine Darstellung heiße *stetig,* wenn der entsprechende Homomorphismus stetig ist. Wir nennen eine Darstellung *zyklisch,* wenn es im Raum $\mathfrak{H}$ einen Vektor ξ_0 gibt derart, daß die Menge aller Vektoren $A_x\xi_0$ in $\mathfrak{H}$ dicht ist. Wir sagen dann, der Vektor ξ_0 und der Raum $\mathfrak{H}$ seien für die Darstellung $x \to A_x$ zyklisch.

Zwei Darstellungen $x \to A_x$ bzw. $x \to B_x$ in den Räumen $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}'$ sollen *äquivalent* genannt werden, wenn es eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$ gibt, bei der für jedes $x \in R$ der Operator A_x in den Operator B_x übergeht. Mit anderen Worten, ist U diese isometrische Abbildung und $\xi' = U\xi$, so gilt $B_x\xi' = UA_x\xi$. Dann ist $B_xU\xi = UA_x\xi$ für alle ξ aus $\mathfrak{H}$, also $B_xU = UA_x$.

Somit bedeutet die Äquivalenz von Darstellungen $x \to A_x$ bzw. $x \to B_x$ in den Räumen $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}'$, daß es einen Operator U gibt, der eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\mathfrak{H}'$ vermittelt und dabei der Bedingung $B_xU = UA_x$ genügt.

Ein Teilraum $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ heißt *invariant,* wenn jeder Vektor aus $\mathfrak{H}_1$ bei Anwendung sämtlicher Operatoren A_x wieder in $\mathfrak{H}_1$ abgebildet wird.

Ist $\mathfrak{H}_1$ ein abgeschlossener invarianter Teilraum, so können alle Operatoren A_x als Operatoren in $\mathfrak{H}_1$ angesehen werden. Wir erhalten dann eine Darstellung im Raum $\mathfrak{H}_1$. Diese Darstellung heiße *Komponente* der ursprünglichen Darstellung.

I. *Ist $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ invariant, so ist das orthogonale Komplement zu $\mathfrak{H}_1$ ebenfalls invariant.*

Beweis. Es sei ξ ein zu $\mathfrak{H}_1$ orthogonaler Vektor, d. h., es sei $\langle\xi, \eta\rangle = 0$ für alle $\eta \in \mathfrak{H}_1$. Dann gilt $\langle A_x\xi, \eta\rangle = \langle\xi, A_x^*\eta\rangle = \langle\xi, A_{x^*}\eta\rangle = 0$, weil $A_{x^*}\eta \in \mathfrak{H}_1$ ist. Folglich ist der Vektor $A_x\xi$ zu $\mathfrak{H}_1$ orthogonal.

Nun sei P_1 eine in $\mathfrak{H}$ definierte Projektion auf einen abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{H}_1$.

II. *$\mathfrak{H}_1$ ist genau dann ein abgeschlossener invarianter Teilraum, wenn alle Operatoren der Darstellung mit der Projektion P_1 auf $\mathfrak{H}_1$ vertauschbar sind.*

Beweis. Ist $\mathfrak{H}_1$ ein abgeschlossener invarianter Teilraum und $\xi \in \mathfrak{H}_1$, so ist auch $A_x\xi \in \mathfrak{H}_1$. Daher gilt für jeden Vektor $\xi \in \mathfrak{H}$

$$A_x P_1 \xi \in \mathfrak{H}_1;$$

folglich ist

$$P_1 A_x P_1 \xi = A_x P_1 \xi,$$

also

$$P_1 A_x P_1 = A_x P_1.$$

Wendet man nun die Involutionsoperation auf beide Seiten dieser Gleichung an und ersetzt danach x durch x^*, so ergibt sich auch

$$P_1 A_x P_1 = P_1 A_x.$$

Folglich ist $P_1 A_x = A_x P_1$, d. h., die Operatoren P_1 und A_x sind miteinander vertauschbar.

Umgekehrt, sind diese Operatoren miteinander vertauschbar, so gilt

$$P_1 A_x \xi = A_x P_1 \xi = A_x \xi \quad \text{für} \quad \xi \in \mathfrak{H}_1.$$

Mit $\xi \in \mathfrak{H}_1$ gilt also auch $A_x\xi \in \mathfrak{H}_1$, d. h., $\mathfrak{H}_1$ ist ein invarianter Teilraum.

III. *Die abgeschlossene lineare Hülle $\mathfrak{M}$ von invarianten Teilräumen ist ebenfalls ein invarianter Teilraum.*

Beweis. Jedes Element ξ von $\mathfrak{M}$ ist Limes endlicher Summen der Gestalt $\xi' = \xi_1 + \cdots + \xi_n$, wobei $\xi_1, \ldots, \xi_n$ Vektoren der entsprechenden Teilräume sind. Andererseits ist $A_x\xi' = A_x\xi_1 + \cdots + A_x\xi_n$ eine Summe derselben Gestalt mit dem Limes $A_x\xi$.

2. Direkte Summe von Darstellungen. Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge. Gegeben sei eine Gesamtheit von Darstellungen $x \to A_x^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, einer symmetrischen Algebra R in den Räumen $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$. Hierbei gelte

$$|A_x^{(\alpha)}| \leq C_x, \tag{1}$$

wobei C_x nicht von α abhängt. Mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir die direkte Summe der Räume $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$, d. h. die Gesamtheit aller Elemente $\xi = \{\xi_\alpha\}$ mit

$$\sum_\alpha |\xi_\alpha|^2 < +\infty$$

(vgl. § 5, Nr. 6). Wir setzen

$$A_x \xi = \{A_x^{(\alpha)} \xi_\alpha\}.$$

Wegen (1) ist dann A_x ein beschränkter Operator in $\mathfrak{H}$, und die Abbildung $x \to A_x$ ist eine Darstellung im Raum $\mathfrak{H}$. Wir nennen sie *direkte Summe* der Darstellungen $x \to A_x^{(\alpha)}$. Ist $\xi = \{\xi_\alpha\}$ ein Element mit der Eigenschaft, daß $\xi_\alpha = 0$ für $\alpha \neq \alpha_0$ ist, so soll es mit ξ_{α_0} identifiziert werden. Dadurch wird jeder Raum $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$ zu einem abgeschlossenen invarianten Teilraum des Raumes $\mathfrak{H}$. Alsdann stimmt die Komponente der Darstellung $x \to A_x$ im Raum $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$ mit der Darstellung $x \to A_x^{(\alpha_0)}$ im Raum $\mathfrak{H}^{(\alpha_0)}$ überein. Der Raum $\mathfrak{H}$ erscheint so als direkte Summe der invarianten Teilräume $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$.

Jede Darstellung ist die direkte Summe von zyklischen Darstellungen.

Beweis. Es sei $\xi_0 \neq 0$ irgendein Vektor aus $\mathfrak{H}$. Wir betrachten die Gesamtheit aller Vektoren $A_x \xi_0$, wenn x die ganze Algebra R durchläuft. Die abgeschlossene Hülle dieser Gesamtheit werde mit $\mathfrak{H}_1$ bezeichnet. Offenbar ist $\mathfrak{H}_1$ ein abgeschlossener invarianter Teilraum, in dem ξ_0 ein zyklischer Vektor ist. Mit anderen Worten, $\mathfrak{H}_1$ ist ein zyklischer Teilraum der Darstellung $x \to A_x$.

Ist $\mathfrak{H}_1 = \mathfrak{H}$, so ist unsere Behauptung bereits bewiesen. Anderenfalls ist $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_1$ ein von (0) verschiedener invarianter Teilraum. Geht man anstelle von $\mathfrak{H}$ jetzt von $\mathfrak{H} - \mathfrak{H}_1$ aus, so ergibt sich genauso wie im Vorhergehenden ein zyklischer Teilraum $\mathfrak{H}_2 \perp \mathfrak{H}_1$.

Wir bezeichnen nun mit M die Gesamtheit aller Systeme $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$, die aus zueinander orthogonalen zyklischen Teilräumen der Darstellung $x \to A_x$ bestehen. Eines dieser Systeme ist das soeben konstruierte System $\{\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2\}$. Ordnen wir M mit Hilfe der Inklusionsbeziehung „$\subset$", so wird M zu einer halbgeordneten Menge, die der Voraussetzung des ZORNschen Lemmas genügt; die obere Grenze einer linear geordneten Menge von Systemen $\{\mathfrak{H}_\alpha\} \in M$ ist die Vereinigung dieser Systeme. Daher gibt es in M ein maximales System $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$. Dann ist aber $\mathfrak{H} = \sum_\alpha \oplus \mathfrak{H}_\alpha$; anderenfalls gäbe es nämlich in dem invarianten Teilraum $\mathfrak{H} - \sum_\alpha \oplus \mathfrak{H}_\alpha$ einen von (0) verschiedenen zyklischen Teilraum $\mathfrak{H}_0$. Dann wäre $\{\mathfrak{H}_\alpha\} \cup \mathfrak{H}_0$ ein zu M gehörendes System, welches das System $\{\mathfrak{H}_\alpha\}$ als echten Teil enthielte. Dies ist aber unmöglich.

3. Beschreibung einer Darstellung mit Hilfe positiver Funktionale. Es sei $x \to A_x$ eine Darstellung einer symmetrischen Algebra R in einem Raum $\mathfrak{H}$. Wir nehmen irgendeinen Vektor $\xi_0 \neq 0$ von $\mathfrak{H}$ und setzen

$$f(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle.$$

Dann ist $f(x)$ ein positives Funktional; es gilt nämlich

$$f(x^* x) = \langle A_{x^* x} \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle A_x^* A_x \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle A_x \xi_0, A_x \xi_0 \rangle \geqq 0.$$

Theorem 1. *Jede symmetrische Darstellung einer* BANACH*schen symmetrischen Algebra R ist stetig; es gilt*

$$|A_x| \leqq |x|.$$

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß R ein Einselement hat. Anderenfalls setzt man einfach $A_{\lambda e + x} = \lambda 1 + A_x$

und hat damit eine Fortsetzung der Darstellung $x \to A_x$ von R zu einer Darstellung der BANACHschen symmetrischen Algebra, die aus R durch Adjunktion eines Einselements entsteht. Wenn nun R ein Einselement hat, so ergibt sich durch Anwendung der Ungleichung (1) aus § 10, Nr. 4, auf das positive Funktional $f(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$

$$|\langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle| \leqq |x| \langle \xi_0, \xi_0 \rangle.$$

Wird hier $x^* x$ anstelle von x gesetzt, so folgt

$$|\langle A_{x^*x} \xi_0, \xi_0 \rangle| \leqq |x^* x| \langle \xi_0, \xi_0 \rangle \leqq |x|^2 \langle \xi_0, \xi_0 \rangle,$$

d. h., es ist

$$|A_x \xi_0|^2 \leqq |x|^2 |\xi_0|^2.$$

Da nun aber ξ_0 ein beliebiger Vektor von $\mathfrak{H}$ ist, schließen wir aus dieser Ungleichung auf

$$|A_x| \leqq |x|.$$

Unser Ziel ist die Beschreibung einer Darstellung mit Hilfe positiver Funktionale. Es erweist sich als zweckmäßig, dieses Problem zunächst für den Fall zyklischer Darstellungen zu betrachten.

Es seien $x \to A_x$ bzw. $x \to B_x$ zyklische Darstellungen in den Räumen $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}'$ und ξ_0 bzw. ξ_0' zyklische Vektoren dieser Darstellungen. Wir setzen

$$f(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle, \quad f'(x) = \langle B_x \xi_0', \xi_0' \rangle.$$

I. *Gilt $f(x) = f'(x)$ für alle x von R, so sind die Darstellungen $x \to A_x$ und $x \to B_x$ einander äquivalent.*

Beweis. Jedem Vektor $\xi = A_x \xi_0$ des Raumes $\mathfrak{H}$ ordnen wir den Vektor $\xi' = B_x \xi_0'$ des Raumes $\mathfrak{H}'$ zu. Um einzusehen, daß diese Abbildung isometrisch ist, nehmen wir irgendwelche Vektoren $\xi_1 = A_{x_1} \xi_0$, $\xi_2 = A_{x_2} \xi_0$. Dann ist $\xi_1' = B_{x_1} \xi_0'$, $\xi_2' = B_{x_2} \xi_0'$, und es gilt

$$\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle A_{x_1} \xi_0, A_{x_2} \xi_0 \rangle = \langle A_{x_2^* x_1} \xi_0, \xi_0 \rangle = f(x_2^* x_1),$$
$$\langle \xi_1', \xi_2' \rangle = \langle B_{x_1} \xi_0', B_{x_2} \xi_0' \rangle = \langle B_{x_2^* x_1} \xi_0', \xi_0' \rangle = f'(x_2^* x_1).$$

Nach Voraussetzung gilt nun $f(x_2^* x_1) = f'(x_2^* x_1)$, also $\langle \xi_1, \xi_2 \rangle = \langle \xi_1', \xi_2' \rangle$, womit die Isometrie der Abbildung bewiesen ist. Da die beiden Elemente ξ_0 und ξ_0' zyklisch sind, bilden die Elemente der Gestalt $A_x \xi_0$ bzw. $B_x \xi_0'$ Mengen, die in $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}'$ dicht sind. Demnach wird bei unserer isometrischen Abbildung $\xi \to \xi'$ eine in $\mathfrak{H}$ dichte Menge in eine in $\mathfrak{H}'$ dichte Menge übergeführt. Dann läßt sich die Abbildung aber auf genau eine Weise zu einer isometrischen Abbildung des Raumes $\mathfrak{H}$ auf den Raum $\mathfrak{H}'$ fortsetzen (vgl. § 5, Nr. 10, Satz II).

Sind $\xi = A_x \xi_0$ und $\xi' = B_x \xi_0'$ einander entsprechende Vektoren aus $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}'$, so sind auch $A_{x_0} \xi = A_{x_0 x} \xi_0$ und $B_0 \xi' = B_{x_0 x} \xi_0'$ einander entsprechende Vektoren. Dies bedeutet aber, daß bei dieser Abbildung der Operator A_{x_0} in den Operator B_{x_0} übergeht. Folglich sind unserere Darstellungen miteinander äquivalent.

Aus Satz I folgt: *Eine zyklische Darstellung $x \to A_x$ mit dem zyklischen Vektor ξ_0 ist durch das positive Funktional $f(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt.*

Es entsteht natürlich die Frage, ob es zu jedem positiven Funktional $f(x)$ eine zyklische Darstellung $x \to A_x$ mit $f(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$ gibt. Diese Frage kann im Fall einer BANACHschen symmetrischen Algebra R mit Einselement bejaht werden.

Es sei $f(x)$ ein positives Funktional über R. Wir definieren in R die hermitesche bilineare Form $\langle x, y \rangle = f(y^* x)$ (vgl. § 5, Nr. 1). Hierbei kann der Fall eintreten, daß für gewisse Elemente x die Beziehung $\langle x, x \rangle = f(x^* x) = 0$ gilt. Jedes solche Element x soll *äquivalent Null* genannt werden, in Zeichen $x \sim 0$.

Es bezeichne I_l die Gesamtheit aller Elemente x, die äquivalent Null sind.

I_l ist ein Linksideal der Algebra R.

Beweis. Ist $x \sim 0$ und y ein beliebiges Element der Algebra R, so ist $f(yx) = 0$; auf Grund der SCHWARZschen Ungleichung gilt nämlich

$$|f(yx)|^2 \leq f(yy^*) f(x^* x) = 0.$$

Nun sei $x_1 \in I_l$ und $x_2 \in I_l$. Dann ist

$$f\big((x_1 + x_2)^* (x_1 + x_2)\big) = f(x_1^* x_1) + f(x_1^* x_2) + f(x_2^* x_1) + f(x_2^* x_2) = 0,$$

d. h. $x_1 + x_2 \in I_l$; denn der erste und letzte Summand sind wegen $x_1 \sim 0$ und $x_2 \sim 0$ gleich Null, während der zweite und dritte Summand auf Grund der SCHWARZschen Ungleichung verschwinden. Nun sei $x \sim 0$ und y ein beliebiges Element von R. Wir setzen $z = x^* y^* y$. Dann gilt

$$f\big((yx)^* yx\big) = f(x^* y^* yx) = f(zx) = 0,$$

d. h. $yx \in I_l$. Somit ist I_l ein Linksideal.

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{H}'$ den Quotientenraum R/I_l und mit $\xi, \eta, \ldots$ Elemente dieses Raumes, d. h. Restklassen nach I_l. Es seien x bzw. y Repräsentanten von ξ bzw. η. Wir setzen

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle x, y \rangle = f(y^* x).$$

Der so definierte Ausdruck $\langle \xi, \eta \rangle$ hängt nicht von der Wahl der Repräsentanten x und y ab; denn sind etwa x' und x'' zwei Repräsentanten von ξ, so gilt $x' - x'' \sim 0$ und folglich

$$\langle x', y \rangle - \langle x'', y \rangle = \langle x' - x'', y \rangle = f\big(y^* (x' - x'')\big) = 0.$$

Wie man leicht sieht, hat $\langle \xi, \eta \rangle$ sämtliche Eigenschaften eines skalaren Produktes:

a) $\langle \xi, \eta \rangle = \overline{\langle \eta, \xi \rangle}$;
b) $\langle \lambda \xi + \mu \eta, \zeta \rangle = \lambda \langle \xi, \zeta \rangle + \mu \langle \eta, \zeta \rangle$;
c) $\langle \xi, \xi \rangle > 0$ für $\xi \neq 0$.

Das Erfülltsein von b) ist trivial. Da $f(x)$ ein reelles Funktional ist, gilt offenbar auch a). Lediglich c) bedarf einer näheren Begründung.

Es sei x ein Element von ξ. Da $f(x)$ ein positives Funktional ist, gilt

$$\langle \xi, \xi \rangle = f(x^* x) \geqq 0.$$

Ist hierbei nun $\langle \xi, \xi \rangle = f(x^* x) = 0$, so muß $x \sim 0$ sein, d. h., es ist $\xi = 0$.

Damit ist in $\mathfrak{H}'$ ein skalares Produkt definiert. Die vollständige Hülle von $\mathfrak{H}'$ in bezug auf dieses skalare Produkt werde mit $\mathfrak{H}$ bezeichnet. Dann ist $\mathfrak{H}$ ein HILBERTscher Raum.

Wir konstruieren jetzt eine Darstellung im Raum $\mathfrak{H}$. Es sei $\xi = \{x\}$ die Klasse mit dem Repräsentanten x. Mit $\eta = \{x_0 x\}$ bezeichnen wir die Klasse mit dem Repräsentanten $x_0 x$. Da I_l ein Linksideal ist, hängt η nicht von der Wahl des Repräsentanten x der Klasse ξ ab. Wir setzen

$$A_{x_0} \xi = \{x_0 x\}.$$

Offenbar ist A_{x_0} ein linearer Operator in $\mathfrak{H}'$. Wir wollen zeigen, daß er beschränkt ist. Nach Definition des skalaren Produktes in $\mathfrak{H}'$ gilt

$$|A_{x_0} \xi|^2 = \langle A_{x_0} \xi, A_{x_0} \xi \rangle = \langle x_0 x, x_0 x \rangle = f(x^* x_0^* x_0 x). \tag{2}$$

Wir setzen

$$f_1(y) = f(x^* y x).$$

Offenbar ist $f_1(y)$ ein positives Funktional; es ist nämlich

$$f_1(y^* y) = f(x^* y^* y x) = f\big((y x)^* y x\big) \geqq 0.$$

Wird auf $f_1(y)$ die Ungleichung (1) aus § 10, Nr. 4, angewandt, so folgt

$$|f_1(y)| \leqq f_1(e) |y|.$$

Insbesondere gilt für $y = x_0^* x$ also

$$|f_1(x_0^* x_0)| \leqq f_1(e) |x_0^* x_0| \leqq f_1(e) |x_0|^2,$$

d. h.

$$|f(x^* x_0^* x_0 x)| \leqq f(x^* x) |x_0|^2 = \langle \xi, \xi \rangle |x_0|^2.$$

Wegen (2) ist daher

$$|A_{x_0} \xi|^2 \leqq |x_0|^2 |\xi|^2,$$

d. h., A_{x_0} ist ein beschränkter Operator in $\mathfrak{H}'$, und seine Norm ist nicht größer als $|x_0|$:

$$|A_{x_0}| \leqq |x_0|. \tag{3}$$

Demzufolge kann A_{x_0} auf genau eine Weise zu einem beschränkten Operator in $\mathfrak{H}$ fortgesetzt werden. Hierbei bleibt die Norm $|A_{x_0}|$ ungeändert, so daß (3) auch noch für die Norm des Operators A_{x_0} im Raum $\mathfrak{H}$ gilt. Wir behaupten, die Abbildung $x_0 \to A_{x_0}$ ist eine Darstellung der Algebra R. In der Tat, es ist

$$A_{\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2} \xi = \{(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2) x\} = \lambda_1 \{x_1 x\} + \lambda_2 \{x_2 x\} = \lambda_1 A_{x_1} \xi + \lambda_2 A_{x_2} \xi,$$

$$A_{x_1 x_2} \xi = \{x_1 x_2 x\} = A_{x_1} \{x_2 x\} = A_{x_1} A_{x_2} \xi.$$

Zu zeigen bleibt, daß $(A_{x_0})^* = A^*_{x_0}$, also $\langle A_{x_0}\xi, \eta\rangle = \langle \xi, A_{x_0^*}\eta\rangle$ ist. Es sei $x \in \xi$ und $y \in \eta$. Dann gilt

$$\langle A_{x_0}\xi, \eta\rangle = \langle x_0 x, y\rangle = f(y^* x_0 x),$$
$$\langle \xi, A_{x_0^*}\eta\rangle = \langle x, x_0^* y\rangle = f((x_0^* y)^* x) = f(y^* x_0 x),$$

und folglich ist $\langle A_{x_0}\xi, \eta\rangle = \langle \xi, A_{x_0^*}\eta\rangle$.

Um jetzt zu zeigen, daß die erhaltene Darstellung zyklisch ist, betrachten wir diejenige Klasse ξ_0, welche das Einselement e der Algebra R enthält. Ist dann x_0 ein beliebiges Element von R, so ist $A_{x_0}\xi_0$ die Klasse, die x_0 enthält. Folglich stimmt die Gesamtheit aller Vektoren der Gestalt $A_x\xi_0$, $x \in R$, mit der Gesamtheit $\mathfrak{H}'$ aller Klassen überein. Da nun $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ dicht ist, folgt, daß ξ_0 ein zyklischer Vektor ist.

Die Klasse ξ_0 enthält e. Daher ist

$$\langle A_x\xi_0, \xi_0\rangle = \langle xe, e\rangle = f(e^* xe) = f(x).$$

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem 2. *Jeder zyklischen Darstellung $x \to A_x$ einer symmetrischen Algebra R mit dem zyklischen Vektor ξ_0 entspricht das positive Funktional*

$$f(x) = \langle A_x\xi_0, \xi_0\rangle.$$

Durch das Funktional $f(x)$ ist die Darstellung $x \to A_x$ bis auf Äquivalenz eindeutig bestimmt. Umgekehrt entspricht jedem positiven Funktional $f(x)$ in einer BANACH*schen Algebra R mit Einselement eine zyklische Darstellung $x \to A_x$ derart, daß*

$$f(x) = \langle A_x\xi_0, \xi_0\rangle$$

ist.

4. Darstellung vollregulärer kommutativer Algebren. Spektralsatz.

I. *Jede zyklische Darstellung einer vollständigen vollregulären kommutativen Algebra R mit Einselement ist der durch die Formel*

$$A_x\xi(M) = x(M)\,\xi(M)$$

definierten Darstellung im Raum $L^2(f)$ äquivalent;[1]) *dabei ist f ein Integral auf der Algebra $C(\mathfrak{M})$ aller stetigen Funktionen über dem Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale von R.*

Beweis. Die Algebra R ist der Algebra $C(\mathfrak{M})$ vollisomorph (vgl. Theorem 2 aus § 16, Nr. 2). Daher kann das positive Funktional $f(x)$, das die gegebene zyklische Darstellung bestimmt, als positives Funktional über $C(\mathfrak{M})$ betrachtet werden. Ist jetzt $x(M) \in C(\mathfrak{M})$ und $x(M) \geqq 0$, so gilt $y(M) \in C(\mathfrak{M})$ für $y(M) = \sqrt{x(M)}$ und ferner $f(x) = f(y^2) = f(y^* y) \geqq 0$. Folglich ist $f(x)$ ein Integral auf $C(\mathfrak{M})$, so daß eine Darstellung

$$f(x) = \int_{\mathfrak{M}} x(M)\, d\mu(M)$$

[1]) Diese Darstellung im $L^2(f)$ heißt *Spektraldarstellung.*

gilt (vgl. § 6, Nr. 10, Satz X), wobei μ das auf $\mathfrak{M}$ durch $f(x)$ definierte Maß ist. Wir ordnen nun jeder Klasse $\xi \in \mathfrak{H}'$ (vgl. Nr. 3) eine Funktion $x = x(M) \in \xi$ zu, betrachtet als Element des Raumes $L^2(f)$. Diese Zuordnung ist isometrisch; für $\xi, \eta \in \mathfrak{H}'$ und $x \in \xi$, $y \in \eta$ gilt nämlich

$$\langle \xi, \eta \rangle = f(y^* x) = \int_{\mathfrak{M}} x(M)\, \overline{y(M)}\, d\mu(M).$$

Da $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ und $C(\mathfrak{M})$ in $L^2(f)$ dicht ist, läßt sich diese Zuordnung auf eindeutige Weise zu einer isometrischen Abbildung $\xi \to x$ von $\mathfrak{H}$ auf $L^2(f)$ fortsetzen.

Für $\xi = \{x\}$, $\xi \in \mathfrak{H}'$, gilt

$$A_{x_0} \xi = \{x_0 x\} \to x_0(M)\, x(M).$$

Folglich geht der Operator A_x bei der Abbildung $\xi \to x$ in den Operator der Multiplikation mit $x(M)$ über.

Unter einem *Spektralmaß* auf einem lokal bikompakten Raum T verstehen wir eine Operatorfunktion $P(\Delta)$, die auf allen Borelschen[1]) Mengen $\Delta \subset T$ definiert ist und folgende Eigenschaften hat:

1. $P(\Delta)$ ist ein Projektionsoperator im Raum $\mathfrak{H}$;

2. für jedes $\xi \in \mathfrak{H}$ ist die Funktion $\langle P(\Delta)\xi, \xi \rangle$ die Einschränkung des durch ein Integral auf $L(T)$ bestimmten Maßes auf die Borelschen Mengen.

Aus der Eigenschaft 2 folgt $P(\Delta_1 \cup \Delta_2) = P(\Delta_1) + P(\Delta_2)$ für $\Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset$. Folglich gilt

$$P(\Delta_1) P(\Delta_2) = 0 \quad \text{für} \quad \Delta_1 \cap \Delta_2 = \emptyset. \tag{1}$$

II. *Jede Darstellung einer vollständigen vollregulären kommutativen Algebra R mit Einselement wird durch die Formel*

$$A_x = \int_{\mathfrak{M}} x(M)\, dP(M) \tag{2}$$

gegeben, in der $\mathfrak{M}$ der Raum der maximalen Ideale von R und $P(\Delta)$ ein Spektralmaß auf $\mathfrak{M}$ ist, das vertauschbar ist mit allen Operatoren A_x und mit allen beschränkten Operatoren, die mit allen Operatoren A_x vertauschbar sind. Das Integral konvergiert im Sinne der Operatornorm.

Die Gleichung (2) *bestimmt das Spektralmaß $P(\Delta)$ eindeutig.*

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall einer zyklischen Darstellung $x \to A_x$. Auf Grund von Satz I ist die Darstellung $x \to A_x$ dann einer Spektraldarstellung in einem Raum $L^2(f)$ äquivalent. Offenbar darf angenommen werden, daß $x \to A_x$ mit dieser Spektraldarstellung übereinstimmt. Wir

[1]) Unter der Borel*schen Mengenfamilie* Σ in T verstehen wir die kleinste Familie aus Teilmengen von T mit folgenden Eigenschaften: a) Σ enthält alle offenen Mengen $\Delta \in T$; b) aus $\Delta \in \Sigma$ folgt $T - \Delta \in \Sigma$; c) die Vereinigung endlich oder abzählbar vieler Mengen aus Σ gehört ebenfalls zu Σ. Jede Menge $\Delta \in \Sigma$ heißt Borel*sche Menge*. Auf Grund der Sätze I bis III aus § 6, Nr. 9, sind alle Borelschen Mengen bezüglich jedes Integrals über $L(T)$ meßbar; nach Satz IX aus § 6, Nr. 8, ist das Maß, das einem Integral über $L(T)$ entspricht, bereits vollständig bestimmt, wenn es auf den Borelschen Mengen gegeben ist.

definieren nun in $\mathfrak{H} = L^2(f)$ einen Operator $P(\Delta)$ durch die Formel

$$P(\Delta)\,\xi(M) = P_\Delta(M)\,\xi(M),$$

wobei $P_\Delta(M)$ die charakteristische Funktion der BORELschen Menge Δ ist. Dann ist $P(\Delta)$ ein Projektionsoperator in $L^2(f)$ und

$$\langle P(\Delta)\,\xi,\ \xi\rangle = \int_{\mathfrak{M}} P_\Delta(M)\,|\xi(M)|^2\,d\mu(M) = \int_{\Delta} |\xi(M)|^2\,d\mu(M)$$

ist ein dem Maß μ untergeordnetes Maß.

Wir beweisen nun die Formel (2). Hierzu zerlegen wir $\mathfrak{M}$ in endlich viele BORELsche Mengen $\Delta_1, \ldots, \Delta_n$ derart, daß auf jeder von ihnen

$$|x(M') - x(M'')| < \varepsilon$$

ist. Für $M_k \in \Delta_k$ gilt dann

$$\begin{aligned} \left| A_x\xi - \sum_{k=1}^{n} x(M_k)\,P(\Delta_k)\,\xi \right|^2 &= \\ &= \int \left| x(M)\,\xi(M) - \sum_{k=1}^{n} x(M_k)\,P_{\Delta_k}(M)\,\xi(M) \right|^2 d\mu(M) \\ &= \int \left| \sum_{k=1}^{n} [x(M) - x(M_k)]\,P_{\Delta_k}(M)\,\xi(M) \right|^2 d\mu(M) \\ &= \int \sum_{k=1}^{n} |x(M) - x(M_k)|^2 P_{\Delta_k}(M)\,|\xi(M)|^2 d\mu(M) \\ &< \varepsilon^2 \int \sum_{k=1}^{n} P_{\Delta_k}(\xi)\,|\xi(M)|^2 d\mu(M) = \varepsilon^2 |\xi|^2. \end{aligned}$$

Daher gilt

$$\left| A_x - \sum_{k=1}^{n} x(M_k)\,P(\Delta_k) \right| < \varepsilon, \tag{3}$$

womit die Formel (2) bewiesen ist.

Offenbar ist der Operator $P(\Delta)$ mit allen Operatoren, die in der Multiplikation mit Funktionen $x(M)$ bestehen, vertauschbar, d. h., $P(\Delta)$ ist mit allen Operatoren A_x vertauschbar.

Ist jetzt $x \to A_x$ irgendeine Darstellung der Algebra R im Raum $\mathfrak{H}$, so kann sie in die direkte Summe von zyklischen Darstellungen $x \to A_x^{(\alpha)}$ in gewissen Räumen $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ zerlegt werden. Es seien $P^{(\alpha)}(\Delta)$ die entsprechenden Spektralmaße. Setzen wir $P(\Delta)\xi = \{P^{(\alpha)}(\Delta)\xi_\alpha\}$ für $\xi = \{\xi_\alpha\} \in \mathfrak{H}$, so erhalten wir ein Spektralmaß in $\mathfrak{H}$, das mit allen Operatoren A_x vertauschbar ist und (2) erfüllt.

Wir wollen nun die Eindeutigkeit dieses Spektralmaßes zeigen.

Sind $P(\Delta)$ und $P'(\Delta)$ Spektralmaße, die (2) erfüllen, so gilt für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ und jede stetige Funktion $x(M)$

$$\int_{\mathfrak{M}} x(M)\,d\langle P'(M)\,\xi,\ \eta\rangle = \int_{\mathfrak{M}} x(M)\,d\langle P(M)\,\xi,\ \eta\rangle.$$

Dies ist aber nur dann möglich, wenn $\langle P'(\Delta)\xi, \eta\rangle = \langle P(\Delta)\xi, \eta\rangle$, d. h., wenn $P'(\Delta) = P(\Delta)$ ist.

Jetzt sei B ein beschränkter linearer Operator in $\mathfrak{H}$, der mit allen Operatoren A_x vertauschbar ist. Wir haben zu zeigen, daß B mit allen Operatoren $P(\Delta)$ vertauschbar ist. Für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ und alle $x \in R$ gilt

$$\langle A_x B\xi, \eta\rangle = \langle B A_x \xi, \eta\rangle = \langle A_x \xi, B^*\eta\rangle.$$

Wegen (2) ist also

$$\int_{\mathfrak{M}} x(M)\, d\langle P(M) B\xi, \eta\rangle = \int_{\mathfrak{M}} x(M)\, d\langle P(M)\xi, B^*\eta\rangle$$

für jede stetige Funktion $x(M)$. Dies ist aber nur dann möglich, wenn

$$\langle P(\Delta) B\xi, \eta\rangle = \langle P(\Delta)\xi, B^*\eta\rangle = \langle B P(\Delta)\xi, \eta\rangle,$$

d. h., wenn $P(\Delta)B = BP(\Delta)$ ist.

III. *Zu jeder kommutativen symmetrischen Algebra $R \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ gibt es ein und nur ein Spektralmaß $P(\Delta)$, das mit allen Operatoren der Algebra R und mit allen Operatoren aus $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, die mit allen Operatoren aus R vertauschbar sind, vertauscht werden kann, derart, daß*

$$A = \int_{\mathfrak{M}} A(M)\, dP(M) \tag{4}$$

für alle $A \in R$ ist.

Beweis. Offenbar darf angenommen werden, daß R vollständig ist und ein Einselement hat; es genügt nämlich, die Gültigkeit der Formel (4) für die aus R durch Adjunktion des Einselements und durch Vervollständigung entstehende Algebra R' nachzuweisen. Nun ist aber eine symmetrische Teilalgebra der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ vollregulär (vgl. § 16, Nr. 1), und daher genügt es, Satz II auf die Darstellung $A \to A$ anzuwenden, bei der jeder Operator $A \in R$ sich selbst zugeordnet ist.

IV (Spektralsatz). *Zu jedem hermiteschen Operator $H \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ gibt es genau eine Operatorfunktion $P(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, mit folgenden Eigenschaften:*

a) *$P(\lambda)$ ist ein Projektionsoperator;*

b) *$P(\lambda)P(\mu) = P(\lambda)$ für $\lambda \leqq \mu$;*

c) *$P(\lambda)$ ist mit jedem Operator A aus $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ vertauschbar, der mit H vertauschbar ist;*

d) *$P(\lambda)\xi$ ist für jedes $\xi \in \mathfrak{H}$ eine von links stetige Funktion;*

e) *ist $[a, b]$ ein Intervall, welches das ganze Spektrum des Operators H enthält, und $f(\lambda)$ eine beliebige in $[a, b]$ stetige Funktion, so gilt $P(\lambda) = 0$ für $\lambda < a$, $P(\lambda) = 1$ für $\lambda > b$ und*

$$f(H) = \int_a^b f(\lambda)\, dP(\lambda); \tag{5}$$

insbesondere ist

$$H = \int_a^b \lambda\, dP(\lambda). \tag{6}$$

Beweis. Es sei R die kleinste abgeschlossene symmetrische kommutative Teilalgebra mit Einselement aus $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, die H enthält, und $P(\Delta)$ das der Algebra R nach Satz III entsprechende Spektralmaß. Wir setzen $\Delta_\lambda = \{M : H(M) < \lambda\}$. Da Δ_λ eine offene Menge darstellt, ist $P(\Delta_\lambda)$ sinnvoll. Wir schreiben $P(\lambda) = P(\Delta_\lambda)$. Die Bedingungen a), b), d) sind dann offenbar erfüllt, wobei b) aus (1) folgt. Ist A ein Operator aus $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, der mit H vertauschbar ist, so ist er auch mit allen Operatoren aus R vertauschbar, und daher auch mit $P(\Delta_\lambda) = P(\lambda)$. Außerdem gilt $\Delta_\lambda = \emptyset$ für $\lambda < a$ und $\Delta_\lambda = \mathfrak{M}$ für $\lambda > b$. Hieraus folgt aber $P(\lambda) = 0$ für $\lambda < a$ und $P(\lambda) = 1$ für $\lambda > b$.

Um nun die Formel (5) zu beweisen, zerlegen wir das Intervall $[a, b]$ in endlich viele Teilintervalle I_k und setzen

$$\Delta_k = \{M : H(M) \in I_k\}, \quad \lambda_k = H(M_k) \text{ mit } M_k \in \Delta_k.$$

Bezeichnet P_k den Zuwachs der Funktion $P(\lambda)$ im Intervall I_k, so gilt $P_k = P(\Delta_k)$. Wenn wir nun die Ungleichung (3) auf den Operator $A_x = f(H)$ anwenden, so ergibt sich für eine hinreichend feine Zerlegung in Teilintervalle I_k

$$\left| f(H) - \sum_{k=1}^{n} f(\lambda_k) P_k \right| = \left| f(H) - \sum_{k=1}^{n} f[H(M_k)] P(\Delta_k) \right| < \varepsilon,$$

und (5) ist bewiesen. Die Formel (6) ergibt sich aus (5) als Spezialfall für $f(\lambda) = \lambda$.

Angenommen, es gäbe zwei Funktionen $P(\lambda)$ und $P'(\lambda)$, die den Bedingungen a) bis e) genügen. Dann gilt für jede in $[a, b]$ stetige Funktion $f(\lambda)$ und beliebige Vektoren $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$

$$\int_a^b f(\lambda)\, d\langle P(\lambda)\xi, \eta\rangle = \int_a^b f(\lambda)\, d\langle P'(\lambda)\xi, \eta\rangle = \langle f(H)\xi, \eta\rangle;$$

dies ist aber auch nur dann möglich, wenn $\langle P'(\lambda)\xi, \eta\rangle = \langle P(\lambda)\xi, \eta\rangle$ für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$, d. h., wenn $P'(\lambda) = P(\lambda)$ ist. Bemerkt sei, daß die Eindeutigkeit von $P(\lambda)$ auch leicht aus der Eindeutigkeit des Spektralmaßes für die Algebra R folgt.

Die den Bedingungen des Satzes IV genügende Funktion $P(\lambda)$ heißt *Spektralschar des Operators H* und die Formel (6) *Spektralzerlegung dieses Operators.*

Bemerkung. Die Formel (5) folgt schon aus (6) und den übrigen Bedingungen des Satzes IV. In der Tat, aus (6) folgt für jedes natürliche m

$$H^m = \lim \left(\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k \right)^m = \lim \sum_{k=1}^{n} \lambda_k^m P_k = \int_a^b \lambda^m \, dP(\lambda).$$

Folglich gilt für jedes Polynom $p(\lambda)$

$$p(H) = \int_a^b p(\lambda)\, dP(\lambda).$$

Ist nun $f(\lambda)$ eine beliebige in $[a, b]$ stetige Funktion und $\{p_n(\lambda)\}$ eine Folge von Polynomen, die auf $[a, b]$ gleichmäßig gegen $f(\lambda)$ konvergiert, so ergibt sich durch Grenzübergang in

$$\langle p_n(H)\,\xi\rangle = \int_a^b p_n(\lambda)\, d\langle P(\lambda)\,\xi,\, \eta\rangle$$

sofort

$$\langle f(H)\,\xi,\, \eta\rangle = \int_a^b f(\lambda)\, d\langle P(\lambda)\,\xi,\, \eta\rangle,$$

woraus (5) folgt.

V. *Jeder beschränkte hermitesche Operator H läßt sich in der Gestalt $H = H_+ - H_-$ darstellen, wobei H_+ und H_- beschränkte positiv definite Operatoren sind.*

Zum Beweis genügt es, $H_+ = \int_0^b \lambda\, dP(\lambda)$ und $H_- = -\int_a^0 \lambda\, dP(\lambda)$ zu setzen; hierbei kann einer der beiden Operatoren gleich Null sein (wenn etwa $0 \notin [a, b]$ ist).

VI. *Ein beschränkter hermitescher Operator H ist genau dann vollstetig, wenn er die Gestalt*

$$H = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k \tag{7}$$

hat, wobei die P_k zueinander orthogonale Projektionsoperatoren auf endlichdimensionale Teilräume sind und die λ_k eine Folge reeller Zahlen bilden, die für $k \to \infty$ gegen Null strebt.

Beweis. Es sei H ein vollstetiger Operator und $P(\lambda)$ seine Spektralschar. Ferner sei $\mathfrak{M}_\varepsilon$ der bezüglich H invariante Teilraum, auf den der Operator $P_\varepsilon = [P(b) - P(\varepsilon)] + [P(-\varepsilon) - P(a)]$ projiziert, und H_ε die Einschränkung von H auf $\mathfrak{M}_\varepsilon$. Dann ist H_ε vollstetig, und der zu H_ε inverse Operator existiert und hat die Gestalt

$$H_\varepsilon^{-1} = \int_a^{-\varepsilon} \frac{1}{\lambda}\, dP(\lambda) + \int_\varepsilon^b \frac{1}{\lambda}\, dP(\lambda).$$

Folglich ist der Einsoperator $1 = H_\varepsilon^{-1} H_\varepsilon$ in $\mathfrak{M}_\varepsilon$ vollstetig. Dies ist aber nur dann möglich, wenn $\mathfrak{M}_\varepsilon$ endlichdimensional ist. Demzufolge kann sich $P(\lambda)$ in den Intervallen $[a, -\varepsilon]$ und $[\varepsilon, b]$ nur sprungweise verändern, so daß eine Formel der Gestalt $\int_a^{\varepsilon} \lambda\, dP(\lambda) + \int_\varepsilon^b \lambda\, dP(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$ gilt, in der die P_k zueinander orthogonale Projektionsoperatoren auf endlichdimensionale Teilräume sind und die λ_k $(k = 1, \ldots, n)$ die Sprungstellen von $P(\lambda)$ in $[a, -\varepsilon]$ und $[\varepsilon, b]$ bezeichnen. Geht man für $\varepsilon \to 0$ zur Grenze über, so ergibt sich unter Berücksichtigung von (6) die gesuchte Formel (7). Da es außerhalb des Intervalls $(-\varepsilon, \varepsilon)$ nur endlich viele λ_k gibt, gilt $\lambda_k \to 0$ für $k \to \infty$.

Umgekehrt seien jetzt die Bedingungen von Satz VI erfüllt. Dann gilt $\left|H - \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k\right| = \max_{k \geqq n} |\lambda_k| \to 0$ für $n \to \infty$. Da die Operatoren $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$ vollstetig sind, ist daher auch H vollstetig (vgl. Satz IV aus § 4, Nr. 6).

Wie aus (7) folgt, setzt sich das Spektrum des Operators H nur aus den Zahlen λ_k und eventuell noch der Zahl Null zusammen. Die Zahlen λ_k heißen *Eigenwerte* und die Teilräume $\mathfrak{M}_k = P_k \mathfrak{H}$ *Eigenräume des Operators* H. Aus (7) folgt ferner, daß $\mathfrak{M}_k$ aus den und nur den Vektoren ξ besteht, die der Bedingung $H\xi = \lambda_k \xi$ genügen. Vektoren $\xi \neq 0$, die dieser Bedingung genügen, heißen *Eigenvektoren zum Eigenwert* λ_k.

Der Spektralsatz läßt sich folgendermaßen auf nichtbeschränkte selbstadjungierte Operatoren ausdehnen. Ein Operator $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ heiße *vertauschbar mit dem Operator* T, wenn $AT \subset TA$ gilt. Wie man leicht sieht, ist ein Operator $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit einem selbstadjungierten Operator H genau dann vertauschbar, wenn er mit dem unitären Operator $U = (H + i1)(H - i1)^{-1}$ vertauschbar ist (vgl. Satz V aus § 5, Nr. 9).

VII (Spektralsatz für selbstadjungierte Operatoren). *Für jeden selbstadjungierten Operator H in einem* HILBERT*schen Raum $\mathfrak{H}$ gibt es eine und nur eine Operatorfunktion $P(\lambda)$, $-\infty < \lambda < +\infty$, mit folgenden Eigenschaften:*

a) *$P(\lambda)$ ist ein Projektionsoperator;*

b) *$P(\lambda)P(\mu) = P(\lambda)$ für $\lambda \leqq \mu$;*

c) *$P(\lambda)$ ist mit jedem Operator A aus $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ vertauschbar, der mit H vertauschbar ist;*

d) $\lim\limits_{\lambda \to -\infty} P(\lambda)\xi = 0$, $\lim\limits_{\lambda \to +\infty} P(\lambda)\xi = \xi$ *für alle* $\xi \in \mathfrak{H}$;

e) *$P(\lambda)\xi$ ist eine von links stetige Funktion für alle $\xi \in \mathfrak{H}$;*

f) *$\xi \in \mathfrak{D}_H$ genau dann, wenn*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d|P(\lambda)\xi|^2 < \infty. \tag{8}$$

In diesem Fall ist

$$H\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP(\lambda)\xi. \tag{9}$$

Beweis. Da $U = (H + i1)(H - i1)^{-1}$ unitär und daher normal ist, gibt es eine minimale symmetrische kommutative Algebra R, die U enthält. Es sei $P(\Delta)$ das dieser Algebra entspechende Spektralmaß, so daß

$$U = \int_{\mathfrak{M}} U(M)\, dP(M) \tag{10}$$

ist. Hierbei gilt $|U(M)| = 1$, weil U unitär ist. Daher ist

$$i\,[U(M) + 1]\,[U(M) - 1]^{-1}$$

für $U(M) \neq 1$ eine reelle Zahl. Setzen wir

$$\Delta_\lambda = \{M : i\,[U(M) + 1]\,[U(M) - 1]^{-1} < \lambda\}$$

und $P(\lambda) = P(\Delta_\lambda)$, so erhalten wir in $P(\lambda)$ eine Operatorfunktion, die den Bedingungen a), b), d) und e) genügt. Ist der Operator $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit H vertauschbar, so ist er mit U und daher auch mit allen Operatoren der Algebra R vertauschbar. Folglich ist er auch mit $P(\lambda)$ vertauschbar, d. h., auch die Bedingung c) ist erfüllt.

Es bleibt das Erfülltsein der Bedingung f) nachzuweisen.

Wird $\eta = \frac{1}{i}(H - i1)\xi$ gesetzt, so gilt $U\eta = \frac{1}{i}(H + i1)\xi$, und wir sehen, daß $\mathfrak{D}_H$ aus allen Vektoren der Gestalt $\xi = U\eta - \eta$ besteht, wobei $H\xi = i(U\eta + \eta)$ ist. Ist nun $\xi = U\eta - \eta$, so gilt wegen (10) die Beziehung $P(\Delta)\xi = \int\limits_{\Delta} [U(M) - 1]\, dP(M)\eta$, und daher ist

$$|P(\Delta)\xi|^2 = \int\limits_{\Delta} |U(M) - 1|^2\, d\,|P(M)\eta|^2.$$

Hieraus folgt

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{1}{|U(M) - 1|^2}\, d\,|P(M)\xi|^2 = \int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{1}{|U(M) - 1|^2}\, d \int\limits_{\Delta_M} |U(M') - 1|^2\, d\,|P(M')\eta|^2$$
$$= \int\limits_{\mathfrak{M}} d\,|P(M)\eta|^2 = |\eta|^2,$$

also

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{1}{|U(M) - 1|^2}\, d\,|P(M)\xi|^2 < \infty. \tag{11}$$

Ist dagegen (11) erfüllt, so konvergiert das Integral

$$\eta = \int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{1}{U(M) - 1}\, dP(M)\xi,$$

und es ist

$$U\eta - \eta = \int\limits_{\mathfrak{M}} (U(M) - 1)\, dP(\Delta_M) \int\limits_{\mathfrak{M}} \frac{1}{U(M') - 1}\, dP(M')\xi$$
$$= \int\limits_{\mathfrak{M}} (U(M) - 1)\, d \int\limits_{\Delta_M} \frac{1}{U(M') - 1}\, dP(M')\xi$$
$$= \int\limits_{\mathfrak{M}} dP(M)\xi = \xi.$$

Nun ist aber die Konvergenz des Integrals (11) gleichwertig mit der Konvergenz des Integrals

$$\int\limits_{\mathfrak{M}} \left| i\frac{U(M) + 1}{U(M) - 1} \right|^2 d\,|P(M)\xi|^2 < \infty; \tag{12}$$

daher ist $\xi \in \mathfrak{D}_H$ genau dann, wenn das Integral (12) konvergiert, und in diesem Fall gilt

$$H\xi = i(U\eta + \eta) = \int\limits_{\mathfrak{M}} i[U(M) + 1]\, dP(M)\eta,$$

d. h.

$$H\xi = \int\limits_{\mathfrak{M}} i\frac{U(M) + 1}{U(M) - 1}\, dP(M)\xi. \tag{13}$$

Erinnert man sich nun an die Definition der Funktion $P(\lambda)$ und wiederholt die beim Beweis von Satz IV gemachte Überlegung, so erkennt man, daß die Integrale (12) und (13) mit den Integralen (8) bzw. (9) übereinstimmen. Damit ist dann der Beweis des Spektralsatzes abgeschlossen.

Die den Bedingungen a) bis f) von Satz VII genügende Funktion $P(\lambda)$ heißt *Spektralschar* des Operators H; die Formel (9) wird *Spektralzerlegung* des Operators genannt.

Die Spektralzerlegung gestattet es, durch die Formel

$$f(H) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP(\lambda)$$

für jede stetige beschränkte Funktion $f(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, einen Operator $f(H)$ zu definieren. Wie man leicht sieht, gilt:

a) Aus $f = \lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2$ folgt $f(H) = \lambda_1 f_1(H) + \lambda_2 f_2(H)$;
b) aus $f = f_1 f_2$ folgt $f(H) = f_1(H) f_2(H)$;
c) $|f(H)| \leqq |f|_\infty$.

Ferner gilt: Ist H ein beschränkter hermitescher Operator und $f(\lambda)$ eine auf dem Spektrum von H stetige Funktion, so stimmt diese Definition von $f(H)$ mit der in § 16, Nr. 2, gegebenen überein.

Wir überlassen dem Leser die Beweise dieser einfachen Behauptungen.[1])

5. Spektraloperatoren. Die oben angegebene Spektralzerlegung eines Operators läßt sich folgendermaßen auf gewisse Klassen linearer Operatoren in einem Banachschen Raum übertragen. Ein beschränkter linearer Operator P im Banachschen Raum X heiße *Projektionsoperator*, wenn $P^2 = P$ ist.

Es bezeichne Π die komplexe Ebene und B die Gesamtheit aller Borelschen Mengen $\Delta \subset \Pi$. Eine Operatorfunktion $P(\Delta)$, $\Delta \in B$, werde *Spektralmaß* genannt, wenn für alle $\Delta_1, \Delta_2 \in B$ folgendes gilt:

a) $P(\Delta_1 \cap \Delta_2) = P(\Delta_1)\, P(\Delta_2)$; b) $P(\Delta_1 \cup \Delta_2) = P(\Delta_1) \cup P(\Delta_2)$, wobei per definitionem $P_1 \cup P_2 = P_1 + P_2 - P_1 P_2$ sein soll; c) $P(\Pi - \Delta) = 1 - P(\Delta)$; d) $|P(\Delta)| \leqq K$ mit einer Konstanten K.

Aus der Bedingung a) folgt für $\Delta_1 = \Delta_2$, daß $P(\Delta)$ für jedes $\Delta \in B$ ein Projektionsoperator ist. Aus a) folgt ferner, daß $P(\Delta_1)$ und $P(\Delta_2)$ für alle $\Delta_1, \Delta_2 \in B$ miteinander vertauschbar sind. Weiter schließen wir aus a) und c), daß $P(\emptyset) = 0$ ist.

Ein beschränkter linearer Operator A in X heiße *Spektraloperator*, wenn es ein Spektralmaß $P(\Delta)$ mit folgenden Eigenschaften gibt:

a) A ist mit $P(\Delta)$ für alle $\Delta \in B$ vertauschbar;

b) für jedes $\Delta \in B$ ist das Spektrum $S(A, P(\Delta)X)$ des Operators A auf dem Teilraum $P(\Delta)X$ in der abgeschlossenen Hülle $\bar{\Delta}$ der Menge Δ enthalten: $S(A, P(\Delta)X) \subset \bar{\Delta}$;

c) im konjugierten Raum X' gibt es eine dichte Menge Γ derart, daß

$$f(P(\Delta_1 \cup \Delta_2 \cup \ldots)) = f(P(\Delta_1)) + f(P(\Delta_2)) + \cdots$$

für jedes $f \in \Gamma$ und jeweils abzählbar viele paarweise disjunkte Mengen $\Delta_k \in B$ gilt.

---

[1]) Eine ausführliche Darstellung der Spektraltheorie der Operatoren findet man beispielsweise bei Achieser und Glasmann [1] oder bei Plessner [1] und Plessner und Rochlin [1] (vgl. auch W. I. Smirnow [1]).

Sind diese Bedingungen erfüllt, so heiße $P(\Delta)$ *Spektralmaß des Operators* A. Man kann zeigen[1]), daß die Bedingungen a), b) und c) das Spektralmaß eines Operators eindeutig festlegen. Darüber hinaus läßt sich zeigen, daß das Spektralmaß von A mit jedem beschränkten linearen Operator in X vertauschbar ist, der mit A vertauschbar ist.

Ein Spektraloperator Λ heiße *Operator skalaren Typs*, wenn er in der Form

$$\Lambda = \int_S \lambda \, dP(\lambda) \tag{1}$$

darstellbar ist, wobei S das Spektrum von Λ und $P(\lambda)$ die Spektralschar von Λ ist. Einer der wichtigsten Sätze der Theorie der Spektraloperatoren besagt folgendes:

Theorem 3. *Ein Operator A ist genau dann ein Spektraloperator, wenn er in der Form*

$$A = \Lambda + N \tag{2}$$

darstellbar ist; dabei bezeichnet Λ einen Operator skalaren Typs und N ein verallgemeinertes nilpotentes Element[2]), *das mit Λ vertauschbar ist. In diesem Fall ist die Darstellung eindeutig, wobei A und Λ ein und dasselbe Spektrum und ein und dasselbe Spektralmaß haben.*

Der Beweisgedanke ist folgender: Es sei A ein Spektraloperator, $P(\lambda)$ sein Spektralmaß und S sein Spektrum. Ferner bezeichne R die kleinste (bezüglich der Operatornorm) abgeschlossene Teilalgebra der Algebra der beschränkten linearen Operatoren in X, die A und alle $P(\Delta)$ enthält und darüber hinaus noch folgende Eigenschaft hat:

$$\text{Wenn } B^{-1},\ B \in R, \text{ existiert und beschränkt ist, so ist } B^{-1} \in R. \tag{3}$$

Wir setzen $\Lambda = \int_S \lambda dP(\lambda)$ und $N = A - \Lambda$. Aus der Definition des Spektralmaßes folgt sofort $A(M) = \Lambda(M)$, also $N(M) = A(M) - \Lambda(M) = 0$ für alle maximalen Ideale M der Algebra R. Demzufolge ist N ein verallgemeinertes nilpotentes Element (vgl. § 11, Nr. 2, Satz IV und VI). Aus der Formel $\Lambda = \int_S \lambda dP(\lambda)$ selbst ergibt sich, daß Λ ein Operator skalaren Typs und $P(\lambda)$ sein Spektralmaß ist. Damit ist dann die Darstellung (2) bewiesen; ihre Eindeutigkeit folgt leicht aus der allgemein bewiesenen Eindeutigkeit des Spektralmaßes eines Spektraloperators.

Die umgekehrte Behauptung erhält man durch Betrachtung der kleinsten (bezüglich der Operatornorm) abgeschlossenen kommutativen Teilalgebra R der Algebra der beschränkten linearen Operatoren in X, die Λ, N und alle $P(\Delta)$ enthält [$P(\Delta)$ bezeichnet das Spektralmaß des Operators Λ] und ebenfalls der Bedingung (3) genügt. Zum Beweis geht man von der Darstellung $A = \Lambda + N$ aus, in der Λ und N den Bedingungen des Satzes

---

[1]) Ausführliche Beweise der hier formulierten Resultate findet man bei Fage [1] und Wasell [2].

[2]) Dies bedeutet

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|N^n|} = 0$$

(vgl. § 11, Nr. 2). Die Zerlegung (2) kann als kontinuierliches Analogon der Jordanschen Normalform eines Operators in einem endlichdimensionalen Raum angesehen werden; Λ ist dann als Diagonalteil und N als Überdiagonalteil der Jordanschen Normalform anzusehen. Im endlichdimensionalen Fall wird offenbar eine gewisse Potenz des Operators N gleich Null. Jeder lineare Operator in einem endlichdimensionalen Raum ist somit ein Spektraloperator. Demgegenüber gibt es im unendlichdimensionalen Fall auch Operatoren, die keine Spektraloperatoren sind.

genügen. Es bezeichne $\mathfrak{M}_\Delta$ den Raum der maximalen Ideale M der Einschränkung der Algebra X auf den Teilraum $P(\Delta)\,X$; dann gilt

$$S(A,\,P(\Delta)\,X) = \{\lambda : \lambda = A(M) + N(M),\ M \in \mathfrak{M}_\Delta\}$$
$$= \{\lambda : \lambda = A(M),\ M \in \mathfrak{M}_\Delta\} = S(A,\,P(\Delta)\,X) \subset \bar{\Delta}.$$

Hieraus schließt man, daß A ein Spektraloperator ist und dasselbe Spektrum und dasselbe Spektralmaß wie A hat.

Erwähnt sei abschließend, daß man die Struktur solcher Algebren von Operatoren untersucht hat, die von Spektraloperatoren und ihren Spektralmaßen erzeugt werden. Wir können jedoch nicht bei dieser Frage verweilen (vgl. hierzu DUNFORD [2]).

6. Irreduzible Darstellungen. Eine Darstellung werde *irreduzibel* genannt, wenn es im Raum $\mathfrak{H}$ keinen abgeschlossenen invarianten Teilraum gibt, der von (0) und $\mathfrak{H}$ verschieden ist.

Nach Satz II aus Nr. 1 bedeutet dies, daß jeder Projektionsoperator, der mit allen Operatoren der Darstellung vertauschbar ist, gleich 0 oder 1 ist.

Offenbar ist jede Darstellung in einem eindimensionalen Raum irreduzibel. Wir werden daher mehrdimensionale Räume betrachten.

I. *Eine Darstellung $x \to A_x$ in einem mehrdimensionalen Raum $\mathfrak{H}$ ist genau dann irreduzibel, wenn jeder von Null verschiedene Vektor von $\mathfrak{H}$ ein zyklischer Vektor dieser Darstellung ist.*

Beweis. Die Darstellung $x \to A_x$ sei irreduzibel. Für $\xi \in \mathfrak{H}$, $\xi \neq 0$, ist der von den Vektoren $A_x\xi$, $x \in R$, aufgespannte abgeschlossene Teilraum invariant. Wegen der Irreduzibilität der Darstellung stimmt er also mit (0) oder $\mathfrak{H}$ überein. Der erste Fall ist nun aber unmöglich, weil sonst der eindimensionale Raum $\{\alpha\xi\}$ invariant wäre und daher mit $\mathfrak{H}$ übereinstimmen würde, d. h. $A_x = 0$ in $\mathfrak{H}$. Im zweiten Fall ist ξ jedoch ein zyklischer Vektor.

Zum Beweis der Umkehrung schließt man wie folgt:

Ist die Darstellung $x \to A_x$ reduzibel und $\mathfrak{M}$ ein von (0) und $\mathfrak{H}$ verschiedener abgeschlossener invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$, so ist kein Vektor ξ aus $\mathfrak{M}$ für die Darstellung $x \to A_x$ in $\mathfrak{H}$ zyklisch.

II. *Eine Darstellung $x \to A_x$ ist genau dann irreduzibel, wenn jeder beschränkte lineare Operator, der mit allen Operatoren A_x der Darstellung vertauschbar ist, ein Vielfaches des Einsoperators ist.*

Beweis. Die betrachtete Darstellung sei irreduzibel. Weiter sei B ein beschränkter Operator, der mit allen Operatoren A_x vertauschbar ist. Wir setzen zunächst einmal voraus, daß B hermitesch ist. Dann ist der Operator $P(\lambda)$ der Spektralschar von B für jedes λ mit allen Operatoren A_x vertauschbar. Wegen der Irreduzibilität der Darstellung ist also $P(\lambda) = 0$ oder $P(\lambda) = 1$. Da $\langle P(\lambda)\xi, \xi\rangle$ für wachsendes λ nicht fällt, folgt hieraus die Existenz eines λ_0 derart, daß $P(\lambda) = 0$ für $\lambda < \lambda_0$ und $P(\lambda) = 1$ für $\lambda > \lambda_0$ ist. Demzufolge gilt

$$B = \int \lambda\, dP(\lambda) = \lambda_0 1.$$

Nun sei B ein beliebiger beschränkter Operator, der mit allen Operatoren A_x vertauschbar ist. Dann ist B^* ebenfalls mit allen A_x vertauschbar; es gilt nämlich

$$B^* A_x = (A_{x^*} B)^* = (B A_{x^*})^* = A_x B^*.$$

Daher sind dann auch die hermiteschen Operatoren $B_1 = \frac{B + B^*}{2}$ und $B_2 = \frac{B - B^*}{2i}$ mit allen A_x vertauschbar. Wie bereits bewiesen wurde, sind B_1 und B_2 damit Vielfache des Einsoperators. Dasselbe gilt dann aber auch für den Operator $B = B_1 + i B_2$.

Umgekehrt sei nun jeder beschränkte Operator, der mit allen A_x vertauschbar ist, ein Vielfaches des Einsoperators. Dann ist insbesondere jeder Projektionsoperator, der mit allen A_x vertauschbar ist, ein Vielfaches des Einsoperators. Nun kann aber ein Projektionsoperator nur dann ein Vielfaches des Einsoperators sein, wenn er gleich 0 oder 1 ist. Folglich ist die Darstellung irreduzibel.

Bemerkung. Aus diesen Überlegungen geht auch noch hervor, daß *jeder (a priori unbeschränkte) selbstadjungierte Operator H, der mit allen Operatoren A_x einer irreduziblen Darstellung $x \to A_x$ vertauschbar ist, ein Vielfaches des Einsoperators ist.*

7. Zusammenhang zwischen Vektoren und positiven Funktionalen. Wie wir oben sahen, erzeugt jeder Vektor ξ aus $\mathfrak{H}$ das positive Funktional $f(x) = \langle A_x \xi, \xi \rangle$. Ist $\xi_1 = \lambda \xi_2$ mit $|\lambda| = 1$, so stimmen die entsprechenden Funktionale miteinander überein. Allgemein ist es möglich, daß auch nicht proportionale Vektoren ein und dasselbe positive Funktional erzeugen. Ist die Darstellung jedoch irreduzibel, so gilt der folgende Satz:

Theorem 4. *Es sei $x \to A_x$ eine irreduzible Darstellung einer symmetrischen Algebra R. Gilt $\langle A_x \xi_1, \xi_1 \rangle = \langle A_x \xi_2, \xi_2 \rangle$ für alle $x \in R$, so ist $\xi_1 = \lambda \xi_2$, $|\lambda| = 1$.*

Beweis. Offenbar genügt es, den Fall einer mehrdimensionalen Darstellung einer Algebra R mit Einselement zu betrachten. Es sei $\xi_1 \neq 0$. Auf Grund von Satz I aus Nr. 6 ist die Gesamtheit aller Vektoren $A_x \xi_1$ in $\mathfrak{H}$ dicht. Wir definieren nun in $\mathfrak{H}$ einen Operator U, indem wir $U\xi = A_x \xi_2$ setzen, wenn $\xi = A_x \xi_1$ ist. Insbesondere ist $U \xi_1 = \xi_2$ für $x = e$. Der so definierte Operator U ist isometrisch; es gilt nämlich

$$\langle U\xi, U\xi \rangle = \langle A_x \xi_2, A_x \xi_2 \rangle = \langle A_{x^* x} \xi_2, \xi_2 \rangle,$$
$$\langle \xi, \xi \rangle = \langle A_x \xi_1, A_x \xi_1 \rangle = \langle A_{x^* x} \xi_1, \xi_1 \rangle,$$

und nach Voraussetzung ist $\langle A_{x^* x} \xi_2, \xi_2 \rangle = \langle A_{x^* x} \xi_1, \xi_1 \rangle$. Hieraus folgt auch noch, daß U eindeutig definiert ist; mit $A_{x_1} \xi_1 = A_{x_2} \xi_1$ ist nämlich $A_{x_1 - x_2} \xi_1 = 0$, also auch $A_{x_1 - x_2} \xi_2 = 0$, d. h. $A_{x_1} \xi_2 = A_{x_2} \xi_2$.

Offenbar ist U auf der Menge aller Elemente der Gestalt $A_x \xi_1$ definiert. Diese Menge ist in $\mathfrak{H}$ dicht. Folglich kann U auf eindeutige Weise zu einem beschränkten Operator in $\mathfrak{H}$ fortgesetzt werden. Dieser Operator ist mit allen Operatoren A_x vertauschbar. In der Tat, für $\xi = A_x \xi_1$ gilt

$$A_{x_0} U \xi = A_{x_0} A_x \xi_2 = A_{x_0 x} \xi_2 = U A_{x_0 x} \xi_1 = U A_{x_0} \xi.$$

Mit anderen Worten, es gilt $A_{x_0} U\xi = U A_{x_0}\xi$ für alle Vektoren der Gestalt $\xi = A_x\xi_1$. Da diese Vektoren eine in $\mathfrak{H}$ dichte Menge bilden und die Operatoren A_{x_0} und U stetig sind, gilt $A_{x_0} U\xi = U A_{x_0}\xi$ für alle ξ aus $\mathfrak{H}$.

Somit ist der Operator U mit allen Operatoren A_x der irreduziblen Darstellung vertauschbar. Folglich ist er ein Vielfaches des Einsoperators, $U = \lambda 1$ (vgl. Nr. 6, Satz II). Da U isometrisch ist, muß $|\lambda| = 1$ sein. Es ist also $\xi_2 = U\xi_1 = \lambda\xi_1$.

Jetzt sei $\xi_1 = 0$. Dann ist auch $\xi_2 = 0$. Wäre nämlich $\xi_2 \neq 0$, so würde die Gleichung

$$0 = \langle A_x\xi_1,\ \xi_1\rangle = \langle A_x\xi_2,\ \xi_2\rangle$$

bedeuten, daß der Vektor $\xi_2 \neq 0$ zu allen Vektoren $A_x\xi_2$ orthogonal wäre. Die aus diesen Vektoren bestehende Menge könnte also in $\mathfrak{H}$ nicht dicht sein. Letzteres widerspricht jedoch der Irreduzibilität der Darstellung. Mit $\xi_1 = 0$ ist also auch $\xi_2 = 0$, so daß die Aussage des Satzes in diesem Fall trivial ist.

§ 18. Einbettung einer symmetrischen Algebra in eine Operatorenalgebra

1. Reguläre Norm. Es sei R eine symmetrische Algebra. Wir bezeichnen mit F_R die Menge aller positiven Funktionale über R. Offenbar ändert sich F_R nicht, wenn in R auf irgendeine Weise eine Norm $|x|$ eingeführt wird, mit der R zu einer normierten symmetrischen Algebra wird; die Definition des positiven Funktionals hängt ja in keiner Weise von der Norm der Algebra R ab. Beim Übergang von R zur vollständigen Hülle $\tilde{R}$ von R bezüglich dieser Norm wird sich F_R im allgemeinen jedoch ändern. Mit anderen Worten, nicht jedes positive Funktional über R kann zu einem positiven Funktional über $\tilde{R}$ fortgesetzt werden.

Es sei beispielsweise R die Algebra aller Polynome $p(t)$ mit komplexen Koeffizienten. In R sei durch $(p(t))^* = \overline{p(\bar{t})}$ eine Involution definiert. Für jedes reelle t_0 ist $f_{t_0} = p(t_0)$ ein positives Funktional über R. Wir definieren nun in R eine Norm durch

$$|p| = \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|.$$

Mit dieser Norm wird R zu einer (unvollständigen) normierten Algebra. Aus dem WEIERSTRASSschen Satz (vgl. § 2, Nr. 10) folgt, daß die vollständige Hülle $\tilde{R}$ von R die Algebra aller im Intervall $0 \leq t \leq 1$ stetigen Funktionen mit der Norm $|x| = \max_{0 \leq t \leq 1} |x(t)|$ ist.

Für $|t_0| > 1$ kann keines der Funktionale $f_{t_0}(p) = p(t_0)$ zu einem positiven Funktional über $\tilde{R}$ fortgesetzt werden. Wir nehmen an, dies wäre möglich. Dann müßte nach Satz I aus § 10, Nr. 4,

$$|f_{t_0}(p)| \leq f_{t_0}(e)\,|p|$$

oder

$$|p(t_0)| \leq \max_{0 \leq t \leq 1} |p(t)|$$

für alle Polynome $p(t)$ sein, was jedoch unmöglich ist.

Eine Norm $|x|$ in einer symmetrischen Algebra R mit Einselement heiße *regulär*, wenn jedes positive Funktional $f(x)$ über R zu einem positiven Funktional $\tilde{f}(x)$ über der vollständigen Hülle $\tilde{R}$ von R bezüglich $|x|$ fortgesetzt werden kann. In diesem Fall ist $\tilde{f}(x)$ ein positives Funktional über der vollständigen Algebra $\tilde{R}$ mit Einselement. Hieraus folgt auf Grund der Ungleichung (1) aus § 10, Nr. 4,

$$|\tilde{f}(\tilde{x})| \leqq \tilde{f}(e)\,|\tilde{x}| = f(e)\,|\tilde{x}|;$$

insbesondere gilt für $\tilde{x} = x \in R$

$$|f(x)| \leqq f(e)\,|x|. \tag{1}$$

Folglich ist $f(x)$ über R stetig und die Fortsetzung zum Funktional $\tilde{f}(x)$ über $\tilde{R}$ eindeutig. Wir können daher folgenden Satz aussprechen:

Die Bedingung (1) *ist notwendig und hinreichend dafür, daß das positive Funktional* $f(x)$ *über* R *zu einem positiven Funktional über der vollständigen Hülle* $\tilde{R}$ *bezüglich der Norm* $|x|$ *fortgesetzt werden kann.*

Ein Element x einer symmetrischen Algebra R mit Einselement werde *beschränkt* genannt, wenn für alle positiven Funktionale über R eine Ungleichung

$$f(x^* x) \leqq C\,f(e)$$

gilt, in der C eine nur von x abhängende Konstante ist.

I. *In einer* BANACH*schen symmetrischen Algebra* R *mit Einselement sind alle Elemente beschränkt.*

Dies folgt aus der für alle positiven Funktionale über R gültigen Ungleichung $f(x^* x) \leqq |x^* x|\,f(e)$, die sich aus (1) ergibt, wenn x durch $x^* x$ ersetzt wird.

II. *Gibt es in einer symmetrischen Algebra* R *mit Einselement eine reguläre Norm, so sind alle Elemente von* R *beschränkt.*

Dieser Satz ist ebenfalls eine unmittelbare Folgerung aus der Ungleichung (1).

In den folgenden Ausführungen dieses Paragraphen setzen wir voraus, daß in R ein nicht identisch verschwindendes positives Funktional existiert.

2. Reduzierte Algebren. Es sei R eine symmetrische Algebra mit Einselement. Ein Element x von R heiße *verallgemeinertes Nullelement*, in Zeichen $x \approx 0$, wenn $f(x^* x) = 0$ für alle positiven Funktionale f über R ist.

I. *Ein Element* x *ist genau dann ein verallgemeinertes Nullelement, wenn* $f(y x) = 0$ *für alle positiven Funktionale* f *und alle Elemente* y *der Algebra* R *ist.*

Die Bedingung ist offenbar hinreichend, denn für $y = x^*$ ergibt sich $f(x^* x) = 0$. Ihre Notwendigkeit folgt aus der SCHWARZschen Ungleichung:

$$|f(y x)|^2 \leqq f(y y^*)\,f(x^* x).$$

Folgerung 1. *Es ist* $e \not\approx 0$.

Wäre nämlich $e \approx 0$, so würde aus Satz I für $x = e$ folgen, daß $f(y) = 0$ für alle $y \in R$ und alle positiven Funktionale f über R ist, was der oben formulierten Voraussetzung über R widersprechen würde.

II. *Ein Element x_0 ist genau dann verallgemeinertes Nullelement, wenn $(x_0) = 0$ für alle positiven Funktionale f ist.*

Die Notwendigkeit der Bedingung folgt aus Satz I für $y = e$. Um zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist, nehmen wir an, es sei $f(x_0) = 0$ für alle positiven Funktionale f. Für alle $y \in R$ und λ ist auch $\varphi(x) = f((\lambda e + y) x (\bar{\lambda} e + y^*))$ ein positives Funktional. Daher gilt $f((\lambda e + y) x_0 (\bar{\lambda} e + y^*)) = 0$, also $\bar{\lambda} f(y x_0) + \lambda f(x_0 y^*) + f(y x_0 y^*) = 0$ für alle Zahlen λ und alle $y \in R$. Wir setzen nun nacheinander $\lambda = 1, -1, i, -i$, multiplizieren die so entstehenden Gleichungen mit $1, -1, i$ bzw. $-i$ und addieren die Ergebnisse. So ergibt sich die Gleichung $4 f(y x_0) = 0$. Folglich ist $f(y x_0) = 0$ für alle $y \in R$, so daß x_0 nach Satz I ein verallgemeinertes Nullelement ist.

Aus $x \approx 0$ folgt $x_1 x \approx 0$ für jedes $x_1 \in R$; denn mit $f(yx) = 0$ für alle $y \in R$ gilt auch $f(y x_1 x) = 0$ für alle $y \in R$. Ebenso leicht ergibt sich, daß aus $x_1 \approx 0$ und $x_2 \approx 0$ stets $x_1 + x_2 \approx 0$ folgt.

III. *Mit $x \approx 0$ ist auch $x^* \approx 0$.*

Beweis. Es sei $f(x^* x) = 0$ für alle positiven Funktionale f. Wir setzen $f_1(y) = f(x y x^*)$. Offenbar ist auch $f_1(y)$ ein positives Funktional über R. Daher gilt $f_1(x^* x) = 0$, also $f(x x^* x x^*) = 0$. Auf Grund der SCHWARZschen Ungleichung ist aber $|f(x x^*)|^2 \leq f(x x^* x x^*) f(e) = f_1(x^* x) f(e) = 0$, und daher gilt $f(x x^*) = 0$ für alle positiven Funktionale f.

Wir haben damit folgenden Satz:

IV. *Die Gesamtheit I aller verallgemeinerten Nullelemente ist ein symmetrisches zweiseitiges Ideal.*

Wir wollen dieses Ideal das *reduzierende Ideal* der Algebra R nennen. Die Quotientenalgebra $R' = R/I$ heiße *reduzierte Algebra.*

Ist insbesondere $I = (0)$, so ist die Algebra R selbst reduziert.

V. *Die Algebren R' und R haben dieselben positiven Funktionale, d. h., jedes positive Funktional über R kann als positives Funktional über R' betrachtet werden und umgekehrt.*

Beweis. Wenn x_1 und x_2 ein und derselben Klasse x' modulo I angehören, so gilt $x_1 - x_2 \in I$ und folglich $f(x_1 - x_2) = 0$, $f(x_1) = f(x_2)$. Das Funktional $f(x)$ hat also für alle Elemente der Klasse einen konstanten Wert und kann als Funktional über R' angesehen werden. Offenbar ist es über R' positiv. Umgekehrt sei nun $f(x')$ ein positives Funktional über R'. Wir setzen $f(x) = f(x')$ für $x \in x'$. Dann ist $f(x)$ ein positives Funktional über R.

VI. *In der reduzierten Algebra R' gibt es zu jedem Element $x' \neq 0$ ein positives Funktional f derart, daß $f(x'^* x') \neq 0$ ist.*

Beweis. Es sei $f(x'^* x') = 0$ für alle positiven Funktionale über R'. Für $x \in x'$ gilt dann $f(x^* x) = 0$, wobei f ein beliebiges positives Funktional über R ist; also ist $x \approx 0$. Dies bedeutet aber $x' = 0$.

Folgerung 2. *Eine Algebra R ist genau dann reduziert, wenn ihr reduzierendes Ideal das Nullideal ist: $I = (0)$.*

Wir betrachten jetzt eine BANACHsche symmetrische Algebra mit Einselement.

VII. *Das reduzierende Ideal einer* BANACH*schen symmetrischen Algebra mit Einselement enthält das Radikal dieser Algebra.*

Ist nämlich x ein Element des Radikals, so gilt auf Grund des Satzes IV aus § 10, Nr. 4, für alle positiven Funktionale über R die Gleichung $f(x^* x) = 0$, die bedeutet, daß x zum reduzierenden Ideal gehört.

VIII. *Eine reduzierte* BANACH*sche Algebra ist halbeinfach.*

Dies folgt unmittelbar aus Satz VII.

3. Minimale reguläre Norm.

Theorem 1. *Wenn in einer reduzierten Algebra R eine reguläre Norm existiert, so gibt es in R auch eine minimale reguläre Norm. Die vollständige Hülle von R bezüglich dieser minimalen Norm ist einer Algebra von Operatoren in einem* HILBERT*schen Raum vollisomorph.*

Beweis. Es sei $|x|_1$ irgendeine reguläre Norm in der Algebra R und R_1 die vollständige Hülle von R bezüglich dieser Norm. Jedes positive Funktional $f(x)$ über R ist auch ein positives Funktional über R_1. Ihm entspricht eine zyklische Darstellung der Algebra R_1. Wir bezeichnen diese Darstellung mit $x \to A_x^{(f)}$. Weiter bezeichne $x \to A_x$ die direkte Summe aller dieser Darstellungen. Nach Theorem 1 aus § 17, Nr. 3, ist dann

$$|A_x| \leqq |x|_1, \tag{1}$$

wobei $|A_x|$ die Norm des Operators A_x ist.

Die Abbildung $x \to A_x$ ist ein Isomorphismus der Algebra R. In der Tat, es sei $A_x = 0$. Dann gilt auch $A_{x^* x} = A_{x^*} A_x = 0$. Hieraus folgt $A_{x^* x}^{(f)} \xi = 0$, d. h. $\langle A_{x^* x}^{(f)} \xi, \eta \rangle = 0$ für alle Operatoren ξ, η aus dem entsprechenden Raum $\mathfrak{H}^{(f)}$. Wir setzen insbesondere $\xi = \eta = \xi_0$, wobei ξ_0 die das Einselement von R enthaltende Klasse sei. Auf diese Weise folgt $f(x^* x) = 0$ für alle positiven Funktionale über R. Da R eine reduzierte Algebra ist, muß demzufolge $x = 0$ sein.

Die Abbildung $x \to A_x$ ist also tatsächlich ein Isomorphismus der Algebra R. Durch die Formel $|x| = |A_x|$ führen wir nun in R eine Norm ein. Offenbar ist R mit der Norm $|x| = |A_x|$ und damit dann auch die vollständige Hülle $\tilde{R}$ von R bezüglich dieser Norm einer Algebra von Operatoren in einem HILBERTschen Raum (nämlich der aus den Operatoren A_x und ihren Limites bestehenden Algebra) vollisomorph.

Wir zeigen nun, daß $|x|$ eine reguläre Norm ist. Es sei $f(x)$ ein positives Funktional über R. Dann gilt für jedes Element $x \in R$

$$|f(x)| = |\langle A_x^{(f)} \xi_0, \xi_0 \rangle| \leqq |A_x^{(f)}| |\xi_0|^2 \leqq |A_x| |\xi_0|^2 = |x| f(e).$$

Diese Ungleichung zeigt, daß das Funktional $f(x)$ im Sinne der Norm $|x|$ stetig ist. Folglich läßt es sich auf eindeutige Weise zu einem positiven Funktional über der vollständigen Hülle $\tilde{R}$ von R bezüglich $|x|$ fortsetzen. Dies bedeutet nun aber gerade, daß $|x|$ eine reguläre Norm ist.

Wir bemerken, daß $|x| = |A_x|$ durch die Menge der positiven Funktionale über der Algebra R_1 definiert werden kann, die mit der Menge der positiven Funktionale über der Algebra R übereinstimmt. Daher hängt $|x|$ nicht von der Wahl der regulären Norm $|x|_1$ ab.

Wegen (1) ist $|x|$ minimal.

Folgerung. *Die minimale reguläre Norm ist vollregulär.*

Mit dieser Norm ist nämlich die Algebra R einer gewissen Teilalgebra von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ vollisomorph, und für die Operatoren $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ gilt $|A^*A| = |A|^2$ (vgl. § 5, Nr. 10 (2) und § 16, Nr. 1).

Theorem 2. *Für die minimale reguläre Norm gilt*

$$|x| = \sqrt{\sup f(x^* x)},$$

wobei die obere Grenze über alle positiven Funktionale f über R zu erstrecken ist, für die $f(e) = 1$ ist.

Beweis. Es sei x ein Element der Algebra R und ξ das x entsprechende Element des Raumes $\mathfrak{H}^{(f)}$. Dann ist

$$|A_{x_0}^{(f)}|^2 = \sup_{|\xi|=1} |A_{x_0}^{(f)}\xi|^2 = \sup_{f(x^*x)=1} f(x^* x_0^* x_0 x);$$

dabei ist die obere Grenze über alle $x \in R$ zu nehmen, für die $f(x^*x) = 1$ ist. Wir setzen $f_x(y) = f(x^* y x)$. Offenbar ist $f_x(y)$ ein positives Funktional über R und $f_x(e) = f(x^*x) = 1$. Daher gilt

$$f(x^* x_0^* x_0 x) = f_x(x_0^* x_0) \leqq \sup_{f(e)=1} f(x_0^* x_0).$$

Hieraus folgt

$$|A_{x_0}^{(f)}|^2 \leqq \sup_{f(e)=1} f(x_0^* x_0),$$

also

$$|x_0|^2 = |A_{x_0}|^2 = \sup_f |A_{x_0}^{(f)}|^2 \leqq \sup_{f(e)=1} f(x_0^* x_0).$$

Andererseits gilt für $f(e) = 1$

$$f(x_0^* x_0) = |A_{x_0}^{(f)}\xi_0|^2 \leqq |A_{x_0}^{(f)}|^2 \leqq |A_{x_0}|^2 = |x_0|^2.$$

Daher ist, wie behauptet wurde, $\sup\limits_{f(e)=1} f(x_0^* x_0) = |x_0|^2$.

Theorem 3. *In einer reduzierten Algebra gibt es genau dann eine reguläre Norm, wenn alle Elemente der Algebra R beschränkt sind.*

Beweis. Die Notwendigkeit dieser Bedingung wurde bereits in Nr. 1 bewiesen; es ist also nur noch zu zeigen, daß sie auch hinreichend ist.

Alle Elemente der Algebra R seien beschränkt, so daß

$$|f(x^* x)| \leqq C_{x^* x} f(e)$$

für alle positiven Funktionale f über R gilt. Hieraus folgt, wenn wir wieder $f_x(y) = f(x^* y x)$ setzen,

$$f_x(x_0^* x_0) \leqq C_{x_0^* x_0} f_x(e),$$

d. h.

$$f(x^* x_0^* x_0 x) \leqq C_{x_0^* x_0} f(x^* x).$$

Hierfür können wir auch

$$|A_{x_0}^{(f)}\xi| \leqq C_{x_0^* x_0} |\xi|^2$$

schreiben; $A_{x_0}^{(f)}$ ist also ein beschränkter Operator und

$$|A_{x_0}^{(f)}| \leqq \sqrt{C_{x_0^* x_0}}.$$

Für festes x_0 liegen also die Normen aller Operatoren A_{x_0} unter ein und derselben Zahl. Daher läßt sich die direkte Summe $x \to A_x$ aller Darstellungen $x \to A_x^{(f)}$ bilden. Wie beim Beweis von Theorem 1 gezeigt wurde, ist die Norm $|x| = |A_x|$ regulär.

Folgerung. *In einer reduzierten symmetrischen* BANACH*schen Algebra mit Einselement existiert eine reguläre (also auch eine minimale reguläre) Norm.* Dies folgt unmittelbar aus den Theoremen 3 und 2 und aus Satz I, Nr. 1.

§ 19. Unzerlegbare Funktionale und irreduzible Darstellungen

1. Positive Funktionale, die einem gegebenen Funktional untergeordnet sind. Es sei R eine symmetrische Algebra. Weiter seien f und f_1 positive Funktionale über R. Wir sagen, f_1 sei f *untergeordnet*, in Zeichen $f_1 \prec f$, wenn es eine Zahl λ gibt derart, daß $\lambda f - f_1$ ein positives Funktional über R ist. Offenbar ist λ in diesem Fall reell und nicht kleiner als Null; für $\lambda < 0$ und $f(x^* x) > 0$ wäre nämlich $\lambda f(x^* x) - f_1(x^* x) < 0$.

Theorem 1. *Es sei $x \to A_x$ die zyklische Darstellung einer symmetrischen Algebra R mit Einselement in dem Raum $\mathfrak{H}$, die durch ein gegebenes positives Funktional $f(x)$ gegeben wird, und ξ_0 ein zugehöriger zyklischer Vektor. Dann hat jedes positive Funktional $f_1(x)$, das $f(x)$ untergeordnet ist, die Gestalt*

$$f_1(x) = \langle A_x B \xi_0, \xi_0 \rangle; \tag{1}$$

dabei ist B ein beschränkter positiv definiter Operator im Raum $\mathfrak{H}$, der mit allen Operatoren A_x, $x \in R$, vertauschbar ist. Umgekehrt bestimmt jeder derartige Operator B gemäß (1) *ein positives Funktional $f_1(x)$, das $f(x)$ untergeordnet ist.*

Die Zuordnung $f_1 \to B$ ist umkehrbar eindeutig.

Beweis. Es sei B ein beschränkter positiv definiter Operator in $\mathfrak{H}$, der mit allen Operatoren A_x vertauschbar ist. Dann ist $f_1(x) = \langle A_x B \xi_0, \xi_0 \rangle$ ein positives Funktional; es gilt nämlich

$$f_1(x^* x) = \langle A_{x^* x} B \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle A_x B \xi_0, A_x \xi_0 \rangle = \langle B A_x \xi_0, A_x \xi_0 \rangle \geqq 0,$$

weil B positiv definit ist. Das Funktional $f_1(x)$ ist dem Funktional $f(x)$ untergeordnet. Um dies einzusehen, gehen wir davon aus, daß B beschränkt ist. Es gibt also eine Zahl λ derart, daß

$$\langle B\xi, \xi \rangle \leqq \lambda \langle \xi, \xi \rangle, \quad \text{also} \quad \lambda \langle \xi, \xi \rangle - \langle B\xi, \xi \rangle \geqq 0$$

für alle Vektoren ξ aus $\mathfrak{H}$ ist. Setzen wir in dieser Ungleichung $\xi = A_x \xi_0$, so erhalten wir

$$\lambda \langle A_{x^* x} \xi_0, \xi_0 \rangle - \langle A_{x^* x} B \xi_0, \xi_0 \rangle \geqq 0,$$

also

$$\lambda f(x^* x) - f_1(x^* x) \geqq 0.$$

Dies bedeutet aber, daß $\lambda f - f_1$ ein positives Funktional ist, d. h., es gilt tatsächlich $f_1 < f$.

Umgekehrt sei nun f_1 ein positives Funktional, das f untergeordnet ist; das Funktional $\lambda f - f_1$ sei positiv, also $\lambda f(x^* x) - f_1(x^* x) \geqq 0$, d. h.

$$0 \leqq f_1(x^* x) \leqq \lambda f(x^* x). \tag{2}$$

Für

$$\xi = A_x \xi_0, \quad \eta = A_y \xi_0$$

setzen wir

$$\langle \xi, \eta \rangle_1 = f_1(y^* x).$$

Dieser Ausdruck hängt nur von ξ und η ab. In der Tat, es sei etwa $\xi = A_x \xi_0$ und $\xi = A_{x'} \xi_0$, also $A_{x-x'} \xi_0 = 0$. Dann gilt

$$f\big((x - x')^* (x - x')\big) = \langle A_{x-x'} \xi_0, A_{x-x'} \xi_0 \rangle = 0.$$

Wegen der Ungleichung (2) folgt hieraus, daß auch $f_1\big((x - x')^* (x - x')\big) = 0$ ist. Auf Grund der SCHWARZschen Ungleichung gilt folglich

$$f_1\big(y^* (x - x')\big) = 0, \quad f_1(y^* x) = f_1(y^* x').$$

Damit ist die Unabhängigkeit des Ausdrucks $\langle \xi, \eta \rangle_1$ von der Wahl des Elements ξ in der Gestalt $\xi = A_x \xi_0$ bewiesen. Dasselbe gilt offenbar auch hinsichtlich η.

Wir bezeichnen nun die Menge aller Vektoren ξ, welche die Gestalt $A_x \xi_0$ haben, mit $\mathfrak{H}'$. Da ξ_0 ein zyklisches Element ist, ist $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ dicht. Wie soeben gezeigt wurde, ist der Ausdruck $\langle \xi, \eta \rangle_1$ auf $\mathfrak{H}'$ eindeutig definiert. Offenbar ist $\langle \xi, \eta \rangle_1$ eine bilineare Form in ξ, η. Die Ungleichung (2) läßt sich auch in der Gestalt

$$0 \leqq \langle \xi, \xi \rangle_1 \leqq \lambda \langle \xi, \xi \rangle$$

schreiben. Demzufolge ist $\langle \xi, \eta \rangle_1$ eine beschränkte bilineare Form über $\mathfrak{H}'$. Daher läßt sie sich auf eindeutige Weise zu einer beschränkten bilinearen Form über dem ganzen Raum $\mathfrak{H}$ fortsetzen. Die Ungleichung (2) gilt dann auf ganz $\mathfrak{H}$. Nun entspricht aber der beschränkten bilinearen Form $\langle \xi, \eta \rangle_1$ über $\mathfrak{H}$ ein beschränkter Operator B derart, daß $\langle \xi, \eta \rangle_1 = \langle B\xi, \eta \rangle$ ist (vgl. § 5, Nr. 3). Da $\langle B\xi, \xi \rangle = \langle \xi, \xi \rangle_1 = f_1(x^* x) \geqq 0$ ist, ist B positiv definit. Um zu zeigen, daß B mit allen Operatoren A_x vertauschbar ist, schreiben wir für $\xi = A_x \xi_0$ und $\eta = A_y \xi_0$ folgende Beziehungen auf:

$$\langle B A_{x_0} \xi, \eta \rangle = \langle B A_{x_0 x} \xi_0, A_y \xi_0 \rangle = \langle A_{x_0 x} \xi_0, A_y \xi_0 \rangle_1 = f_1(y^* x_0 x),$$

$$\langle A_{x_0} B \xi, \eta \rangle = \langle B \xi, A_{x_0^*} \eta \rangle = \langle B A_x \xi_0, A_{x_0^* y} \xi_0 \rangle$$
$$= \langle A_x \xi_0, A_{x_0^* y} \xi_0 \rangle_1 = f_1\big((x_0^* y)^* x\big) = f_1(y^* x_0 x).$$

Hieraus folgt

$$\langle A_{x_0} B \xi, \eta \rangle = \langle B A_{x_0} \xi, \eta \rangle \tag{3}$$

für alle ξ und η aus $\mathfrak{H}'$. Da beide Seiten dieser Gleichung stetige Funktionen von λ und η bezüglich der Norm in $\mathfrak{H}$ sind und $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ dicht ist, gilt diese Gleichung auch für alle Vektoren ξ und η aus $\mathfrak{H}$. Dies bedeutet aber, daß $A_{x_0} B = B A_{x_0}$ gilt, d. h., B ist mit A_{x_0} vertauschbar.

Schließlich gilt

$$f_1(x) = f_1(e^* x) = \langle A_x \xi_0, A_e \xi_0 \rangle_1 = \langle B A_x \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle A_x B \xi_0, \xi_0 \rangle;$$

B genügt also der Bedingung (1).

Ist B ein gegebener Operator, der mit allen Operatoren A_x vertauschbar ist, so wird durch die Gleichung (1) offenbar ein Funktional $f_1(x)$ festgelegt. Umgekehrt gilt: Ist $f_1(x)$ ein gegebenes positives Funktional, das dem Funktional $f(x)$ untergeordnet ist, so entspricht $f_1(x)$ vermöge (1) ein eindeutig bestimmter beschränkter positiv definiter Operator B, der mit allen Operatoren A_x vertauschbar ist.

Ersetzt man nämlich in (1) x durch das Produkt $y^* x$ und schreibt die erhaltene Gleichung in der Gestalt

$$f_1(y^* x) = \langle B A_x \xi_0, A_y \xi_0 \rangle,$$

so erkennt man, daß das skalare Produkt $\langle B\xi, \eta \rangle$ für alle Vektoren ξ und η aus $\mathfrak{H}'$ eindeutig durch f_1 bestimmt ist. Da aber $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ dicht ist, ist damit auch der beschränkte Operator B eindeutig bestimmt.

2. Die Algebra C_f. Es sei $f_1(x)$ ein beliebiges und $f(x)$ ein positives Funktional über einer symmetrischen Algebra R mit Einselement. Wir wollen sagen, *das Funktional $f_1(x)$ sei dem positiven Funktional $f(x)$ untergeordnet*, wenn $f_1(x)$ eine mit komplexen Koeffizienten gebildete Linearkombination positiver Funktionale ist, die $f(x)$ untergeordnet sind.

Aus Theorem 1 folgt leicht, daß jedes Funktional $f'(x)$, das dem Funktional $f(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$ untergeordnet ist, die Gestalt

$$f'(x) = \langle B A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$$

hat, wobei B ein beschränkter Operator ist, der mit allen Operatoren A_x vertauschbar ist. Es sei $f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k f_k(x)$; die $f_k(x)$ seien positive Funktionale, die dem positiven Funktional $f(x)$ untergeordnet sind. Dann gilt $f_k(x) = \langle B_k A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$ mit positiv definiten Operatoren B_k, die mit allen Operatoren A_x vertauschbar sind. Wir setzen $B = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k B_k$. Offenbar ist B beschränkt und mit allen A_x vertauschbar. Darüber hinaus gilt

$$f'(x) = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k \langle B_k A_k \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle B A_x \xi_0, \xi_0 \rangle.$$

Umgekehrt läßt sich jeder beschränkte Operator B, der mit allen A_x vertauschbar ist, als Linearkombination positiv definiter Operatoren, die mit allen A_x vertauschbar sind, darstellen (vgl. § 17, Nr. 4, Satz V). Daher ist das Funktional $f'(x) = \langle B A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$ als Linearkombination positiver Funktionale, die dem Funktional $f(x)$ untergeordnet sind, darstellbar. Wir fassen zusammen: *Es gibt eine umkehrbar eindeutige Zuordnung zwischen den Funktionalen $f'(x)$, die einem gegebenen positiven Funktional $f(x)$ untergeordnet sind, und den Elementen der Algebra aller beschränkten Operatoren B, die mit allen Operatoren A_x vertauschbar sind. Diese Zuordnung wird durch die Formel*

$$f'(x) = \langle B A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$$

hergestellt.

Wir bezeichnen mit C_f die Gesamtheit aller Funktionale, die dem positiven Funktional $f(x)$ untergeordnet sind. Auf Grund des soeben ausgesprochenen Tatbestandes kann C_f als symmetrische Algebra aufgefaßt werden: Ist

$$f_1(x) = \langle B_1 A_x \xi_0, \xi_0 \rangle, \quad f_2(x) = \langle B_2 A_x \xi_0, \xi_0 \rangle,$$

so definieren wir das Produkt $f_1 \cdot f_2$ der Funktionale f_1 und f_2 durch

$$(f_1 f_2)(x) = \langle B_1 B_2 A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$$

und die Involution durch

$$f^*(x) = \langle B^* A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$$

oder

$$f^*(x) = \overline{f(x^*)}.$$

Zusammen mit der gewöhnlichen Addition und Multiplikation mit einer Zahl wird C_f mit diesen Operationen eine Algebra, die der Algebra R_f aller beschränkten Operatoren B, die mit allen A_x vertauschbar sind, symmetrisch isomorph ist. Hierbei entspricht dem Einsoperator das Funktional $f(x)$ selbst.

3. Unzerlegbare positive Funktionale. Ein positives Funktional heiße *unzerlegbar*, wenn jedes Funktional f_1, das dem Funktional f untergeordnet ist, ein Vielfaches von $f(x)$ ist, also $f_1(x) = \lambda f(x)$ gilt. Mit anderen Worten, f heiße unzerlegbar, wenn die Algebra C_f nur aus Funktionalen der Gestalt λf besteht.

Theorem 2. *Eine zyklische Darstellung $x \to A_x$ ist genau dann irreduzibel, wenn das zugehörige positive Funktional $f(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$ unzerlegbar ist.*

Beweis. Nach Satz II aus § 17, Nr. 6, ist die Irreduzibilität der Darstellung $x \to A_x$ gleichbedeutend damit, daß die Algebra R_f (vgl. Nr. 2) nur aus Operatoren besteht, die Vielfache des Einsoperators sind. Wegen der Isomorphie der Algebren R_f und C_f folgt hieraus, daß dann die Algebra C_f aus den Vielfachen λf besteht. Das bedeutet aber die Unzerlegbarkeit des Funktionals f.

4. Vollständigkeits- und Approximationssätze. Wir kommen jetzt auf einige Anwendungen der in § 3, Nr. 7 bis 9, erhaltenen Ergebnisse zu sprechen.

Es sei R eine BANACHsche symmetrische Algebra mit Einselement. Wir bezeichnen mit H die Menge aller hermiteschen Elemente von R. Offenbar ist H ein reeller BANACHscher Raum. Nach Satz I aus § 10, Nr. 4, kann jedes positive Funktional $f(x)$ als beschränktes lineares Funktional über H mit $|f| = f(e)$ betrachtet werden. Daher läßt sich $f(x)$ als Element des zu H konjugierten Raumes H' auffassen. Es sei nun K die Gesamtheit aller positiven Funktionale, die der Bedingung $f(e) = 1$[1] genügen. Dann ist $|f| = 1$, d. h., K ist eine Teilmenge der Einheitskugel Q in H'. Nach § 3, Nr. 7, Satz III, ist Q in der schwachen Topologie von H' bikompakt; Q ist nämlich die Gesamtheit aller linearen Funktionale $f \in H'$, die der Ungleichung

$$|f(x)| \leqq p(x) \quad \text{mit} \quad p(x) = |x|$$

genügen. Da die Funktion $F(f) = f(e)$ stetig und die Gesamtheit aller positiven Funktionale in H' abgeschlossen ist, ist K eine abgeschlossene Teilmenge der bikompakten Menge Q. Folglich ist K selbst bikompakt.

Darüber hinaus ist K konvex; ist nämlich $f_1, f_2 \in K$, also $f_1(e) = f_2(e) = 1$, so ist

$$f(x) = t f_1(x) + (1-t) f_2(x) \qquad (0 \leqq t \leqq 1)$$

ein positives Funktional mit $f(e) = 1$, also $f \in K$.

I. *Ein positives Funktional $f(x)$, das der Bedingung $f(e) = 1$ genügt, ist genau dann unzerlegbar, wenn es ein Extremalpunkt der Menge K ist.*

Beweis. Das unzerlegbare positive Funktional $f(x)$ möge der Strecke $[f_1, f_2]$ in K angehören, d. h., es habe die Gestalt

$$f = t f_1 + (1-t) f_2 \qquad (0 \leqq t \leqq 1).$$

Dann ist $f - t f_1 = (1-t) f_2$ ein positives Funktional, so daß das Funktional f_1 dem Funktional f untergeordnet ist. Da f unzerlegbar ist, muß $f_1 = t_1 f$ sein. Insbesondere ist dann $f_1(e) = t_1 f(e)$, also $t_1 = 1$ und $f_1 = f$. Daher ist f kein innerer Punkt der Strecke $[f_1, f_2] \subset K$. Dies gilt für jede Strecke in K. Folglich ist f ein Extremalpunkt.

Angenommen, f sei Extremalpunkt von K. Wir betrachten ein Funktional f_1 aus K, das f untergeordnet ist. Dann gibt es eine Zahl $\lambda > 0$, für die $f' = f - \lambda f_1$ ein positives Funktional ist. Wir setzen $f_2 = \frac{f'}{\mu}$, $\mu = f'(e)$. Dann gilt $f_2(e) = 1$; folglich ist $f_2 \in K$ und

$$f = \lambda f_1 + \mu f_2 \tag{1}$$

mit $\lambda \geqq 0$, $\mu \geqq 0$, $\lambda + \mu = 1$ (letzteres folgt aus (1) für $x = e$). Demnach gehört f zur Strecke $[f_1, f_2]$ in K. Da f aber Extremalpunkt ist, muß es mit einem der Endpunkte f_1, f_2 dieser Strecke zusammenfallen. Es muß also $f = f_1$ sein. Jedes normierte Funktional aus K, das dem Funktional f untergeordnet ist, stimmt also mit diesem überein. Folglich ist f unzerlegbar. Damit ist der Satz I vollständig bewiesen.

---

[1]) Ein positives Funktional $f(x)$, das der Bedingung $f(e) = 1$ genügt, heiße *normiert*.

Wir betrachten nun die Gesamtheit aller irreduziblen Darstellungen einer symmetrischen Algebra R. Hierbei wollen wir zwei äquivalente irreduzible Darstellungen als nicht voneinander verschieden ansehen. Die Gesamtheit dieser Darstellungen heiße *vollständig*, wenn es zu jedem Element $x_0 \neq 0$ der Algebra R eine irreduzible Darstellung $x \to A_x$ gibt, derart, daß $A_{x_0} \neq 0$ ist.

Theorem 3. *Die Gesamtheit aller irreduziblen Darstellungen einer* BANACH*schen reduzierten Algebra ist vollständig.*

Beweis. Es sei R eine BANACHsche reduzierte Algebra (vgl. § 18, Nr. 2) und $x_0 \neq 0$ ein Element dieser Algebra. Nach der Definition der reduzierten Algebra gibt es ein positives Funktional $f_1(x)$ mit

$$f_1(e) = 1 \quad \text{und} \quad f_1(x_0^* x_0) > 0.$$

Weiter sei $P_{x_0^* x_0}$ die durch das Element $x_0^* x_0$ festgelegte Stützhyperebene an K (vgl. § 3, Nr. 9). Auf Grund des Satzes VII aus § 3, Nr. 9, enthält $P_{x_0^* x_0}$ einen Extremalpunkt f_0. Für diesen gilt

$$f_0(x_0^* x_0) = \max_{f \in K} f(x_0^* x_0) \geqq f_1(x_0^* x) > 0. \tag{2}$$

Andererseits ist nach Satz I jeder Extremalpunkt f_0 der Menge K ein unzerlegbares positives Funktional. Dieses Funktional bestimmt die irreduzible Darstellung $x \to A_x$ der Algebra R (vgl. Theorem 2 aus Nr. 3), für die

$$\langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle = f_0(x)$$

ist; hier ist ξ_0 ein Vektor des Darstellungsraumes. Insbesondere gilt wegen (2)

$$|A_{x_0} \xi_0|^2 = \langle A_{x_0^* x_0} \xi_0, \xi_0 \rangle = f_0(x_0^* x_0) > 0.$$

Folglich ist $A_{x_0} \neq 0$, was zu beweisen war.

Wir wenden nun auf die Menge K den Satz von KREIN-MILMAN an (vgl. § 3, Nr. 9). Die Menge K enthält alle endlichen Linearkombinationen der Gestalt

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i f_i;$$

dabei sind die f_i unzerlegbare positive Funktionale, die den Bedingungen $f_i(e) = 1$ genügen, und die λ_i nichtnegative reelle Zahlen mit $\sum_{i=1}^{n} \lambda_i = 1$. Es bezeichne K_1 die Gesamtheit aller dieser Linearkombinationen. Zu K gehören auch alle schwachen Häufungspunkte der Menge K_1; es sei K_2 die abgeschlossene Hülle der Menge K_1 in der schwachen Topologie von H'. Da K_2 die kleinste bikompakte konvexe Menge ist, die alle Extremalpunkte von K enthält, muß $K_2 = K$ sein. Es gilt also

Theorem 4. *Es sei $f(x)$ ein positives Funktional über einer* BANACH*schen symmetrischen Algebra mit Einselement. Dann gibt es zu jedem $x_0 \in R$ und jedem $\varepsilon > 0$ eine Linearkombination $\sum_{i=1}^{n} f_i$ unzerlegbarer positiver Funktionale*

über R, die den Bedingungen[1])

$$\sum_{i=1}^{n} f_i(e) = f(e)$$

und

$$\left| f(x_0) - \sum_{i=1}^{n} f_i(x_0) \right| < \varepsilon$$

genügt.

Dieser Satz läßt sich unter Zuhilfenahme der Darstellungen von R auch noch auf andere Weise formulieren. Hierfür braucht man nur Theorem 2 aus § 17, Nr. 3, und Theorem 2 aus Nr. 3 heranzuziehen. So ergibt sich dann der folgende Satz.

II. *Es sei $x \to A_x$ eine Darstellung der* BANACH*schen symmetrischen Algebra R mit Einselement in dem Raum $\mathfrak{H}$. Zu jedem $x_0 \in R$, jedem $\xi^0 \in \mathfrak{H}$ und jedem $\varepsilon > 0$ gibt es irreduzible Darstellungen $x \to A_{1,x}, \ldots, A_{n,x}$ und Vektoren $\xi_1^0, \ldots, \xi_n^0$ des Darstellungsraumes derart, daß*

$$\|\xi_1^0\|^2 + \cdots + \|\xi_n^0\|^2 = \|\xi^0\|^2$$

und

$$\left| \langle A_x \xi^0, \xi^0 \rangle - \sum_{i=1}^{n} \langle A_{i,x} \xi_i^0, \xi_i^0 \rangle \right| < \varepsilon$$

gilt.

Häufig erweist es sich als zweckmäßig, anstelle der schwachen Topologie von H' eine andere Topologie, die sogenannte *kompakt-gleichmäßige* Topologie, zu benutzen, die durch die folgendermaßen konstruierte Umgebungsbasis festgelegt wird.

Es sei Q eine beliebige Menge, die in der durch die Norm von H definierten Topologie kompakt ist, und ε eine beliebige positive Zahl. Unter der Umgebung $U(f_0; Q; \varepsilon)$ des Funktionals f_0 soll dann die Gesamtheit aller Funktionale $f \in \mathfrak{H}'$ verstanden werden, die der Ungleichung

$$|f(x) - f_0(x)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad x \in Q$$

genügen.

III. *Ist $\mathfrak{S}$ eine Teilmenge von H', die bezüglich der Norm von H' beschränkt ist, so ist jeder schwache Häufungspunkt dieser Menge auch ein Häufungspunkt im Sinne der kompakt-gleichmäßigen Topologie.*[2])

B e w e i s. Es sei $|f| \leq C$ für alle $f \in \mathfrak{S}$ und f_0 ein schwacher Häufungspunkt der Menge $\mathfrak{S}$. Zu zeigen ist, daß jede Umgebung $U(f_0; Q; \varepsilon)$ Elemente $f \in \mathfrak{S}$ enthält.

Wir setzen $\varepsilon_1 = \frac{\varepsilon}{2C+1}$. Es gibt endlich viele Elemente $x_1, \ldots, x_n \in Q$ derart, daß jedes andere Element $x \in Q$ von wenigstens einem x_p $(p = 1, \ldots, n)$

---

[1]) Hier sind die Funktionale $f(x)$, $f_i(x)$ bereits nicht mehr gemäß $f(e) = 1$ normiert; die Zahlen λ_i sind in den Funktionalen $f_i(x)$ enthalten.

[2]) Man kann sogar zeigen, daß auf diesen Mengen $\mathfrak{S}$ die schwache Topologie und die kompakt-gleichmäßige Topologie miteinander übereinstimmen; wir werden hiervon jedoch keinen Gebrauch machen.

um weniger als ε_1 entfernt ist (vgl. § 2, Nr. 14, Satz I). Die schwache Umgebung $U(f_0; x_1, \ldots, x_n; \varepsilon_1)$ enthält gewiß ein Element $f \in \mathfrak{S}$. Dieses gehört dann auch zu $U(f_0; Q; \varepsilon)$; es ist nämlich einerseits

$$|f(x_p) - f_0(x_p)| < \varepsilon_1 \qquad (p = 1, \ldots, n),$$

und andererseits gibt es zu einem gegebenen $x \in Q$ stets ein x_p mit

$$|x_p - x| < \varepsilon_1,$$

so daß zusammen folgendes gilt:

$$|f(x) - f_0(x)| \leqq |f(x) - f(x_p)| + |f(x_p) - f_0(x_p)| + |f_0(x_p) - f_0(x)|$$
$$< |f|\,|x - x_p| + \varepsilon_1 + |f_0|\,|x - x_p| < C\varepsilon_1 + \varepsilon_1 + C\varepsilon_1 = \varepsilon.$$

Ist der Raum H separabel, so haben die schwachen Umgebungen auf $\mathfrak{S}$ eine abzählbare Basis. Jeder schwache Häufungspunkt f_0 der Menge $\mathfrak{S}$ ist dann schwacher Limes einer Folge von Funktionalen $\varphi_n \in \mathfrak{S}$. Diese Folge ist bezüglich der Norm beschränkt, so daß sie nach Satz III auf jeder kompakten Menge gleichmäßig gegen f_0 strebt. Daher bedeutet Theorem 4 folgendes: *Jedes positive Funktional $f(x)$ über R ist im Sinne der kompakt-gleichmäßigen Topologie Limes von Funktionalen $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, wobei die $f_i(x)$ unzerlegbare Funktionale mit $\sum_{i=1}^{n} f_i(e) = f(e)$ sind. Ist die Algebra R separabel, so ist $f(x)$ sogar Limes einer Folge von Funktionalen $\sum_{i=1}^{n} f_i(x)$, die auf jeder kompakten Menge gleichmäßig konvergiert.*

§ 20. Anwendungen auf kommutative symmetrische Algebren

1. Die minimale reguläre Norm in einer kommutativen symmetrischen Algebra.

Theorem 1. *Es sei R eine* BANACH*sche kommutative symmetrische Algebra mit Einselement. Die in R definierte Norm stimmt genau dann mit der minimalen regulären Norm überein, wenn R vollregulär ist, d. h., wenn R einer Algebra $C(\mathfrak{M})$ vollisomorph ist.*

Beweis. Die Norm von R stimme mit der minimalen regulären Norm überein. Auf Grund der in § 18, Nr. 3, formulierten Folgerung ist diese Norm vollregulär, so daß R einer Algebra $C(\mathfrak{M})$ vollisomorph ist (vgl. § 16, Nr. 2, Theorem 2).

Angenommen, R sei einer Algebra $C(\mathfrak{M})$ vollisomorph. Jedes positive Funktional $f(x)$ über $C(\mathfrak{M})$ ist auch ein beschränktes Funktional, also ein beschränktes Integral (vgl. § 6, Nr. 15). In der Tat, aus $x(M) \geqq 0$ folgt $y(M) = \sqrt{x(M)} \in C(\mathfrak{M})$, $x = y^2 = y^* y$, und daher ist $f(x) \geqq 0$. Das positive Funktional $f(x)$ über $C(\mathfrak{M})$ hat also die Gestalt

$$f(x) = \int_{\mathfrak{M}} x(M)\, d\mu(M),$$

wobei μ das diesem Integral entsprechende Maß ist. Hierbei gilt

$$f(e) = \int_{\mathfrak{M}} d\mu(M) = \mu(\mathfrak{M}).$$

Nun bezeichne $|x|_0$ die minimale reguläre Norm von R. Dann ist

$$|x|_0^2 = \sup_{f(e)=1} f(x^* x) = \sup_{\mu(\mathfrak{M})=1} \int_{\mathfrak{M}} |x(M)|^2 d\mu(M) = \max_{\mathfrak{M}} |x(M)|^2 = |x|^2,$$

d. h., die in R definierte Norm stimmt mit der minimalen regulären Norm überein.

Folgerung 1. *Es seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ bikompakte Räume. Dann bleibt bei jedem symmetrischen Isomorphismus der Algebra $C(\mathfrak{M})$ auf eine Teilalgebra R' der Algebra $C(\mathfrak{M}')$, die in $C(\mathfrak{M}')$ dicht ist, die Norm invariant, so daß ein Isomorphismus auf die ganze Algebra $C(\mathfrak{M}')$ vorliegt.*

Beweis. Nach Theorem 1 handelt es sich bei der in $C(\mathfrak{M})$ und $C(\mathfrak{M}')$ definierten Norm um die minimale reguläre Norm. Die Algebra $C(\mathfrak{M}')$ ist die abgeschlossene Hülle von R' bezüglich dieser Norm. Nach Definition der regulären Norm haben folglich die Algebren R' und $C(\mathfrak{M}')$ ein und denselben Vorrat an positiven Funktionalen. Andererseits haben aber auch die Algebren $C(\mathfrak{M})$ und R' ein und denselben Vorrat an positiven Funktionalen, weil sie symmetrisch isomorph sind. Hierbei wird zwischen den positiven Funktionalen f über $C(\mathfrak{M})$ einerseits und den positiven Funktionalen f' über R' andererseits durch die Gleichung $f(x) = f'(x')$, in der $x \in C(\mathfrak{M})$ und $x' \in R'$ bei dem Isomorphismus einander zugeordnete Elemente bezeichnen, die Zuordnung hergestellt. Hieraus folgt nun aber

$$|x| = \sqrt{\sup_{f(e)=1} f(x^* x)} = \sqrt{\sup_{f'(e')=1} f'(x'^* x')} = |x'|.$$

Folgerung 2. *Jeder symmetrische Isomorphismus einer vollständigen vollregulären kommutativen Algebra R in eine vollständige vollreguläre kommutative Algebra R' läßt die Norm invariant.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit darf angenommen werden, daß R und R' ein Einselement haben. Trifft diese Annahme nicht zu, so erhält man durch Adjunktion des Einselements neue vollständige vollreguläre Algebren R_1 und R_1', die ebenfalls symmetrisch isomorph sind; man braucht hierzu nur den Isomorphismus

$$\lambda e + x \to \lambda e' + x'$$

zu nehmen.

Wir setzen also voraus, R habe ein Einselement und R_0' sei das Bild von R bei dem Isomorphismus $x \to x'$. Hierbei darf angenommen werden, daß R_0' in R' dicht ist, weil wir sonst R' durch die abgeschlossene Hülle $\tilde{R}_0'$ von R_0' in R' ersetzen könnten. Dann sind R bzw. R' zu Algebren $C(\mathfrak{M})$ bzw. $C(\mathfrak{M}')$ vollisomorph, so daß unser Isomorphismus ein symmetrischer Isomorphismus der Algebra $C(\mathfrak{M})$ in die dichte Teilalgebra R_0' der Algebra $C(\mathfrak{M}')$ ist. Daher ergibt sich die Folgerung 2 unmittelbar aus der Folgerung 1.

2. Positive Funktionale über einer kommutativen symmetrischen Algebra. Es sei R eine BANACHsche kommutative symmetrische Algebra mit Einselement.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{M}$ wieder den bikompakten Raum aller maximalen Ideale der Algebra R. Die Abbildung $M \rightarrow M^*$ ist eine Homöomorphie des Raumes $\mathfrak{M}$ auf sich (vgl. § 16, Nr. 2). Daher ist die Menge $\mathfrak{M}_0$ aller maximalen Ideale M, für die $M = M^*$ ist, d. h. die Menge aller symmetrischen maximalen Ideale, eine abgeschlossene Teilmenge des Raumes $\mathfrak{M}$.

Weiter sei nun R_1 die aus R konstruierte reduzierte Algebra. In R_1 führen wir als Norm die minimale reguläre Norm ein. Die vollständige Hülle von R_1 bezüglich dieser Norm nennen wir *vollreguläre vollständige Hülle der Algebra* R und bezeichnen sie mit $R^\wedge$.

Theorem 2. *Es sei R eine BANACHsche kommutative symmetrische Algebra mit Einselement. Dann ist $R^\wedge$ der Algebra $C(\mathfrak{M}_0)$ vollisomorph, wobei $\mathfrak{M}_0$ der Raum aller symmetrischen maximalen Ideale der Algebra R ist.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}^\wedge$ die Menge aller maximalen Ideale der Algebra $R^\wedge$. Nach Theorem 1 genügt es, zu zeigen, daß $\mathfrak{M}^\wedge$ und $\mathfrak{M}_0$ homöomorph sind.

Es sei $M^\wedge$ ein maximales Ideal der Algebra $R^\wedge$. Dieses definiert einen Homomorphismus der Algebra $R^\wedge$ und damit auch der Algebra R_1 in den Körper der komplexen Zahlen. Nun ist aber R_1 die Quotientenalgebra von R nach einem bestimmten zweiseitigen symmetrischen Ideal I. Daher ist der eben erwähnte Homomorphismus der Algebra R_1 gleichzeitig auch ein Homomorphismus der Algebra R in den Körper der komplexen Zahlen. Um diesen zu bekommen, braucht man nur den sämtlichen Elementen x einer Klasse $\tilde{x} \in R_1$ ein und dieselbe Zahl, das Bild der Klasse $\tilde{x}$ zuzuordnen. Dieser Homomorphismus legt ein bestimmtes maximales Ideal M_0 der Algebra R fest. Dieses Ideal M_0 ordnen wir dem Ideal $M^\wedge$ zu.

Das Ideal M_0 ist symmetrisch. Um dies zu zeigen, nehmen wir ein beliebiges Element $x \in M_0$, d. h. ein Element, das bei dem betrachteten Homomorphismus der Algebra R in die Null übergeht. Dann geht aber das entsprechende Element $\tilde{x}$ der Algebra $R_1 \subset R^\wedge$ ebenfalls in die Null über. Mit anderen Worten, es gilt

$$\tilde{x}(M^\wedge) = 0.$$

Auf Grund von Theorem 1 besteht die Involutionsoperation in $R^\wedge$ darin, daß man von der Funktion $\tilde{x}(M^\wedge)$ zur konjugiert komplexen Funktion $\overline{\tilde{x}(M^\wedge)}$ übergeht, d. h., es ist $x^*(M^\wedge) = \overline{\tilde{x}(M^\wedge)}$. Demzufolge ist auch $\tilde{x}^*(M^\wedge) = 0$, d. h., auch $\tilde{x}^*$ geht in die Null über. Schließlich geht dann auch x^* in die Null über, d. h., es ist $x^* \in M_0$. Da $x^* \in M_0$ beliebig gewählt war, folgt $M_0^* = M_0$.

Nun sei umgekehrt M_0 ein symmetrisches maximales Ideal der Algebra R. Wir betrachten das Funktional

$$f(x) = x(M_0).$$

Offenbar ist $f(x)$ ein positives Funktional, denn es gilt

$$f(x^* x) = x^*(M_0)\, x(M_0) = |x(M_0)|^2 \geqq 0.$$

Außerdem ist

$$f(e) = e(M_0) = 1.$$

Dieses Funktional kann als ein über ganz $R^\wedge$ definiertes positives Funktional betrachtet werden (vgl. § 18, Nr. 1 und 2). Das Funktional $f(x)$ definiert einen Homomorphismus der Algebra R und damit auch der Algebra R_1 in den Körper der komplexen Zahlen. Da $f(x)$ in R_1 stetig ist und R_1 in $R^\wedge$ dicht liegt, definiert $f(x)$ auch einen Homomorphismus von $R^\wedge$ in den Körper der komplexen Zahlen. Dieser Homomorphismus legt ein maximales Ideal der Algebra $R^\wedge$ fest.

Hieraus folgt, daß die oben konstruierte Abbildung $M^\wedge \to M_0$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Raumes $\mathfrak{M}^\wedge$ auf den Raum $\mathfrak{M}_0$ ist. Wie sich aus der Definition der Topologien in $\mathfrak{M}^\wedge$ und $\mathfrak{M}_0$ ergibt, ist das Urbild einer jeden Umgebung in $\mathfrak{M}_0$ eine Umgebung in $\mathfrak{M}^\wedge$. Folglich ist die Abbildung stetig. Wegen der Bikompaktheit der beiden Räume ist sie eine Homöomorphie. Damit ist Theorem 2 bewiesen.

Theorem 3. *Jedes positive Funktional über einer* BANACH*schen kommutativen symmetrischen Algebra R mit Einselement läßt sich in eindeutiger Weise in der Gestalt*

$$f(x) = \int_{\mathfrak{M}_0} x(M)\, d\mu(M) \tag{1}$$

darstellen, wobei μ ein bestimmtes Maß im Raum $\mathfrak{M}_0$ aller symmetrischen maximalen Ideale der Algebra R ist.

Beweis. Jedes positive Funktional über der Algebra R kann zu einem positiven Funktional über der Algebra $R^\wedge$ fortgesetzt werden. Nun ist $R^\wedge$ nach Theorem 2 einer Algebra $C(\mathfrak{M}_0)$ vollisomorph, und daher kann $f(x)$ als positives Funktional, d. h. als Integral über $C(\mathfrak{M}_0)$ aufgefaßt werden (vgl. den Beweis von Theorem 1). Hieraus folgen unmittelbar die Gültigkeit der Formel (1) und die Eindeutigkeit des Maßes bei gegebenem $f(x)$.

Bemerkung. Aus Theorem 3 folgt, daß *ein positives Funktional über der Algebra R genau dann unzerlegbar ist, wenn für ein gewisses $M \in \mathfrak{M}_0$ die Beziehung $f(x) = x(M)$ gilt.* Folglich bedeutet dieser Satz, daß jedes positive Funktional über einer BANACHschen kommutativen Algebra mit Einselement auf eindeutige Weise in unzerlegbare positive Funktionale zerlegt werden kann. Wie aus den folgenden Sätzen hervorgehen wird, ist die Voraussetzung der Kommutativität an dieser Stelle von grundsätzlicher Bedeutung.

Theorem 4. *Wenn sich jedes positive Funktional über einer* BANACH*schen symmetrischen Algebra R mit Einselement auf eindeutige Weise in unzerlegbare positive Funktionale zerlegen läßt, so ist die zugehörige reduzierte Algebra R_1 kommutativ.*

Beweis. Wir wollen zeigen, daß jede irreduzible Darstellung der Algebra R eindimensional ist, und nehmen hierzu das Gegenteil an: Es sei $x \to A_x$ eine irreduzible Darstellung von R im Raum $\mathfrak{H}$, und $\mathfrak{H}$ sei nicht eindimensional. Dann gibt es in $\mathfrak{H}$ wenigstens zwei linear unabhängige Vektoren ξ_1 und ξ_2. Wir setzen

$$f_1(x) = \langle A_x \xi_1, \xi_1 \rangle, \quad f_2(x) = \langle A_2 \xi_2, \xi_2 \rangle;$$

$$f_1'(x) = \frac{1}{2} \langle A_x(\xi_1 + \xi_2), \xi_1 + \xi_2 \rangle, \quad f_2'(x) = \frac{1}{2} \langle A_x(\xi_1 - \xi_2), \xi_1 - \xi_2 \rangle.$$

Dann ist
$$f_1(x) + f_2(x) = f_1'(x) + f_2'(x).$$
Offenbar ist das durch
$$f(x) = f_1(x) + f_2(x) = f_1'(x) + f_2'(x) \qquad (2)$$
definierte Funktional $f(x)$ positiv. Nach Theorem 2 aus § 19, Nr. 3, sind die Funktionale $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_1'(x)$, $f_2'(x)$ unzerlegbar. Da außerdem unter den Vektoren $\xi_1, \xi_2, \xi_1 + \xi_2, \xi_1 - \xi_2$ keine proportionalen vorkommen, sind diese vier Funktionale gewiß verschieden (vgl. § 17, Nr. 7, Theorem 4). Daher stehen in (2) zwei verschiedene Zerlegungen des Funktionals $f(x)$ in unzerlegbare Funktionale. Dies widerspricht aber der Voraussetzung.

Somit ist jede irreduzible Darstellung der Algebra R eindimensional und folglich kommutativ. Daher ist jedes unzerlegbare positive Funktional für alle Elemente der Gestalt $xy - yx$ gleich Null. Nach Voraussetzung läßt sich nun aber jedes Funktional in unzerlegbare positive Funktionale zerlegen. Daher ist überhaupt jedes positive Funktional für alle Elemente $xy - yx$ gleich Null. Dies bedeutet, daß jedes solche Element ein verallgemeinertes Nullelement ist (vgl. § 18, Nr. 2, Satz II). Folglich gilt in der reduzierten Algebra R_1 stets $\tilde{x}\tilde{y} - \tilde{y}\tilde{x} = 0$, d. h., die reduzierte Algebra R_1 ist kommutativ.

Andere hinreichende Bedingungen für die Kommutativität einer Algebra findet man bei TURUMARU [1] und FUKAMIYA, MISONOU und TAKEDA [1].

3. Beispiele. 1. Es sei A die Algebra aller Funktionen
$$x(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n,$$
die im Innern des Einheitskreises analytisch und auf dem abgeschlossenen Einheitskreis stetig sind (vgl. Beispiel 2 in § 11, Nr. 3). Wir definieren in A durch die Formel
$$x^*(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \bar{c}_n z^n$$
eine Involution. Gesucht sind die symmetrischen maximalen Ideale der Algebra A.

Jedes maximale Ideal M der Algebra A wird durch einen Punkt z_0 des Kreises $|z| \leq 1$ so gegeben, daß
$$M(x) = x(z_0)$$
ist. Diese Zuordnung $M \to z$ zwischen $\mathfrak{M}$ einerseits und den Punkten des Kreises $|z| \leq 1$ andererseits ist umkehrbar eindeutig (vgl. § 11, Nr. 3, Beispiel 2).

Nun sei M ein symmetrisches maximales Ideal. Da $x_1 = z$ ein hermitesches Element ist, muß die Zahl $z_0 = M(x_1)$ reell sein. Auf diese Weise entspricht jedem symmetrischen maximalen Ideal der Algebra R eine reelle Zahl t aus dem Intervall $[-1, 1]$. Umgekehrt entspricht jeder reellen Zahl t aus $[-1, 1]$ dasjenige symmetrische maximale Ideal, das aus allen Funktionen $x(z) \in A$ besteht, für die $x(t) = 0$ ist.

Nach Theorem 2 stimmt die vollreguläre vollständige Hülle $A^\wedge$ von A mit der Algebra aller im Intervall $[-1, 1]$ stetigen Funktionen $x(t)$ überein, deren Norm durch
$$|x| = \max_{-1 \leq t \leq 1} |x(t)|$$
erklärt ist. Ist $x(z)$ ein Polynom und $y(t)$ das entsprechende Element der Algebra $A^\wedge$, so gilt $x(t) = y(t)$ für alle $t \in [-1, 1]$. Auf Grund des WEIERSTRASSschen Approximationssatzes (vgl. § 2, Nr. 10) folgt hieraus, daß $x(t) = y(t)$ für jede Funktion $x(z) \in A$ ist.

Man erhält also die Algebra $A^\wedge$ dadurch, daß man die Funktionen $x(z)$ nur auf dem Intervall $[-1, 1]$ betrachtet und die so erhaltene Algebra bezüglich der Norm $|x| = \max\limits_{-1 \leqq t \leqq 1} |x(t)|$ vervollständigt.

Durch Anwendung von Theorem 3 auf die Algebra A ergibt sich, daß jedes positive Funktional über A die Gestalt

$$f(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, d\sigma(t) \tag{1}$$

hat, wobei $\sigma(t)$ eine monotone nichtfallende Funktion in $[-1, 1]$ ist.

Es sei darauf hingewiesen, daß nicht jedes reelle lineare Funktional über A als Linearkombination positiver Funktionale dargestellt werden kann. Um dies einzusehen, betrachten wir etwa das Funktional

$$f_0(x) = \frac{1}{2}[x(z_0) + x(\bar{z}_0)];$$

z_0 bezeichne irgendeine imaginäre Zahl aus dem Einheitskreis $|z| \leqq 1$. Offenbar ist $f_0(x)$ ein reelles Funktional über der Algebra A. Behauptet wird, $f_0(x)$ läßt sich nicht als Linearkombination positiver Funktionale darstellen. Wir nehmen das Gegenteil an. Durch Anwendung der allgemeinen Formel (1) auf $f_0(x)$ ergibt sich dann

$$f_0(x) = \int_{-1}^{1} x(t)\, d\sigma_1(t),$$

wobei $\sigma_1(t)$ eine Funktion mit beschränkter Schwankung im Intervall $[-1, 1]$ ist. Für jede Funktion $x(z) \in A$ wäre also

$$\frac{x(z_0) + x(\bar{z}_0)}{2} = \int_{-1}^{1} x(t)\, d\sigma_1(t).$$

Wir schreiben diese Gleichung für $x_n(z) = \dfrac{e^{inz}}{n}$ auf:

$$\frac{e^{inz_0} + e^{in\bar{z}_0}}{2n} = \frac{1}{n}\int_{-1}^{1} e^{int}\, d\sigma_1(t).$$

Für $n \to \infty$ strebt der absolute Betrag der linken Seite dieser Gleichung gegen ∞, während der absolute Betrag der rechten Seite gegen Null geht. Dieser Widerspruch zeigt, daß sich das Funktional $f_0(z)$ tatsächlich nicht als Linearkombination positiver Funktionale darstellen läßt.

2. Wir bezeichnen mit R_0' die Gesamtheit aller über der Halbgeraden $0 \leqq u < +\infty$ meßbaren Funktionen $x(u)$, für die

$$|x| = \int_0^{\infty} |x(u)| \sinh 2u\, du < \infty \tag{2}$$

ist. In R_0' definieren wir die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl in der üblichen Weise. Außerdem definieren wir durch die Gleichung

$$x(u) = \int_0^{\infty} \int_{|u-t|}^{u+t} x_1(s)\, x_2(t)\, ds\, dt$$

eine Multiplikation $x = x_1 \cdot x_2$. Diese Definition ist sinnvoll, denn es gilt

$$\begin{aligned}\int_0^\infty |x(u)| \sinh 2u\, du &\leq \int_0^\infty \left| \int_0^\infty dt \int_{|u-t|}^{u+t} x_1(s)\, x_2(t)\, ds \right| \sinh 2u\, du \\ &\leq \int_0^\infty \sinh 2u\, du \int_0^\infty dt \int_{|u-t|}^{u+t} |x_1(s)|\, |x_2(t)|\, ds \\ &= \int_0^\infty dt \int_0^\infty |x_1(s)|\, |x_2(t)|\, ds \int_{|t-s|}^{t+s} \sinh 2u\, du \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty |x_1(s)|\, |x_2(t)| \sinh 2s \sinh 2t\, ds\, dt = |x_1|\, |x_2|,\end{aligned}$$

d. h., mit $x_1 \in R_0'$, $x_2 \in R_0'$ ist auch $x = x_1 \cdot x_2 \in R_0'$. Gleichzeitig sehen wir, daß die Bedingung $|x_1 \cdot x_2| \leqq |x_1|\, |x_2|$ erfüllt ist. Wie man leicht sieht, sind auch alle anderen Axiome der Algebra erfüllt, außerdem gilt $x_1 \cdot x_2 = x_2 \cdot x_1$. Folglich ist R_0' eine kommutative normierte Algebra, die offenbar vollständig ist.

Wird zu R_0' das Einselement e adjungiert, so ergibt sich eine vollständige normierte Algebra mit der Norm

$$|x + \lambda e| = |x| + |\lambda|,$$

wobei $|x|$ durch (2) definiert ist. Wir bezeichnen sie mit R_0. Wird noch $x^*(u) = \overline{x(u)}$, $(\lambda e + x)^* = \bar{\lambda} e + x^*$ gesetzt, so wird R_0 eine symmetrische Algebra.

Wir suchen nun alle maximalen Ideale der Algebra R_0. Offenbar ist R_0' ein maximales Ideal. Es sei M ein maximales Ideal in R_0, das von R_0' verschieden ist. Dann ist

$$f(x) = x(M)$$

ein lineares Funktional über R_0, das als lineares Funktional über dem Raum aller summierbaren Funktionen $x(u) \sinh 2u$ betrachtet werden kann. Daher gilt

$$x(M) = f(x) = \int_0^\infty x(u)\, \omega(u)\, du,$$

wobei $\dfrac{\omega(u)}{\sinh 2u}$ eine wesentlich beschränkte Funktion und $\omega \not\equiv 0$ ist (vgl. § 6, Nr. 13, Theorem 2). Da die Abbildung $x \to x(M)$ ein Homomorphismus ist, muß $f(x_1 \cdot x_2) = f(x_1)\, f(x_2)$ sein, d. h.

$$\begin{aligned}\int_0^\infty x_1(s)\, \omega(s)\, ds \int_0^\infty x_2(t)\, \omega(t)\, dt &= \int_0^\infty \left[\int_0^\infty dt \int_{|u-t|}^{u+t} x_1(s)\, x_2(s)\, ds \right] \omega(u)\, du \\ &= \int_0^\infty \int_0^\infty x_1(s)\, x_2(t)\, ds\, dt \int_{|t-s|}^{t+s} \omega(u)\, du.\end{aligned}$$

Hieraus schließen wir, daß die Funktion $\omega(u)$ der Funktionalgleichung

$$\omega(s)\, \omega(t) = \int_{|t-s|}^{t+s} \omega(u)\, du \tag{3}$$

für fast alle positiven s und t genügt.

Die allgemeine Lösung dieser Gleichung hat die Form $\omega(u) = \dfrac{2 \sin \varrho u}{\varrho}$, wobei ϱ eine beliebige komplexe Zahl ist. Um dies einzusehen, beachten wir zunächst einmal, daß $\omega(s)$ wegen (3) einer stetigen Funktion äquivalent ist. Daher darf $\omega(s)$ selbst als stetig angenommen werden. Für $s = t = 0$ ergibt sich aus (3) sofort $\omega(0) = 0$. Differenzieren wir

beide Seiten von (3) nach s für $s \leqq t$, so erhalten wir

$$\omega'(s)\,\omega(t) = \omega(t+s) + \omega(t-s). \tag{4}$$

Für $s = 0$ folgt hieraus $\omega'(0)\,\omega(t) = 2\,\omega(t)$, $\omega'(0) = 2$. Wir differenzieren nun (4) zweimal nach s und zweimal nach t, subtrahieren die entstandenen Gleichungen gliedweise voneinander und setzen danach $s = 0$. Dies führt zur Gleichung $\omega''(t) - \varrho^2\omega(t) = 0$, wobei $\varrho^2 = \frac{\omega'''(0)}{\omega'(0)} = \frac{\omega'''(0)}{2}$ eine komplexe Zahl ist. Die allgemeine Lösung dieser Gleichung bei den Nebenbedingungen $\omega(0) = 0$, $\omega'(0) = 2$ ist aber $\omega(t) = \frac{2\sin\varrho t}{\varrho}$.

Die Funktion $\frac{\omega(u)}{\sinh 2u} = \frac{2\sin\varrho u}{\varrho\sinh 2u}$ ist offenbar genau dann für $-\infty < u < \infty$ beschränkt, wenn $|\mathrm{Im}\,\varrho| \leqq 2$ ist. Demzufolge werden die von R_0' verschiedenen maximalen Ideale der Algebra R_0 durch die Zahlen ϱ des Streifens $|\mathrm{Im}\,\varrho| \leqq 2$ festgelegt, während die zugehörigen Homomorphismen durch

$$x \to \int_0^\infty x(u)\,\frac{2\sin\varrho u}{\varrho}\,du$$

gegeben werden. Offenbar bestimmen ϱ_1 und ϱ_2 genau dann ein und dasselbe maximale Ideal, wenn entweder $\varrho_1 = \varrho_2$ oder $\varrho_1 = -\varrho_2$ ist.

Um die symmetrischen maximalen Ideale von R_0 herauszufinden, berücksichtigen wir, daß stets $x(M^*) = \overline{x^*(M)}$ ist. Aus der Gleichung

$$x(M) = \int_0^\infty x(u)\,\frac{2\sin\varrho u}{\varrho}\,du$$

folgt daher

$$x(M^*) = \overline{x^*(M)} = \overline{\int_0^\infty x^*(u)\,\frac{2\sin\varrho u}{\varrho}\,du} = \int_0^\infty x(u)\,\frac{2\sin\bar\varrho u}{\bar\varrho}\,du.$$

Wird also das Ideal M durch die Zahl ϱ bestimmt, so wird das Ideal M^* durch $\bar\varrho$ bestimmt. Daher gilt $M = M^*$ genau dann, wenn entweder $\varrho = \bar\varrho$ oder $\varrho = -\bar\varrho$ ist, d. h., wenn ϱ entweder eine reelle oder eine rein imaginäre Zahl ist.

Folglich werden die symmetrischen maximalen Ideale der Algebra R_0 umkehrbar eindeutig durch die sämtlichen Zahlen der reellen Halbachse $0 \leqq \varrho < \infty$ und der Strecke $\varrho = \varrho_1 i$, $0 < \varrho_1 \leqq 2$, auf der imaginären Halbachse bestimmt. Die entsprechenden Homomorphismen sind

$$x \to \int_0^\infty x(u)\,\frac{2\sin\varrho u}{\varrho}\,du \quad \text{für reelles } \varrho,$$

$$x \to \int_0^\infty x(u)\,\frac{2\sinh\varrho_1 u}{\varrho_1}\,du \quad \text{für} \quad \varrho = \varrho_1 i.$$

Durch Anwendung von Theorem 3 auf die Algebra R_0 ergibt sich, daß jedes positive Funktional über R_0 die Gestalt

$$f(x) = \int_0^\infty \left[\int_0^\infty x(u)\,\frac{2\sin\varrho u}{\varrho}\,du\right] d\sigma(\varrho) + \int_0^2 \left[\int_0^\infty x(u)\,\frac{2\sinh\varrho_1 u}{\varrho_1}\,du\right] d\sigma_1(\varrho_1)$$

hat, wobei $\sigma(\varrho)$ und $\sigma_1(\varrho_1)$ monotone nichtfallende Funktionen in $0 \leqq \varrho < \infty$ bzw. $0 < \varrho_1 \leqq 2$ sind.

4. Vollsymmetrische Algebren. Ist R eine vollsymmetrische Algebra, so sind ihre sämtlichen maximalen Ideale symmetrisch, so daß $\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M}$ ist. Daher gilt die

Folgerung 1. *Jedes positive Funktional $f(x)$ über einer kommutativen vollsymmetrischen Algebra R mit Einselement läßt sich auf eindeutige Weise in der Gestalt*

$$f(x) = \int_{\mathfrak{M}} x(M)\, d\mu(M)$$

darstellen, wobei $\mathfrak{M}$ der Raum der maximalen Ideale von R ist und μ ein bestimmtes Maß auf $\mathfrak{M}$ bezeichnet.

In den Anwendungen hat man häufig positive Funktionale über einer Algebra ohne Einselement zu betrachten. Wir erinnern daran, daß eine Algebra R ohne Einselement *vollsymmetrisch* genannt wird, wenn die aus R durch Adjunktion des Einselements entstehende Algebra R_1 vollsymmetrisch ist (vgl. § 14, Nr. 3).

Es sei $\mathfrak{M}_1$ der Raum der maximalen Ideale von R_1. Ist über R durch die Formel

$$f(x) = \int_{\mathfrak{M}_1} x(M)\, d\mu(M) \quad \text{für alle} \quad x \in R \tag{1}$$

ein positives Funktional $f(x)$ gegeben, so braucht nur

$$F(x) = \int_{\mathfrak{M}_1} x(M)\, d\mu(M) \quad \text{für alle} \quad x \in R_1 \tag{2}$$

gesetzt zu werden, um $f(x)$ zu einem positiven Funktional $F(x)$ über ganz R_1 fortzusetzen. Ist umgekehrt eine solche Fortsetzung möglich, so gilt auf Grund der Folgerung 1 für das Funktional $F(x)$ die Formel (2), so daß für $f(x)$ die Formel (1) gilt.

Hieraus und aus Satz IV von § 10, Nr. 2, schließen wir auf die

Folgerung 2. *Ein reelles positives Funktional $f(x)$ über einer kommutativen vollsymmetrischen Algebra R ohne Einselement läßt sich genau dann mit Hilfe der Formel* (1) *darstellen, wenn es sich zu einem positiven Funktional über der Algebra R_1, die aus R durch Adjunktion des Einselements entsteht, fortsetzen läßt, d. h., wenn $f(x)$ der Bedingung*

$$|f(x)|^2 \leqq C f(x^* x) \quad \textit{für alle} \quad x \in R \tag{3}$$

genügt, wobei C eine Konstante ist.

Wegen (1) kann ein derartiges Funktional $f(x)$ auf eindeutige Weise zu einem positiven Funktional über der ganzen Algebra $C(\mathfrak{M}_1)$ fortgesetzt werden.

Wir haben bis jetzt solche positiven Funktionale betrachtet, die über der ganzen Algebra R definiert sind. In gewissen Fällen liegt jedoch das Problem vor, für ein positives Funktional, das nicht auf der ganzen Algebra definiert ist und eventuell auch nicht zu einem über der ganzen Algebra definierten positiven Funktional fortgesetzt werden kann, eine Zerlegung anzugeben

(vgl. § 31, Nr. 4). Bevor wir derartige Funktionale untersuchen, betrachten wir zweckmäßigerweise zunächst einige Eigenschaften der Integrale, die über einem lokal bikompakten Raum definiert sind.

Es sei T ein lokal bikompakter HAUSDORFFscher Raum, $I(x)$ ein Integral über $L(T)$ (vgl. § 6, Nr. 1) und U eine beliebige offene Teilmenge von T. Dann ist U, betrachtet als Teilraum von T, ebenfalls ein lokal bikompakter Raum, und jede Funktion $x(t) \in L(U)$ kann zu einer Funktion $x(t) \in L(T)$ fortgesetzt werden, indem einfach $x(t) = 0$ außerhalb von U gesetzt wird. Folglich kann $L(U)$ als Teilraum von $L(T)$ aufgefaßt werden. Das über $L(T)$ definierte Integral $I(x)$ ist, wenn es nur über $L(U)$ betrachtet wird, auch ein Integral über $L(U)$. Wir nennen es die *Einschränkung* des Integrals $I(x)$ auf die Menge U.

I. *Es sei $\{U_\alpha\}$ eine aus offenen Mengen U_α bestehende Überdeckung des Raumes T. Auf jedem $L(U_\alpha)$ sei ein Integral $I_\alpha(x)$ gegeben derart, daß für beliebige α_1, α_2 die Einschränkungen der Integrale $I_{\alpha_1}, I_{\alpha_2}$ auf $U_{\alpha_1} \cap U_{\alpha_2}$ miteinander übereinstimmen. Dann gibt es ein und nur ein Integral über $L(T)$, dessen Einschränkung auf jedes U_α mit I_α übereinstimmt.*

Beweis. Es sei $x(t) \in L(T)$ und Q_x der Träger[1]) von $x(t)$. Q_x ist bikompakt. Diejenigen Mengen U_α, welche Q_x schneiden, bilden eine Überdeckung der bikompakten Menge Q_x. Folglich gibt es endlich viele solcher Mengen, etwa $U_{\alpha_1}, \ldots, U_{\alpha_n}$, die ebenfalls eine Überdeckung von Q_x bilden. Die nur über Q_x betrachteten Funktionen aus $L(T)$ bilden eine normale Algebra (auf Grund des URYSOHNschen Lemmas; vgl. § 2, Nr. 8, Satz II, und § 15, Nr. 1). Folglich gibt es Funktionen $y_k \in L(U_{\alpha_k})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ derart, daß

$$y_1(t) + \cdots + y_n(t) = 1$$

auf Q_x ist (vgl. § 15, Nr. 2). Hieraus folgt $x = xy_1 + \cdots + xy_n$, wobei $xy_k \in L(U_{\alpha_k})$ ist. Daher muß

$$I(x) = I_{\alpha_1}(xy_1) + \cdots + I_{\alpha_n}(xy_n) \tag{4}$$

sein, wenn es überhaupt ein Integral $I(x)$ mit der oben erwähnten Eigenschaft gibt.

Wir zeigen jetzt, daß durch (4) ein Integral über $L(T)$ definiert wird. Hierzu genügt es zu zeigen: Sind $z_k(t) \in L(U_{\alpha'_k})$ $(k = 1, \ldots, m)$ irgendwelche Funktionen, die der Bedingung $z_1(t) + \cdots + z_m(t) = 1$ auf Q_x genügen, so gilt

$$I_{\alpha_1}(xy_1) + \cdots + I_{\alpha_n}(xy_n) = I_{\alpha'_1}(xz_1) + \cdots + I_{\alpha'_m}(xz_m).$$

Da $xy_k z_l \in U_{\alpha_k} \cap U_{\alpha'_l}$ ist, gilt nach Voraussetzung $I_{\alpha_k}(xy_k z_l) = I_{\alpha'_l}(xy_k z_l)$, so daß

$$\sum_{k=1}^{n} I_{\alpha_k}(xy_k) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} I_{\alpha_k}(xy_k z_l) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{m} I_{\alpha'_l}(xy_k z_l) = \sum_{l=1}^{m} I_{\alpha'_l}(xz_l)$$

ist, womit unser Satz bewiesen ist.

---

[1]) Dies ist die kleinste abgeschlossene Menge mit der Eigenschaft, daß außerhalb von ihr $x(t) = 0$ ist (vgl. § 6, Nr. 2).

II. *Es mögen T und $\{U_\alpha\}$ dieselbe Bedeutung haben wie in Satz* I. *Sind I und J zwei Integrale über $L(T)$, deren Einschränkungen auf jedes U_α miteinander übereinstimmen, so stimmen I und J auch auf ganz $L(T)$ miteinander überein.*

Dies folgt unmittelbar aus Satz I.

Wir betrachten nun alle möglichen offenen Mengen U (wenn solche existieren), über denen die Einschränkung des gegebenen Integrals $I(x)$ gleich Null ist. Es bezeichne V die Vereinigung aller dieser U. Da die U eine Überdeckung des Raumes V bilden, ist nach Satz II die Einschränkung von $I(x)$ auf V ebenfalls gleich Null. Offenbar ist V die größte offene Menge, auf der die Einschränkung von $I(x)$ gleich Null ist. Dies bedeutet, daß V die größte offene I-Nullmenge ist (vgl. § 6, Nr. 5 und 8). Das Komplement $T - V$ dieser Menge heißt *Träger* des Integrals $I(x)$ bzw. des durch $I(x)$ festgelegten Maßes μ.

Nun sei R eine vollsymmetrische kommutative Algebra ohne Einselement und $f(x)$ ein positives Funktional, das über einem symmetrischen, in R dichten Ideal I definiert ist. Dann ist $px \in I$ für alle $p \in I$, $x \in R$, und daher wird für jedes $p \in I$ durch die Gleichung

$$\varphi_p(x) = f(px)$$

ein lineares Funktional $\varphi_p(x)$ über der ganzen Algebra R definiert. Ein Element $p \in I$ heiße *positiv bezüglich des Funktionals f*, wenn $\varphi_p(x)$ ein positives Funktional über R ist, das der Bedingung (3) genügt.

Es bezeichne P die Gesamtheit aller Elemente $p \in I$, die bezüglich f positiv sind. Solche Elemente gibt es bestimmt, z. B. gehören alle Elemente der Gestalt

$$p = y_1^* y_1 + y_2^* y_2 + \cdots + y_n^* y_n \quad (y_k \in I) \tag{5}$$

zu P; für $x \in R$ gilt nämlich

$$\begin{aligned}\varphi_p(x^* x) &= f(px^* x) = f((y_1^* y_1 + \cdots + y_n^* y_n) x^* x) \\ &= f((y_1 x)^* (y_1 x)) + \cdots + f((y_n x)^* (y_n x)) \geqq 0,\end{aligned}$$

so daß $\varphi_p(x)$ positiv über R ist; daß $\varphi_p(x)$ auch der Bedingung (3) genügt, folgt aus

$$\begin{aligned}|\varphi_p(x)|^2 &= \left|\sum_{k=1}^{n} f(y_k^* y_k x)\right|^2 \leqq n^2 \sum_{k=1}^{n} |f(y_k^*(y_k x))|^2 \\ &\leqq n^2 \sum_{k=1}^{n} f(y_k^* y_k) f((y_k x)^* (y_k x)) \\ &\leqq n^2 \max_{1 \leqq k \leqq n} f(y_k^* y_k) f(p x^* x) \\ &= n^2 \max_{1 \leqq k \leqq n} f(y_k^* y_k)\, \varphi_p(x^* x).\end{aligned}$$

Es bezeichne P' die Gesamtheit aller Elemente p der Gestalt (5). Wie oben gezeigt wurde, gilt $P' \subset P$.

Auf Grund der Bemerkung, die nach der Folgerung 2 ausgesprochen wurde, kann das Funktional $\varphi_p(x)$, wenn $p \in P$ ist, auf eindeutige Weise zu einem

positiven Funktional $\tilde{\varphi}_p(x)$ über der ganzen Algebra $C(\mathfrak{M}_1)$ fortgesetzt werden; dabei bezeichnet $\mathfrak{M}_1$ wie üblich den Raum der maximalen Ideale der Algebra R_1.

Nach der Definition des Integrals (vgl. § 6, Nr. 1) ist $\tilde{\varphi}_p(x)$ ein Integral über $C(\mathfrak{M}_1)$. Daher kann die Definition von $\tilde{\varphi}_p(x)$ in eindeutiger Weise auf alle Funktionen $x(M) \in L^1(\tilde{\varphi}_p)$ ausgedehnt werden. Wir wollen das so entstehende Integral ebenfalls mit $\tilde{\varphi}_p(x)$ bezeichnen.

Wir setzen nun $M_0 = R$ und $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M}_1 - M_0$. Dann ist $\mathfrak{M}'$ ein lokal bikompakter Raum. Jedes Element $x \in R$ kann als stetige Funktion $x(M)$ über $\mathfrak{M}'$ betrachtet werden, die im unendlich fernen Punkt M_0 verschwindet. Mit $L(\mathfrak{M}')$ bezeichnen wir die so definierte Gesamtheit aller auf $\mathfrak{M}'$ definierten stetigen Funktionen $x(M)$ mit bikompaktem Träger Q_x. Offenbar ist $\tilde{\varphi}_p(x)$ insbesondere für alle Funktionen $x(M) \in L(\mathfrak{M}')$ definiert. Klar ist auch, daß $\tilde{\varphi}_p(x)$ ein Integral über $L(\mathfrak{M}')$ ist.

III. *Zu jeder Funktion $x(M) \in L(\mathfrak{M}')$ gibt es Elemente $p \in P'$ mit der Eigenschaft, daß $p(M) > 0$ auf Q_x ist.*

Beweis. Da das Ideal I nach Voraussetzung in R dicht ist, gibt es zu jedem $M \in \mathfrak{M}'$, insbesondere zu jedem $M \in Q_x$ ein Element $y \in I$ derart, daß $y(M) \neq 0$ ist. Auf Grund der Stetigkeit ist diese Bedingung auch noch in einer Umgebung $U(M)$ des Ideals M erfüllt. Wegen der Bikompaktheit von Q_x kann man aus diesen Umgebungen endlich viele $U(M_1), \ldots, U(M_n)$ wählen, die eine Überdeckung von Q_x bilden. Sind nun $y_1, \ldots, y_n$ die entsprechenden Elemente $y \in I$, so hat das Element $p = y_1^* y_1 + \cdots + y_n^* y_n$ die geforderten Eigenschaften.

Wir bezeichnen jetzt mit P_x die Gesamtheit aller Elemente $p \in P$, für die $p(M) \neq 0$ auf Q_x ist, und mit P_x^+ die Gesamtheit aller Elemente $p \in P$, für die $p(M) > 0$ auf Q_x ist. Offenbar gilt $P_x^+ \subset P_x$. Nach Satz III ist P_x^+ und damit erst recht P_x nicht leer.

Mit $x \in L(\mathfrak{M}')$ und $p \in P_x$ ist auch $\frac{x}{p} \in L(\mathfrak{M}')$; dabei bezeichnet $\frac{x}{p}$ diejenige Funktion, welche für $M \in Q_x$ gleich $\frac{x(M)}{p(M)}$ und für $M \notin Q_x$ gleich Null ist. Daher hat $\tilde{\varphi}_p\left(\frac{x}{p}\right)$ einen Sinn.

Wir setzen

$$J(x) = \tilde{\varphi}_p\left(\frac{x}{p}\right) \quad \text{für} \quad x \in L(\mathfrak{M}'), \quad p \in P_x. \tag{6}$$

Diese Definition hängt nicht von der Wahl des Elements $p \in P_x$ ab. Sind p und q aus P_x, so gilt für alle $z \in R$

$$\varphi_q(pz) = \varphi_p(qz) = f(pqz).$$

Hieraus folgt aber

$$\tilde{\varphi}_q(pz) = \tilde{\varphi}_p(qz) \quad \text{für alle} \quad z \in C(\mathfrak{M}_1). \tag{7}$$

In der Tat, $\tilde{\varphi}_q$ und $\tilde{\varphi}_p$ sind Integrale über $C(\mathfrak{M}_1)$ und daher bezüglich der Norm von $C(\mathfrak{M}_1)$ stetig. Andererseits gilt (7) für alle Funktionen $z(M)$ der Algebra R; diese bilden aber eine dichte Menge in der Algebra $C_0(\mathfrak{M}_1)$ aller

Funktionen aus $C(\mathfrak{M}_1)$, die im Punkt M_0 gleich Null sind (vgl. § 14, Nr. 3, Folgerung 3). Folglich gilt (7) auch für alle $z(M) \in C_0(\mathfrak{M}_1)$. Nun ist aber

$$\tilde{\varphi}_q(p) = \varphi_q(p) = f(pq) = \varphi_p(q) = \tilde{\varphi}_p(q)$$

und daher

$$\tilde{\varphi}_q(p(\lambda e + z)) = \tilde{\varphi}_p(q(\lambda e + z))$$

für alle Zahlen λ und alle $z \in C_0(\mathfrak{M}_1)$. Da die Funktionen $\lambda e + z$ die ganze Algebra $C(\mathfrak{M}_1)$ durchlaufen, ist damit die Richtigkeit der Formel (7) für alle Funktionen aus $C(\mathfrak{M}_1)$ bewiesen.

Wir setzen in (7) jetzt $z = \frac{x}{pq}$ $\left(\text{dies ist möglich, weil } \frac{x}{pq} \in L(\mathfrak{M}') \subset C(\mathfrak{M}') \text{ ist}\right)$ und erhalten

$$\tilde{\varphi}_q\left(\frac{x}{q}\right) = \tilde{\varphi}_p\left(\frac{x}{p}\right).$$

IV. *$J(x)$ ist ein Integral über $L(\mathfrak{M}')$.*

Beweis. Aus $x \in L(\mathfrak{M}')$ und $x(M) \geqq 0$ folgt $\frac{x(M)}{p(M)} \geqq 0$, wenn p aus P_x^+ genommen wird. Folglich ist $J(x) = \tilde{\varphi}_p\left(\frac{x}{p}\right) \geqq 0$. Dies bedeutet aber, daß $J(x)$ ein Integral über $L(\mathfrak{M}')$ ist.

Aus Satz IV ergibt sich die Existenz eines Maßes μ auf $\mathfrak{M}'$ mit der Eigenschaft

$$J(x) = \int_{\mathfrak{M}'} x(M)\, d\mu \quad \text{für alle} \quad x \in L(\mathfrak{M}') \tag{8}$$

vgl. § 6, Nr. 10, Satz X).

Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{M}_f$ die Gesamtheit aller Punkte $M \subset \mathfrak{M}'$, für die folgendes gilt: In jeder Umgebung von M ist die Einschränkung wenigstens eines der Funktionale $\tilde{\varphi}_p(x)$, $p \in P$, nicht gleich Null. Offenbar ist $\mathfrak{M}_f$ eine abgeschlossene Teilmenge von $\mathfrak{M}'$. Klar ist auch, daß $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}_f$ die größte offene Menge ist, auf der die Einschränkungen aller $\tilde{\varphi}_p$, $p \in P$, gleich Null sind. Ferner gilt $\mathfrak{M}_f \supset \mathfrak{M}_J$, wenn $\mathfrak{M}_J$ der Träger des Integrals J ist.

V. *Für $p \in P$ gilt $p(M) \geqq 0$ auf $\mathfrak{M}_f$.*

Beweis. Angenommen, es sei $p(M_0) < 0$ im Punkt $M_0 \in \mathfrak{M}_f$. In einer gewissen Umgebung $U = U(M_0)$ von M_0 gilt dann $p(M) < \frac{1}{2}\, p(M_0) < 0$. Für $x \in L^+(U)$ ist also $0 \leqq J(x) = \tilde{\varphi}_p\left(\frac{x}{p}\right) \leqq 0$, d. h. $J(x) = 0$ auf $L(U)$. Demzufolge muß $\tilde{\varphi}_p(x) = J(xp) = 0$ für $x \in L(U)$ sein. Dann gilt aber für alle $p \in P$ und $x \in L^+(U)$

$$0 = \tilde{\varphi}_p(qx) = \tilde{\varphi}_q(px) \leqq \frac{1}{2}\, p(M_0)\, \tilde{\varphi}_q(x) \leqq 0,$$

also $\tilde{\varphi}_q(x) = 0$. Dies widerspricht aber der Definition von $\mathfrak{M}_f$.

Wir behaupten jetzt: Es gilt

$$J(py) = \tilde{\varphi}_p(y) \tag{9}$$

für jede Funktion $y(M) \in C(\mathfrak{M}_1)$, d. h., für jede solche Funktion ist

$$\int_{\mathfrak{M}'} p(M)\, y(M)\, d\mu = \int_{\mathfrak{M}'} y(M)\, d\mu_p, \tag{10}$$

wobei μ_p das dem Integral $\tilde{\varphi}_p$ entsprechende Maß ist.

Zum Beweis genügt es, die Beziehung

$$\int_{\mathfrak{M}_f} p(M)\, y(M)\, d\mu = \int_{\mathfrak{M}_f} y(M)\, d\mu_p \tag{11}$$

zu verifizieren, weil nach der Definition von $\mathfrak{M}_f$ die Einschränkungen der beiden Integrale auf $\mathfrak{M}' - \mathfrak{M}_f$ gleich Null sind.

Wir setzen

$$N = \{M : M \in \mathfrak{M}_f,\ p(M) = 0\},$$

$$A_n = \left\{M : M \in \mathfrak{M}_f,\ p(M) \geqq \frac{1}{n}\right\}, \quad B_n = \left\{M : M \in \mathfrak{M}_f,\ p(M) \leqq \frac{1}{n+1}\right\}.$$

Wegen $p(M) \to 0$ für $M \to M_0$ sind sämtliche A_n bikompakt. Um zu zeigen, daß N eine $\tilde{\varphi}_p$-Nullmenge ist, gehen wir davon aus, daß es auf Grund des Urysohnschen Lemmas eine Funktion $z_n(M) \in C(\mathfrak{M}_1)$ mit folgenden Eigenschaften gibt: $z_n(M) = 0$ auf A_n, $z_n(M) = 1$ auf B_n und $0 \leqq z_n(M) \leqq 1$ auf ganz $\mathfrak{M}_1$. Offenbar gilt[1] $z_n \searrow \xi_N$ auf $\mathfrak{M}_f$, so daß $p z_n \searrow 0$ und $q z_n \searrow q\xi_N$ auf $\mathfrak{M}_f$ für jede Funktion $q \in P$. Setzen wir in (7) nun $z = z_n$ und gehen für $n \to \infty$ zur Grenze über, so erhalten wir die Beziehung $\tilde{\varphi}_p(q\xi_N) = 0$ für alle $p \in P$ (vgl. § 6, Nr. 7, Satz VII). Insbesondere ist $\tilde{\varphi}_p(x^* x \xi_N) = 0$ für alle $x \in I$. Setzen wir in diese Gleichung nun $x \pm y$ und $x \pm iy$ anstelle von x und bilden entsprechende Linearkombinationen, so folgt, daß $\tilde{\varphi}_p(y^* x \xi_N) = 0$ ist für alle $x, y \in I$; da I in R dicht ist, gilt dann $\tilde{\varphi}_p(y^* x \xi_N) = 0$ auch für alle $y, x \in R$. Nun liegt aber R seinerseits in $C_0(\mathfrak{M}_1)$ dicht, während $\tilde{\varphi}_p$ bezüglich der Norm $|x| = \sup_{M \in \mathfrak{M}_1} |x(M)|$ stetig ist. Daher gilt $\tilde{\varphi}_p(y^* x \xi_N) = 0$ nunmehr für alle $x, y \in C_0(\mathfrak{M}_1)$. Da die Funktionen $y^* x$ eine in $C_0(\mathfrak{M}_1)$ dichte Menge bilden, ist demnach $\tilde{\varphi}_p(z\xi_N) = 0$ für alle $z \in C_0(\mathfrak{M}_1)$, d. h., N ist eine $\tilde{\varphi}_p$-Nullmenge.

Folglich ist $\int_N x(M)\, d\mu_p = 0$. Außerdem ist offenbar $\int_N p(M)\, x(M)\, d\mu = 0$.

Daher ist die Beziehung (11) bewiesen, wenn wir gezeigt haben, daß $\int_W p(M)\, y(M)\, d\mu = \int_W y(M)\, d\mu_p$ mit $W = \mathfrak{M}_f - N$ ist, d. h.

$$J(p y \xi_W) = \tilde{\varphi}_p(y \xi_W).$$

Offenbar dürfen wir uns auf den Fall einer Funktion $y(M) \geqq 0$ beschränken. Wir setzen $u_n = 1 - z_n$. Dann ist $p y u_n = 0$ auf B_n und $p(M) > \frac{1}{n+1} > 0$ auf $\mathfrak{M}_f - B_n$. Folglich ist die Formel (6) auf die Funktion $x = p y u_n$ anwendbar, und es gilt demnach

$$J(p y u_n) = \tilde{\varphi}_p(y u_n).$$

---

[1]) Es sei daran erinnert, daß ξ_A die charakteristische Funktion der Menge A bezeichnet (vgl. § 6, Nr. 5).

Nun galt aber $pyu_n \nearrow py\xi_W$ und $yu_n \nearrow y\xi_W$ auf $\mathfrak{M}_f$. Daher folgt durch Grenzübergang $J(py\xi_W) = \tilde{\varphi}_p(y\xi_W)$, womit die Formeln (9) und (10) bewiesen sind.

Setzen wir in (10) nun $y(M) \equiv 1$ und berücksichtigen, daß $p(M) = |p(M)|$ auf $\mathfrak{M}_f$ ist, so erhalten wir

$$\int_{\mathfrak{M}'} |p(M)|\, d\mu = \int_{\mathfrak{M}'} p(M)\, d\mu = \tilde{\varphi}_p(1) < \infty,$$

d. h., es ist $p(M) \in L^1(\mu)$.

Es sei H_f der HILBERTsche Raum, der von den Elementen aus I mit dem skalaren Produkt $\langle x, y\rangle = f(y^* x)$ erzeugt wird. Ferner sei H_f' derjenige Teilraum von H_f, der von den Linearkombinationen der Elemente $p \in P$ erzeugt wird. Für $y = q^* \in P$ ergibt sich aus (10)

$$\langle p, q\rangle = f(pq^*) = \varphi_p(q^*) = \int p(M)\, \overline{q(M)}\, d\mu.$$

Folglich ist die Zuordnung $x \to x(M)$ eine isometrische Abbildung des Raumes H_f' in den Raum $L^2(\mu)$.

Wir setzen jetzt voraus, daß I^2 im Sinne des in H_f definierten skalaren Produktes in I dicht ist, d. h., die Elemente der Gestalt $y^* x$ mit $y, x \in I$ sollen eine in H_f dicht liegende Menge bilden. Auf Grund der Identität

$$y^* x = \frac{1}{4}[(x+y)^*(x+y) - (x-y)^*(x-y)$$
$$+ i(x+iy)^*(x+iy) - i(x-iy)^*(x-iy)]$$

ist nun aber $y^* x \in H_f$, so daß unsere Voraussetzung das Bestehen der Beziehung $H_f' = H_f$ nach sich zieht.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen.

Theorem 5. *Es sei R eine vollsymmetrische kommutative Algebra ohne Einselement. Dann gibt es zu jedem positiven Funktional $f(x)$, das auf einem in R dicht liegenden Ideal gegeben ist, genau ein auf $\mathfrak{M}'$ definiertes Maß μ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *Für jedes $p \in P$ gilt*

$$p(M) \in L^1(\mu) \quad \text{und} \quad f(px) = \int x(M)\, p(M)\, d\mu;$$

b) *die Abbildung $p \to p(M)$ läßt sich zu einer isometrischen Abbildung des* HILBERT*schen Raumes H_f' in den Raum $L^2(\mu)$ fortsetzen. Liegt I^2 im Sinne des skalaren Produkts von H_f in I dicht, so läßt sich $p \to p(M)$ sogar zu einer isometrischen Abbildung des ganzen Raumes H_f in $L^2(\mu)$ fortsetzen. Hierbei bezeichnet P die Gesamtheit aller bezüglich f positiven Elemente $p \in I$; H_f ist der von den Elementen $x \in I$ mit dem skalaren Produkt $\langle x, y\rangle = f(xy^*)$ erzeugte* HILBERT*sche Raum, während H_f' den von den Elementen $x \in P$ aufgespannten Teilraum von H_f bezeichnet.*

§21. Das verallgemeinerte Schursche Lemma

1. Kanonische Zerlegung eines Operators.

I. *Ist A ein positiv definiter selbstadjungierter Operator, so gibt es genau einen positiv definiten selbstadjungierten Operator H, für den $H^2 = A$ ist.*

Beweis. Es sei $P(\lambda)$ die Spektralschar des Operators A. Da A positiv definit ist, gilt $P(\lambda) = 0$ für $\lambda < 0$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{D}_H$ die Gesamtheit aller Vektoren ξ, für die $\int_0^\infty \lambda d|P(\lambda)\xi|^2 < \infty$ ist, und setzen für solche ξ

$$H\xi = \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, dP(\lambda)\,\xi.$$

Wie man unmittelbar nachprüft, ist der so definierte Operator H positiv definit und selbstadjungiert. Auch ist $H^2 = A$. Die Eindeutigkeit von H folgt aus der Eindeutigkeit der Spektralschar $P(\lambda)$.

Für H ist die Bezeichnung $H = \sqrt{A}$ üblich. Aus der Konstruktion von H ergibt sich, daß er mit jedem Operator aus $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ vertauschbar ist, der mit A vertauschbar ist.

II (J. VON NEUMANN [2]). *Jeder abgeschlossene lineare Operator A von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$, dessen Definitionsbereich $\mathfrak{D}_A$ in $\mathfrak{H}_1$ dicht ist, läßt sich in der Form*

$$A = UH \tag{1}$$

darstellen; dabei ist H ein selbstadjungierter Operator in $\mathfrak{H}_1$ mit dem Definitionsbereich $\mathfrak{D}_H = \mathfrak{D}_A$ und U ein partiell isometrischer Operator mit dem Anfangsbereich $\overline{\mathfrak{R}}_{A^*}$ und dem Endbereich $\overline{\mathfrak{R}}_A$. Die Operatoren U und H sind durch diese Forderungen eindeutig bestimmt.

Beweis. Nach Satz VI aus § 5, Nr. 9, ist A^*A ein positiv definiter selbstadjungierter Operator. Auf Grund von Satz I existiert daher $H = \sqrt{A^*A}$. Wir bezeichnen mit H_1 bzw. A_1 die Einschränkung von H bzw. A auf $\mathfrak{D}_{H^2} = \mathfrak{D}_{A^*A}$. Für $\xi \in \mathfrak{D}_{H^2}$ gilt dann

$$|H_1\xi|^2 = \langle H_1\xi, H_1\xi\rangle = \langle H_1^2\xi, \xi\rangle = \langle H^2\xi, \xi\rangle = \langle A^*A\xi, \xi\rangle$$
$$= \langle A\xi, A\xi\rangle = |A\xi|^2 = |A_1\xi|^2.$$

Es ist also

$$|H_1\xi| = |A_1\xi| \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathfrak{D}_{H_1} = \mathfrak{D}_{A_1}.$$

Hieraus schließen wir, daß auch $\mathfrak{D}_{\tilde{H}_1} = \mathfrak{D}_{\tilde{A}_1}$ und

$$|\tilde{H}_1\xi| = |\tilde{A}_1\xi| \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathfrak{D}_{\tilde{H}_1} = \mathfrak{D}_{\tilde{A}_1} \quad \text{ist.} \tag{2}$$

Nun ist $\tilde{H}_1 = H$ und $\tilde{A}_1 = A$, d. h. $\mathfrak{B}_{\tilde{A}_1} = \mathfrak{B}_A$ und $\mathfrak{B}_{\tilde{H}_1} = \mathfrak{B}_H$, wobei $\mathfrak{B}_T$ der Graph des Operators T ist (vgl. § 5, Nr. 7). Offenbar gilt $\mathfrak{B}_{\tilde{A}_1} \subset \mathfrak{B}_A$. Ist $\mathfrak{B}_{\tilde{A}_1} \neq \mathfrak{B}_A$, so gibt es einen vom Nullvektor verschiedenen Vektor $\{\xi, A\xi\} \in \mathfrak{B}_A$, der zu

$\mathfrak{B}_{A_1}$ orthogonal ist:

$$\langle\{\xi, A\xi\}, \{\eta, A_1\eta\}\rangle = 0 \quad \text{für alle} \quad \eta \in \mathfrak{D}_{A_1}$$

oder

$$0 = \langle\xi, \eta\rangle + \langle A\xi, A_1\eta\rangle = \langle\xi, \eta\rangle + \langle A\xi, A\eta\rangle$$
$$= \langle\xi, \eta\rangle + \langle\xi, A^*A\eta\rangle = \langle\xi, (1 + A^*A)\eta\rangle.$$

Da der Wertevorrat des Operators $1 + A^*A$ mit ganz $\mathfrak{H}_1$ übereinstimmt (vgl. § 5, Nr. 9, Satz VI), ist $\xi \perp \mathfrak{H}_1$ und daher $\xi = 0$. Folglich gilt $\tilde{A}_1 = A$. Entsprechend findet man $\tilde{H}_1 = H$. Daher können wir für (2) auch schreiben:

$$|H\xi| = |A\xi| \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathfrak{D}_H = \mathfrak{D}_A. \tag{3}$$

Wir setzen jetzt

$$\left.\begin{aligned} U'H\xi &= A\xi \quad \text{für alle} \quad \xi \in \mathfrak{D}_H \\ U'\eta &= 0 \quad \text{für} \quad \eta \perp \mathfrak{R}_H. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

und

Wegen (3) ist U' ein partiell isometrischer Operator mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{R}_H$ und dem Endbereich $\mathfrak{R}_A$. Wird $U = \tilde{U}'$ gesetzt, so ist U ein partiell isometrischer Operator mit dem Anfangsbereich $\overline{\mathfrak{R}_H}$ und dem Endbereich $\overline{\mathfrak{R}_A}$. Aus (4) folgt unmittelbar $A = UH$.

Wir zeigen nun, daß $\overline{\mathfrak{R}_H} = \overline{\mathfrak{R}_{A^*}}$ oder, was dasselbe ist, $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{R}_H = \mathfrak{H}_1 - \mathfrak{R}_{A^*}$ ist. Wie man leicht sieht, bestehen $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{R}_H$ bzw. $\mathfrak{H}_1 - \mathfrak{R}_{A^*}$ aus den und nur den Vektoren $\xi \in \mathfrak{H}$, für die $H\xi = 0$ bzw. $A\xi = 0$ ist. Wegen (3) stimmen diese Mengen aber miteinander überein.

Es bleibt zu zeigen, daß U und H eindeutig bestimmt sind. Dies ergibt sich einfach so: Ist eine Zerlegung der Gestalt (1) gegeben, so gilt

$$A^* = HU^* \quad \text{und} \quad A^*A = HU^*UH = HP_{\mathfrak{R}_H}H = H^2,$$

und daher ist H und damit auch U eindeutig festgelegt.

Die Zerlegung (1) ist die sogenannte *kanonische Zerlegung des Operators* A.

Ein Operator A von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$ heiße *regulär*, wenn folgendes gilt: a) A ist abgeschlossen; b) $\mathfrak{D}_A$ und $\mathfrak{R}_{A^*}$ sind dicht in $\mathfrak{H}_1$; c) $\mathfrak{R}_A$ ist dicht in $\mathfrak{H}_2$.

Für einen regulären Operator A gilt demnach $\overline{\mathfrak{R}_A} = \mathfrak{H}_2$, $\overline{\mathfrak{R}_{A^*}} = \mathfrak{H}_1$, so daß der Operator U in (1) eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{H}_1$ auf $\mathfrak{H}_2$ vermittelt. Es gilt also der Satz

III. *Jeder reguläre Operator A von $\mathfrak{H}_1$ in $\mathfrak{H}_2$ läßt sich auf eindeutige Weise in der Form*

$$A = UH$$

darstellen, wobei H ein positiv definiter selbstadjungierter Operator in $\mathfrak{H}_1$ ist, während U eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{H}_1$ auf $\mathfrak{H}_2$ vermittelt.

2. Hauptsatz. Für die Theorie der Darstellungen von Algebren[1]) ist die anschließend formulierte Verallgemeinerung des bekannten Schurschen Lemmas über endlichdimensionale Darstellungen (vgl. etwa Pontrjagin [4]) von Nutzen.

[1]) Überall in diesem Paragraphen ist von den Darstellungen ein und derselben symmetrischen Algebra die Rede.

Theorem 1. *Es seien $x \to A_x$, $x \to B_x$ Darstellungen in den Räumen $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}'$. Gibt es einen regulären Operator T von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}'$ derart, daß*

$$B_x T \subset T A_x \tag{1}$$

für alle x aus R ist, so sind diese Darstellungen äquivalent.

Beweis. Aus (1) folgt

$$T^* B_{x^*} = (B_x T)^* \supset (T A_x)^* \supset A_{x^*} T^*,$$

d. h.

$$T^* B_{x^*} \supset A_{x^*} T^*. \tag{2}$$

Setzen wir hier x^* anstelle von x, so ergibt sich

$$T^* B_x \supset A_x T^*. \tag{3}$$

Multiplizieren wir beide Seiten der Beziehung (1) von links mit T^* und berücksichtigen (3), so erhalten wir

$$T^* T A_x \supset T^* B_x T \supset A_x T^* T,$$

d. h.

$$T^* T A_x \supset A_x T^* T.$$

Dies bedeutet aber, daß $T^* T$ mit A_x vertauschbar ist.

Andererseits gibt es auf Grund des NEUMANNschen Satzes (vgl. Nr. 1, Satz III) eine Zerlegung $T = UH$, in der $H^2 = T^* T$ ist, während U den Raum $\mathfrak{H}$ isometrisch auf $\mathfrak{H}'$ abbildet. Wir setzen nun in (1) für T die Zerlegung UH und erhalten

$$B_x U H = U H A_x.$$

Wenden wir diese Beziehung auf ein Element ξ des Definitionsbereichs des Operators H an, so ergibt sich

$$B_x U H \xi = U H A_x \xi. \tag{4}$$

Der Operator A_x ist mit $T^* T$ und folglich auch mit $H = \sqrt{T^* T}$ vertauschbar. Daher ist $H A_x \xi = A_x H \xi$, und für (4) läßt sich

$$B_x U H \xi = U A_x H \xi$$

schreiben. Somit gilt $B_x U = U A_x$ auf dem Definitionsbereich von H. Dieser liegt in $\mathfrak{H}$ dicht, weil T nach Voraussetzung ein regulärer Operator ist. Wegen der Stetigkeit der Operatoren A_x, B_x und U folgt hieraus, daß die Beziehung $B_x U = U A_x$ auch auf dem ganzen Raum $\mathfrak{H}$ gilt, d. h., die Darstellungen $x \to A_x$ und $x \to B_x$ sind äquivalent.

Folgerung 1. *Es seien $x \to A_x$, $x \to B_x$ irreduzible Darstellungen in den Räumen $\mathfrak{H}$ bzw. $\mathfrak{H}'$, und es sei T ein abgeschlossener linearer Operator von $\mathfrak{H}$ in $\mathfrak{H}'$ mit*

$$B_x T \subset T A_x. \tag{5}$$

Dann gilt entweder $T = 0$, oder die Darstellungen sind äquivalent, und es ist $T = \varrho U$, wobei ϱ eine positive Zahl bedeutet.

Beweis. Es sei $T \neq 0$. Dann gibt es im Definitionsbereich von T einen Vektor $\xi_0 \neq 0$, für den $T\xi_0 \neq 0$ ist. Aus der Bedingung (5) folgt, daß jedes Element der Gestalt $A_x\xi_0$ ebenfalls zum Definitionsbereich von T gehört. Da die Darstellung $x \to A_x$ irreduzibel ist, liegt die Gesamtheit dieser Vektoren $A_x\xi_0$ in $\mathfrak{H}$ dicht. Folglich liegt der Definitionsbereich des Operators T dicht in $\mathfrak{H}$.

Ferner gilt $TA_x\xi_0 = B_xT\xi_0$, so daß der Wertebereich von T alle Vektoren $B_xT\xi_0$ enthält. Da $T\xi_0 \neq 0$ und die Darstellung $x \to B_x$ irreduzibel ist, bilden diese Vektoren eine Menge, die in $\mathfrak{H}'$ dicht ist. Folglich liegt der Wertebereich von T in $\mathfrak{H}'$ dicht.

Wir wenden nun auf die beiden Seiten der Beziehung (5) die Involutionsoperation an und setzen x^* statt x. Dies ergibt die zu (5) analoge Beziehung

$$A_xT^* \subset T^*B_x,$$

in der T^* die Rolle von T spielt. Mit $T \neq 0$ ist auch $T^* \neq 0$. Daher sind die vorhergehenden Überlegungen auch auf T^* anwendbar. Somit liegen der Definitionsbereich und der Wertebereich von T^* in $\mathfrak{H}'$ bzw. $\mathfrak{H}$ dicht. Daher ist T ein regulärer Operator.

Nach Theorem 1 folgt hieraus die Äquivalenz der Darstellungen $x \to A_x$ und $x \to B_x$. Dann ist $H = \sqrt{T^*T}$ mit allen Operatoren A_x der irreduziblen Darstellung $x \to A_x$ vertauschbar, also ein Vielfaches des Einsoperators. Es sei $H = \varrho 1$. Dann ist $\varrho > 0$ und $T = UH = \varrho \cdot U$.

3. Anwendung auf die direkte Summe paarweise nicht äquivalenter Darstellungen. Wir werden die oben erhaltenen Sätze jetzt zur Untersuchung direkter Summen von Darstellungen benutzen.

Theorem 2. *Die Darstellung $x \to A_x$ im Raum $\mathfrak{H}$ sei die direkte Summe irreduzibler und paarweise nicht äquivalenter Darstellungen $x \to A_x^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, in den Räumen $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$. Dann hat jeder beschränkte Operator B im Raum $\mathfrak{H}$, der mit allen Operatoren A_x vertauschbar ist, die Gestalt*

$$B\{\xi_\alpha\} = \{\lambda_\alpha\xi_\alpha\}, \tag{1}$$

wobei die λ_α Zahlen sind.

Beweis. Nach § 5, Nr. 15, wird jeder beschränkte Operator B in $\mathfrak{H}$ durch eine Matrix $\|B_{\alpha\alpha_1}\|$ gegeben, in der $B_{\alpha\alpha_1}$ ein Operator von $\mathfrak{H}^{(\alpha_1)}$ in $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ ist. Insbesondere entspricht dem Operator A_x eine Diagonalmatrix $A_x = \|\delta_{\alpha\alpha_1}A_x^{(\alpha)}\|$; dabei bezeichnet $\delta_{\alpha\alpha_1}$ das Kronecker-Symbol

$$\delta_{\alpha\alpha_1} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad \alpha = \alpha_1, \\ 0 & \text{für} \quad \alpha \neq \alpha_1. \end{cases}$$

Aus der Voraussetzung, daß B und A_x miteinander vertauschbar sind, folgt also

$$A_x^{(\alpha)}B_{\alpha\alpha_1} = B_{\alpha\alpha_1}A_x^{(\alpha_1)}. \tag{2}$$

Nach Voraussetzung sind die Darstellungen $x \to A_x^{(\alpha)}$ und $x \to A_x^{(\alpha_1)}$ für $\alpha \neq \alpha_1$ nicht einander äquivalent. Andererseits bedeutet (2), daß der Operator $T = B_{\alpha\alpha_1}$

den Voraussetzungen der Folgerung 1 aus Nr. 2 genügt. Daher ist $B_{\alpha\alpha_1} = 0$ für $\alpha \neq \alpha_1$. Für $\alpha = \alpha_1$ folgt aus (2), daß der Operator $B_{\alpha\alpha}$ mit allen Operatoren $A_x^{(\alpha)}$ der irreduziblen Darstellung $A_x^{(\alpha)}$ vertauschbar ist. Folglich ist $B_{\alpha\alpha}$ ein Vielfaches des Einsoperators, d. h., $B_{\alpha\alpha} = \alpha_\alpha 1_\alpha$, wobei 1_α der Einsoperator im Raum $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$ ist. Hieraus folgt

$$B\{\xi_\alpha\} = \{\lambda_\alpha \xi_\alpha\}.$$

In den anschließend formulierten Folgerungen bezeichnet die Darstellung $x \to A_x$ im Raum $\mathfrak{H}$ die direkte Summe der Darstellungen $x \to A_x^{(\alpha)}$, $\alpha \in \mathfrak{A}$, in den Räumen $\mathfrak{H}^{(\alpha)}$.

Folgerung 2. *Jeder abgeschlossene invariante Teilraum $\mathfrak{M}$ von $\mathfrak{H}$ ist die Gesamtheit aller Vektoren $\xi = \{\xi_\alpha\}$ aus $\mathfrak{H}$, die der Bedingung*

$$\xi_\alpha = 0 \quad \textit{für alle} \quad \alpha \in \mathfrak{A}_1$$

genügen, wobei $\mathfrak{A}_1$ eine gewisse Teilmenge der Menge $\mathfrak{A}$ ist.

Beweis. Es sei P der Projektionsoperator auf $\mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{M}$ ein invarianter Teilraum ist, muß P mit allen Operatoren A_x vertauschbar sein. Nach Theorem 2 ist $P\{\xi_\alpha\} = \{\lambda_\alpha \xi_\alpha\}$. Aus $P^2 = P$ folgt dann $\lambda_\alpha^2 = \lambda_\alpha$, so daß entweder $\lambda_\alpha = 0$ oder $\lambda_\alpha = 1$ ist. Es bezeichne $\mathfrak{A}_1$ die Gesamtheit derjenigen Indizes α, für die $\lambda_\alpha = 0$ ist. Der Teilraum $\mathfrak{M}$ besteht dann aus den und nur den Vektoren $\{\xi_\alpha\}$ aus $\mathfrak{H}$, für die $P\{\xi_\alpha\} = \{\xi_\alpha\}$, d. h. für die

$$\lambda_\alpha \xi_\alpha = \xi_\alpha \tag{3}$$

ist. Ist nun $\alpha \in \mathfrak{A}_1$, so gilt $\lambda_\alpha = 0$. Aus (3) folgt demnach $\xi_\alpha = 0$. Ist jedoch $\alpha \notin \mathfrak{A}_1$, so gilt $\lambda_\alpha = 1$, und der entsprechenden Komponente ξ_α ist keine Bedingung auferlegt.

Folgerung 3. *Ist $\mathfrak{A}$ abzählbar, so ist jeder Vektor $\xi = \{\xi_\alpha\}$ aus $\mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft, daß $\xi_\alpha \neq 0$ für alle $\alpha \in \mathfrak{A}$ ist, ein zyklischer Vektor in $\mathfrak{H}$.*

Bezeichnet nämlich $\mathfrak{M}$ die abgeschlossene Hülle der Menge aller Vektoren $A_x\xi$, $x \in R$, so ist $\mathfrak{M}$ ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$, der nach Folgerung 2 mit $\mathfrak{H}$ übereinstimmt, weil $\mathfrak{A}_1$ die leere Menge ist.

4. Anwendung auf Darstellungen, die ein Vielfaches einer gegebenen irreduziblen Darstellung sind. Wir haben bisher direkte Summen von paarweise nicht äquivalenten Darstellungen betrachtet. Es soll jetzt ein anderer Grenzfall behandelt werden.

Eine Darstellung $x \to A_x$ heiße *Vielfaches einer gegebenen irreduziblen Darstellung* $x \to A_x^{(0)}$, wenn $x \to A_x$ direkte Summe von Darstellungen ist, die sämtlich der Darstellung $x \to A_x^{(0)}$ äquivalent sind.

Theorem 3. *Jede irreduzible Komponente einer Darstellung $x \to A_x$, die ein Vielfaches einer gegebenen irreduziblen Darstellung $x \to A_x^{(0)}$ darstellt, ist dieser irreduziblen Darstellung äquivalent.*

Beweis. Es sei $x \to A'_x$ eine irreduzible Komponente der Darstellung $x \to A_x$, und es bezeichne $\mathfrak{M}$ denjenigen abgeschlossenen invarianten Teilraum des Raumes $\mathfrak{H}$, in dem diese Komponente betrachtet wird. Ist $\mathfrak{M} \neq (0)$, so gibt es

in $\mathfrak{M}$ einen Vektor $\xi^0 = \{\xi^0_\alpha\} \neq 0$. Dann ist wenigstens eine der Komponenten ξ^0_α dieses Vektors von Null verschieden. Es sei $\xi^0_{\alpha_0}$ eine solche Komponente. Zur Abkürzung setzen wir $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_{\alpha_0}$ und $H = \sum_{\alpha \neq \alpha_0} \oplus \mathfrak{H}_\alpha$. Dann kann der Raum $\mathfrak{H} = \sum_\alpha \oplus \mathfrak{H}_\alpha$ als direkte Summe der Räume $\mathfrak{H}_0$ und H angesehen werden, so daß jedes Element $\xi \in \mathfrak{H}$ als Paar $\xi = \{\eta, \zeta\}$ mit $\eta \in \mathfrak{H}_0$, $\zeta \in H$ aufgefaßt werden kann. Wegen der Wahl des Index α_0 gibt es unter den Paaren $\xi = \{\eta, \zeta\}$, die zu dem Teilraum $\mathfrak{M}$ gehören, wenigstens eines, für das $\eta \neq 0$ ist. Wir setzen zur Abkürzung $B_x = A_x^{(\alpha_0)}$ und bezeichnen mit $x \to C_x$ die direkte Summe aller Darstellungen $x \to A_x^{(\alpha)}$, $\alpha \neq \alpha_0$. Dann läßt sich die Darstellung $x \to A_x$ als direkte Summe der Darstellungen $x \to B_x$ und $x \to C_x$ betrachten. Mit anderen Worten, es ist

$$A_x\{\eta, \zeta\} = \{B_x \eta, C_x \zeta\}.$$

Nun bezeichne H' die Gesamtheit aller Elemente ζ mit der Eigenschaft, daß $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$ für ein gewisses η ist. Es sei $\tilde{H}'$ die abgeschlossene Hülle von H'. Diese ist bezüglich aller Operatoren C_x invariant. Um dies einzusehen, gehen wir davon aus, daß $\mathfrak{M}$ ein invarianter Teilraum von $\mathfrak{H}$ ist. Daher ist mit $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$ auch $\{B_x \eta, C_x \zeta\} \in \mathfrak{M}$. Mit anderen Worten, aus $\zeta \in H'$ folgt $C_x \zeta \in H'$, so daß $\tilde{H}'$ ein invarianter Teilraum von H ist.

Wir betrachten nun diejenigen Elemente des Teilraumes $\mathfrak{M}$, welche die Form $\{\eta, 0\}$ haben. Diese bilden in $\mathfrak{M}$ einen invarianten Teilraum in bezug auf die Darstellung $x \to B_x$. Da $x \to B_x$ irreduzibel ist, stimmt dieser invariante Teilraum entweder mit $\mathfrak{M}$ oder mit (0) überein. Im ersten Fall besteht $\mathfrak{M}$ aus den Elementen der Gestalt $\xi = \{\eta, 0\} = \{\xi_{\alpha_0}, 0\}$. Folglich ist dann $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}_{\alpha_0}$, so daß die Darstellung $x \to A'_x$ mit der Darstellung $x \to A_x^{(\alpha_0)}$ übereinstimmt. Damit ist unser Satz für diesen Fall bereits bewiesen.

Im zweiten Fall kann das Element $\{\eta, 0\}$ nur dann zu dem Teilraum $\mathfrak{M}$ gehören, wenn $\eta = 0$ ist, d. h.,

$$\text{aus } \{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M} \text{ und } \zeta = 0 \text{ folgt } \eta = 0. \tag{1}$$

Analog ist die Gesamtheit derjenigen Elemente des Teilraumes $\mathfrak{M}$, die die Gestalt $\{0, \zeta\}$ haben, ein invarianter Teilraum in $\mathfrak{M}$. Dieser stimmt dann wieder entweder mit $\mathfrak{M}$ oder mit (0) überein. Der erste Fall kann nun aber wegen der Wahl des Index α_0 nicht eintreten. Daher bleibt der zweite Fall übrig, d. h.,

$$\text{aus } \{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M} \text{ und } \eta = 0 \text{ folgt } \zeta = 0. \tag{2}$$

Offenbar bedeutet (2), daß der Teilraum $\mathfrak{M}$ als Graph eines linearen Operators T aus $\mathfrak{H}_0$ in $\tilde{H}'$ betrachtet werden kann (vgl. § 5, Nr. 7), indem einfach $\zeta = T\eta$ für $\{\eta, \zeta\} \in \mathfrak{M}$ gesetzt wird. Da $\mathfrak{M}$ abgeschlossen ist, ist der Operator T abgeschlossen.

Nun sei $\{\eta_0, \zeta_0\}$ ein Element aus $\mathfrak{M}$ mit $\eta_0 \neq 0$. Dann liegt auch $\{B_x \eta_0, C_x \zeta_0\}$ in $\mathfrak{M}$. Folglich gehören alle Vektoren $B_x \eta_0$ zum Definitionsbereich des Operators T. Da die Darstellung $x \to B_x$ irreduzibel ist, liegt die Menge aller Vektoren $B_x \eta_0$ in $\mathfrak{H}_0$ dicht. Folglich liegt der Definitionsbereich des Operators T in $\mathfrak{H}_0$ dicht. Weiterhin stimmt der Wertebereich von T nach der Definition des

Raumes H' mit H' überein, so daß auch der Wertebereich von T in $\tilde{H}'$ dicht liegt.

Schließlich bedeutet die Bedingung (1), daß $T\eta = 0$ nur für $\eta = 0$ ist, so daß $\overline{\mathfrak{R}_{T^*}} = \mathfrak{H}_0$ gilt.

Somit ist T ein regulärer Operator von $\mathfrak{H}_0$ in $\tilde{H}'$.

Dieser Operator genügt der Bedingung $C_x T \subset T B_x$. Dies folgt so: Die Elemente des Teilraumes $\mathfrak{M}$ haben die Gestalt $\{\eta, T\eta\}$. Da $\mathfrak{M}$ invariant ist, ist auch $\{B_x\eta, C_x T\eta\} \in \mathfrak{M}$, und folglich gilt $T B_x \eta = C_x T \eta$ für jedes Element η aus dem Definitionsbereich des Operators T. Dies bedeutet aber, daß tatsächlich

$$C_x T \subset T B_x$$

ist.

Auf Grund von Theorem 1 folgt hieraus die Äquivalenz der Darstellungen $x \to B_x$ in $\mathfrak{H}_0$ und $x \to C_x$ in $\tilde{H}'$. Der Operator $H = \sqrt{T^*T}$ ist darüber hinaus mit allen Operatoren der irreduziblen Darstellung $x \to B_x$ vertauschbar. Daher gilt $H = \varrho 1$, $\varrho > 0$. Hieraus folgt $T = \varrho W$, wobei W eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{H}_0$ auf $\tilde{H}'$ ist .Somit hat jedes Element des Teilraumes $\mathfrak{M}$ die Gestalt $\xi = \{\eta, \varrho W\eta\}$, wobei η ganz $\mathfrak{H}_0$ durchläuft. Hierbei gilt

$$A_x \xi = A'_x\{\eta, \varrho W\eta\} = \{B_x\eta, \varrho W B_x\eta\}.$$

Jedem Element $\xi = \{\eta, \varrho W\eta\}$ ordnen wir das Element $\eta' = \sqrt{1+\varrho^2}\,\eta$ zu. Die so erhaltene Zuordnung $\xi \to \eta'$ ist eine isometrische Abbildung des Teilraumes $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{H}_0 = \mathfrak{H}_{\alpha_0}$. Bei dieser Abbildung geht das Element $A'_x\xi = \{B_x\,\eta, \varrho W B_x\eta\}$ in das Element $\sqrt{1+\varrho^2}\,B_x\eta = B_x\eta'$ und folglich der Operator A_x in den Operator B_x über. Dies bedeutet aber, daß die Darstellungen $x \to A'_x$ und $x \to B_x = A_x^{(0)}$ äquivalent sind. Damit ist unser Satz vollständig bewiesen.

Folgerung 4. *Die Darstellungen $x \to A_x$ bzw. $x \to B_x$ seien Vielfache der irreduziblen Darstellungen $x \to A_x^{(0)}$ bzw. $x \to B_x^{(0)}$. Sind die Vielfachen $x \to A_x$ und $x \to B_x$ einander äquivalent, so sind auch die irreduziblen Darstellungen $x \to A_x^{(0)}$ und $x \to B_x^{(0)}$ einander äquivalent.*

Beweis. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}$, $\mathfrak{H}_1$, $\mathfrak{H}^{(0)}$ und $\mathfrak{H}_1^{(0)}$ die Räume der Darstellungen $x \to A_x$, $x \to B_x$, $x \to A_x^{(0)}$ bzw. $x \to B_x^{(0)}$. Der Raum $\mathfrak{H}^{(0)}$ kann als abgeschlossener invarianter Teilraum des Raumes $\mathfrak{H}$ und die Darstellung $x \to A_x^{(0)}$ als Komponente der Darstellung $x \to A_x$ in diesem Teilraum betrachtet werden. Nach Voraussetzung gibt es eine isometrische Abbildung des Raumes $\mathfrak{H}$ auf den Raum $\mathfrak{H}_1$, bei welcher der Operator A_x jeweils in den Operator B_x übergeht. Diese Abbildung führt $\mathfrak{H}^{(0)}$ in einen gewissen invarianten Teilraum $\mathfrak{N}$ des Raumes $\mathfrak{H}$ über. Es sei $x \to C_x$ die Komponente der Abbildung $x \to B_x$ in diesem invarianten Teilraum. Die Darstellung $x \to C_x$ ist der irreduziblen Darstellung $x \to A_x^{(0)}$ äquivalent und daher selbst irreduzibel.

Somit ist $x \to C_x$ eine irreduzible Komponente der Darstellung $x \to B_x$, die ein Vielfaches der irreduziblen Darstellung $x \to B_x^{(0)}$ ist. Auf Grund von Theorem 3 sind die Darstellungen $x \to B_x^{(0)}$ und $x \to C_x$ einander äquivalent. Folglich sind auch die Darstellungen $x \to B_x^{(0)}$ und $x \to A_x^{(0)}$ einander äquivalent.

§ 22. Einige Darstellungen der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$

Eines der wichtigsten Probleme der Theorie der symmetrischen Algebren ist die Beschreibung aller verschiedenen Darstellungen einer gegebenen Algebra. Dabei wird man zwischen äquivalenten Darstellungen nicht unterscheiden. Dieses Problem ist bisher nur für einige Spezialfälle vollständig gelöst worden (vgl. GELFAND und NEUMARK [2—5, 7, 8]). Für die Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ aller beschränkten Operatoren im HILBERTschen Raum $\mathfrak{H}$ ist keine Lösung dieses Problems bekannt. Es liegen lediglich spezielle Ergebnisse vor. Mit diesen wollen wir uns im folgenden beschäftigen.

1. Die Ideale der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Jede Darstellung der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist ein symmetrischer Homomorphismus von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und damit ein symmetrischer Isomorphismus der Restklassenalgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I$, wobei I der Kern dieses Homomorphismus ist (vgl. § 10, Nr. 1). Da jede Darstellung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ stetig ist (nach Theorem 1 aus § 17, Nr. 3), ist I ein abgeschlossenes zweiseitiges symmetrisches Ideal von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Eines dieser Ideale ist die Gesamtheit aller vollstetigen Operatoren in $\mathfrak{H}$, denn es gilt: 1. Die Summe zweier vollstetiger Operatoren ist vollstetig; 2. das Produkt eines vollstetigen Operators mit einem beschränkten Operator ist vollstetig; 3. der Limes einer im Sinne der Norm von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ konvergenten Folge vollstetiger Operatoren ist vollstetig.

Wir bezeichnen dieses Ideal mit I_0. Es ist symmetrisch, weil mit A auch A^* vollstetig ist.

Theorem 1. *Ist $\mathfrak{H}$ separabel, so ist I_0 das einzige von* (0) *verschiedene abgeschlossene zweiseitige Ideal in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.*

Der Beweis dieses Theorems beruht auf den folgenden Sätzen. Ist S irgendeine Teilmenge von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, so bezeichnen wir mit S^P die Gesamtheit aller in S enthaltenen Projektionsoperatoren.

I. *Ist I_l ein Linksideal in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und gilt $I_l^P = (0)$, so ist $I_l = (0)$.*

Beweis. Es sei $A \in I_l$, $A \neq 0$. Wir setzen $H = A^*A$. Dann ist auch $H \in I_l$ und natürlich $H \neq 0$. Mit $P(\lambda)$ bezeichnen wir die Spektralschar von H. Da H definit ist, gibt es ein Intervall $\Delta = (\alpha, \beta)$, $0 < \alpha < \beta$, derart, daß $P(\Delta) \neq 0$ ist. Es sei $\mathfrak{M}_\Delta$ der Teilraum, auf den $P(\Delta)$ projiziert. Es bezeichne H_Δ den als Operator im Raum $\mathfrak{M}_\Delta$ betrachteten Operator H. Offenbar ist der zu H_Δ inverse Operator in $\mathfrak{M}_\Delta$ beschränkt. Wir setzen $B = H_\Delta^{-1} P(\Delta)$. Dann ist B ein beschränkter Operator, also $BH \in I_l$. Andererseits gilt $BH = P(\Delta)$, wie man leicht sieht. Folglich enthält das Ideal I_l den Projektionsoperator $P(\Delta) \neq 0$. Aus $I_l^P = (0)$ folgt daher, daß es in I_l keinen Operator $A \neq 0$ gibt.

Unter der *Dimension eines Projektionsoperators* P wollen wir die Dimension des Teilraumes verstehen, auf den er projiziert.

II. *Ist I ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und P ein in I enthaltener Projektionsoperator, so gehört jeder Projektionsoperator Q, der dieselbe Dimension wie P hat, ebenfalls zu I.*

Beweis. Wenn die Räume $P\mathfrak{H}$ und $Q\mathfrak{H}$ dieselbe Dimension haben, so gibt es einen partiellisometrischen Operator U mit dem Anfangsbereich $P\mathfrak{H}$ und dem Endbereich $Q\mathfrak{H}$. Dies bedeutet, daß $U^*U = P$ und $UU^* = Q$ ist (vgl. § 5, Nr. 14). Da I ein zweiseitiges Ideal ist, folgt

$$Q = Q^2 = UU^*UU^* = UPU^* \in I.$$

III. *Ist $\mathfrak{H}$ separabel, so enthält keines der zweiseitigen Ideale von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ einen unendlichdimensionalen Projektionsoperator.*

Beweis. Ein unendlichdimensionaler Projektionsoperator P und der Einsoperator 1 haben in diesem Fall dieselbe Dimension. Da der Einsoperator nicht zu dem Ideal I gehört, kann nach Satz II auch P nicht zu I gehören.

IV. *Sind P und Q Projektionsoperatoren und gilt $P \in I$ und $Q < P$, so ist auch $Q \in I$.*

Die Voraussetzung $Q < P$ bedeutet nämlich $Q = QP = PQ$, so daß $Q \in I$ sein muß, weil I ein Ideal ist.

Aus den Sätzen I und IV folgt, daß jedes Ideal $I \neq 0$ wenigstens einen eindimensionalen Projektionsoperator enthält. Auf Grund von Satz II enthält I dann auch alle eindimensionalen und folglich überhaupt alle endlichdimensionalen Projektionsoperatoren.

Unter Berücksichtigung von Satz III erkennt man nun, daß I^P genau aus allen endlichdimensionalen Projektionsoperatoren besteht, wenn $I \neq (0)$ und $\mathfrak{H}$ separabel ist.

Wir können jetzt das Theorem 1 beweisen. Der Raum $\mathfrak{H}$ sei separabel. Ferner sei I ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, das nicht das Nullideal ist, und A ein vollstetiger Operator. Wir behaupten, daß $A \in I$ ist. Da sich A in der Form $A = H_1 + iH_2$ darstellen läßt, wobei H_1 und H_2 vollstetige hermitesche Operatoren sind, genügt es, die Behauptung für den Fall eines hermiteschen Operators A nachzuweisen. In diesem Fall hat die Spektralzerlegung von A die Gestalt

$$A = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k; \tag{1}$$

dabei sind die P_k endlichdimensionale Operatoren, und es gilt $\lambda_k \to 0$ für $k \to \infty$ (vgl. § 17, Nr. 4). Die Reihe konvergiert im Sinne der Norm des Raumes $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Da jede endliche Summe $\sum_{k=1}^{n} \lambda_k P_k$ zu I gehört, ist auch $A \in I$. Daher gilt

$$I_0 \subset I.$$

Um die entgegengesetzte Inklusion zu zeigen, nehmen wir einen Operator $A \in I$ und zeigen, daß $A \in I_0$ ist. Es sei $A = UH$ die kanonische Zerlegung von A. Dann gilt $A^* = HU^* = U^*AU^*$, und folglich ist auch $A^* \in I$. Dann gehören aber auch $H_1 = \frac{A + A^*}{2}$ und $H_2 = \frac{A - A^*}{2i}$ zu I. Wir dürfen also A als hermitesch annehmen.

Mit $P(\lambda)$ bezeichnen wir die Spektralschar von A. Mit derselben Überlegung wie beim Beweis von Satz I erkennen wir, daß $P(\Delta) \in I$ für jedes abgeschlossene

Intervall Δ ist, das nicht die Null enthält. Auf Grund von Satz III ist $P(\Delta)$ endlichdimensional, also ist $P(\Delta) \in I_0$ und folglich auch $A \in I_0$, denn im Sinne der Norm des Raumes $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ gilt

$$A = \int \lambda \, dP(\lambda) = \lim \sum_{k=1}^{n} \lambda_k P(\Delta_k), \quad 0 \notin \Delta_k.$$

Somit ist $I_0 = I$, was zu beweisen war.

Mit denselben Überlegungen beweist man den Satz[1])

V. *Die Algebra I_0 enthält keine abgeschlossenen, von Null verschiedenen zweiseitigen Ideale.*

Beweis. Es sei I ein solches Ideal. Der Satz I ist auf I anwendbar, weil $B \in I_0$ für $H \in I_0$ ist. Auch der Satz II ist anwendbar, weil $U \in I_0$ für $P \in I$ ist. Schließlich ist auch der Satz IV anwendbar, denn aus $P \in I_0$ und $Q < P$ folgt $Q \in I_0$. Demzufolge kann man wie oben schließen, daß das von (0) verschiedene Ideal I alle endlichdimensionalen Projektionsoperatoren enthält und daher mit I_0 übereinstimmt.

Folgerung. *Ist $\mathfrak{H}$ separabel, so ist jede Darstellung der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ein symmetrischer Isomorphismus der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ selbst oder der Restklassenalgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$.*

2. Die Algebra I_0 und ihre Darstellungen. Die Gesamtheit I_0 aller vollstetigen Operatoren im Raum $\mathfrak{H}$ ist offenbar eine BANACHsche symmetrische Teilalgebra (ohne Einselement) der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Wir suchen sämtliche Darstellungen der Algebra I_0.

Es sei $\{\varphi_\alpha\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem von $\mathfrak{H}$ und P_α der Projektionsoperator auf den eindimensionalen Teilraum $\mathfrak{M}_\alpha$, der von dem Vektor φ_α aufgespannt wird, d. h.

$$P_\alpha \xi = \langle \xi, \varphi_\alpha \rangle \varphi_\alpha. \tag{1}$$

Offenbar gilt

$$P_{\alpha_1} P_{\alpha_2} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2. \tag{2}$$

Es seien $U_{\alpha\beta}$ die durch die Gleichungen

$$U_{\alpha\beta}(\lambda \varphi_\beta) = \lambda \varphi_\alpha, \quad U_{\alpha\beta} \xi = 0 \quad \text{für} \quad \xi \perp \varphi_\beta$$

definierten Operatoren. Offenbar ist $U_{\alpha\beta}$ ein partiell isometrischer Operator mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{M}_\beta$ und dem Endbereich $\mathfrak{M}_\alpha$. Per definitionem gilt

$$U^*_{\alpha\beta} = U_{\beta\alpha}, \quad U_{\alpha\alpha} = P_\alpha, \quad U_{\alpha\beta} U_{\beta\gamma} = U_{\alpha\gamma}, \quad U_{\alpha\beta} U_{\gamma\delta} = 0 \quad \text{für} \quad \beta \neq \gamma. \tag{3}$$

Außerdem gilt wegen (1) für jeden beschränkten Operator A

$$P_\alpha A P_\beta \xi = P_\alpha A \langle \xi, \varphi_\beta \rangle \varphi_\beta = \langle \xi, \varphi_\beta \rangle \langle A \varphi_\beta, \varphi_\alpha \rangle \varphi_\alpha;$$

folglich ist

$$P_\alpha A P_\beta (\lambda \varphi_\beta) = \lambda \langle A \varphi_\beta, \varphi_\alpha \rangle \varphi_\alpha,$$
$$P_\alpha A P_\beta \xi = 0 \quad \text{für} \quad \xi \perp \varphi_\beta.$$

---

[1]) Wir setzen hier nicht mehr voraus, daß $\mathfrak{H}$ separabel ist.

Durch Vergleich dieser Beziehungen mit der Definition von $U_{\alpha\beta}$ folgt

$$P_\alpha A P_\beta = a_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

wobei

$$a_{\alpha\beta} = \langle A\varphi_\beta, \varphi_\alpha\rangle$$

ein Element der Matrix des Operators A in bezug auf das Orthonormalsystem $\{\varphi_\alpha\}$ ist.

Nun sei $A \to \bar{A}$ eine Darstellung der Algebra I_0 und $\bar{\mathfrak{H}}$ der Raum dieser Darstellung. Da die Operatoren P_α, $U_{\alpha\beta}$ zu I_0 gehören, entsprechen ihnen gewisse Operatoren $\bar{P}_\alpha$, $\bar{U}_{\alpha\beta}$ der Darstellung, die wegen (2) und (3) den Bedingungen

$$\bar{P}_{\alpha_1}\bar{P}_{\alpha_2} = 0 \quad \text{für} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2, \tag{5}$$

$$\bar{U}^*_{\alpha\beta} = \bar{U}_{\beta\alpha}, \quad \bar{U}_{\alpha\alpha} = \bar{P}_\alpha, \quad \bar{U}_{\alpha\beta}\bar{U}_{\beta\gamma} = \bar{U}_{\alpha\gamma}, \quad \bar{U}_{\alpha\beta}\bar{U}_{\gamma\delta} = 0 \quad \text{für} \quad \beta \neq \gamma \tag{6}$$

genügen. Ist $A \in I_0$ und $\bar{A}$ der entsprechende Operator der Darstellung, so folgt aus (4)

$$\bar{P}_\alpha \bar{A} \bar{P}_\beta = a_{\alpha\beta} \bar{U}_{\alpha\beta}. \tag{7}$$

Offenbar ist $\bar{P}_\alpha$ ein Projektionsoperator in $\bar{\mathfrak{H}}$. Es sei $\bar{\mathfrak{M}}_\alpha$ der Teilraum, auf den $\bar{P}_\alpha$ projiziert. Wegen (5) gilt

$$\bar{\mathfrak{M}}_{\alpha_1} \perp \bar{\mathfrak{M}}_{\alpha_2} \quad \text{für} \quad \alpha_1 \neq \alpha_2.$$

Außerdem folgt aus (6), daß $\bar{U}_{\alpha\beta}$ ein partiell isometrischer Operator mit dem Anfangsbereich $\bar{\mathfrak{M}}_\beta$ und dem Endbereich $\bar{\mathfrak{M}}_\alpha$ ist. Daher haben alle Teilräume $\bar{\mathfrak{M}}_\alpha$ dieselbe Dimension. Ist diese gleich Null, so sind alle Operatoren $\bar{P}_\alpha$ und damit auch alle $\bar{P}_\alpha \bar{A} \bar{P}_\beta$ gleich Null. Andererseits ist jeder vollstetige Operator A Limes der endlichen Summen $\sum a_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}$ im Sinne der Norm des Raumes $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Da jede Darstellung $A \to \bar{A}$ der Algebra I_0 stetig ist (vgl. § 17, Nr. 3, Theorem 1), ist also das Bild $\bar{A}$ eines Operators A im Sinne der Norm von $\mathfrak{B}(\bar{\mathfrak{H}})$ Limes der endlichen Summen $\sum a_{\alpha\beta} \bar{U}_{\alpha\beta}$. Daher folgt aus unserer obigen Annahme, daß auch das Bild $\bar{A}$ jedes Operators $A \in I_0$ gleich Null ist, d. h., bei dieser Darstellung geht jeder Operator $A \in I_0$ in den Nulloperator über.

Lassen wir diesen uninteressanten Fall beiseite, so dürfen wir demnach annehmen, daß die Dimension der Räume $\bar{\mathfrak{M}}_\alpha$ von Null verschieden ist.

Es sei $\bar{\varphi}_{\alpha_0}$ ein normiertes Element des Raumes $\bar{\mathfrak{M}}_{\alpha_0}$. Wir setzen

$$\bar{\varphi}_\alpha = \bar{U}_{\alpha\alpha_0}\bar{\varphi}_{\alpha_0}.$$

Dann bilden die Elemente $\bar{\varphi}_\alpha$ ein Orthonormalsystem des Raumes $\bar{\mathfrak{H}}$. Mit $\bar{\mathfrak{N}}$ bezeichnen wir den von den Elementen $\bar{\varphi}_\alpha$ aufgespannten abgeschlossenen Teilraum. Aus (5), (6) und (7) folgt, daß $\bar{\mathfrak{N}}$ bezüglich aller Operatoren $\bar{A}$ invariant ist; denn es gilt

$$\bar{U}_{\alpha\beta}\bar{\varphi}_\gamma = \bar{U}_{\alpha\beta}\bar{U}_{\gamma\alpha_0}\bar{\varphi}_{\alpha_0} = 0 \quad \text{für} \quad \beta \neq \gamma,$$

$$\bar{U}_{\alpha\beta}\bar{\varphi}_\beta = \bar{U}_{\alpha\beta}\bar{U}_{\beta\alpha_0}\bar{\varphi}_{\alpha_0} = \bar{U}_{\alpha\alpha_0}\bar{\varphi}_{\alpha_0} = \bar{\varphi}_\alpha$$

und folglich

$$\bar{P}_\alpha \bar{A} \bar{P}_\beta \bar{\varphi}_\gamma = 0 \quad \text{für} \quad \gamma \neq \beta,$$
$$\bar{P}_\alpha \bar{A} \bar{P}_\beta \bar{\varphi}_\beta = a_{\alpha\beta} \bar{\varphi}_\alpha. \tag{8}$$

Die Operatoren $\bar{P}_\alpha \bar{A} \bar{P}_\beta$ und damit auch ihre Limites $\bar{A}$ bilden also $\bar{\mathfrak{N}}$ in sich ab. In diesem Raum ist $\bar{P}_\alpha$ Projektionsoperator auf den von dem Element $\bar{\varphi}_\alpha$ erzeugten eindimensionalen Teilraum. Daher bedeutet (8), daß $\|a_{\alpha\beta}\|$ die Matrix des Operators $\bar{A}$ im Raum $\bar{\mathfrak{N}}$ bezüglich des Orthonormalsystems $\{\bar{\varphi}_\alpha\}$ ist. Die Zuordnung $\varphi_\alpha \to \bar{\varphi}_\alpha$ bildet $\mathfrak{H}$ isometrisch auf $\bar{\mathfrak{N}}$ ab und läßt hierbei den Operator A in den Operator $\bar{A}$ übergehen. Mit anderen Worten, die Komponente der Darstellung $A \to \bar{A}$ in dem Teilraum $\bar{\mathfrak{N}}$ wird von einer isometrischen Abbildung von $\mathfrak{H}$ auf $\bar{\mathfrak{N}}$ erzeugt, d. h., sie ist der identischen Darstellung $A \to A$ äquivalent.

Wir betrachten jetzt die Darstellung in dem orthogonalen Komplement $\bar{\mathfrak{H}} - \bar{\mathfrak{N}}$. Ist sie in diesem Komplement nicht identisch gleich Null, so kann man wiederum einen invarianten Teilraum auszeichnen, in dem die Darstellung $A \to \bar{A}$ der identischen Darstellung $A \to A$ äquivalent ist. Durch Wiederholung dieser Überlegung gelangt man zu dem folgenden Satz.

Theorem 2. *Jede Darstellung $A \to \bar{A}$ der Algebra I_0 ist einer direkten Summe aus identischen Darstellungen $A \to A$ und der Nulldarstellung $A \to 0$ äquivalent.*

Insbesondere folgt aus Theorem 2, daß jede irreduzible Darstellung $A \to \bar{A}$ der Algebra I_0 entweder der identischen Darstellung oder der Nulldarstellung äquivalent ist. Mit anderen Worten, die Algebra I_0 besitzt (bis auf Äquivalenz) nur eine irreduzible Darstellung, die nicht die Nulldarstellung ist.

Diese Eigenschaft ist für die Algebra I_0 charakteristisch. Man kann nämlich zeigen: Hat die Teilalgebra R der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ (bis auf Äquivalenz) nur eine irreduzible, von der Nulldarstellung verschiedene Darstellung, so stimmt R mit I_0 überein (vgl. NEUMARK [4] und ROSENBERG [1]).

3. Darstellungen der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Wir betrachten jetzt eine beliebige Darstellung $A \to \bar{A}$ der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Diese Darstellung ist gleichzeitig eine Darstellung der Algebra $I_0 \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Auf Grund von Theorem 2 ist letztere der direkten Summe identischer Darstellungen $A \to A$ und der Nulldarstellung $A \to 0$ der Algebra I_0 äquivalent. Dies bedeutet, daß der Raum $\bar{\mathfrak{H}}$ der Darstellung $A \to \bar{A}$ bis auf unitäre Äquivalenz als direkte Summe von Exemplaren $\mathfrak{H}_\alpha$ des Raumes $\mathfrak{H}$ und eines gewissen Raumes $\mathfrak{H}_0$ dargestellt werden kann, wobei sich unsere Darstellung $A \to \bar{A}$ in jedem der Räume $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}$ auf die identische Darstellung $A \to A$ und in $\mathfrak{H}_0$ auf die Nulldarstellung $A \to 0$ reduziert. Hierbei ist es natürlich möglich, daß einer der Räume $\mathfrak{H}_\alpha$ oder der Raum $\mathfrak{H}_0$ fehlen.

Wir beweisen nun: *Jeder der Räume $\mathfrak{H}_\alpha = \mathfrak{H}$ und damit auch der Raum $\mathfrak{H}_0$ ist nicht nur bezüglich der Bilder $\bar{A}$ der Elemente A des Ideals I_0, sondern auch bezüglich der Bilder der Elemente der ganzen Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ invariant.*

Es sei beispielsweise $\overline{P}'$ ein Projektionsoperator von $\overline{\mathfrak{H}}$ auf den Raum $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$. Für $\xi \in \mathfrak{H}_{\alpha_0}$ setzen wir

$$\overline{A}'\xi = \overline{P}'\overline{A}\xi.$$

Dann ist $\overline{A}'$ ein beschränkter Operator im Raum $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$. Von dem Raum $\mathfrak{H}_{\alpha_0}$ darf angenommen werden, daß er mit dem Raum $\mathfrak{H}$ übereinstimmt, d. h., man darf annehmen, daß $\mathfrak{H}$ in $\overline{\mathfrak{H}}$ eingebettet ist. Dann läßt sich $\overline{A}'$ als Operator in $\mathfrak{H}$ ansehen. Wir behaupten, daß $A = \overline{A}'$ ist. Hierzu genügt es, zu zeigen, daß die Matrizen dieser Operatoren in bezug auf das Orthonormalsystem $\{\varphi_\alpha\}$ miteinander übereinstimmen. Um dies zu erreichen, betrachten wir den Operator $P_\alpha A P_\beta = a_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}$. Dann ist $\|a_{\alpha\beta}\|$ die Matrix des Operators A in bezug auf das System $\{\varphi_\alpha\}$. Bei der Darstellung $A \to \overline{A}$ in dem Raum $\mathfrak{H}_{\alpha_0} = \mathfrak{H}$ geht dieser Operator in sich über, weil er zu I_0 gehört. Dasselbe gilt auch für die Operatoren P_α, $U_{\alpha\beta} \in I_0$. Andererseits geht der Operator $P_\alpha A P_\beta$ in den Operator $\overline{P}_\alpha \overline{A}\,\overline{P}_\beta$ über. Daher gilt $\overline{P}_\alpha \overline{A}\,\overline{P}_\beta = a_{\alpha\beta} U_{\alpha\beta}$ im Raum $\mathfrak{H}_{\alpha_0} = \mathfrak{H}$. Hieraus folgt

$$\begin{aligned}\langle \overline{A}'\varphi_\beta, \varphi_\alpha\rangle &= \langle \overline{P}'\overline{A}\varphi_\beta, \varphi_\alpha\rangle = \langle \overline{A}\varphi_\beta, \overline{P}'\varphi_\alpha\rangle = \langle \overline{A}\varphi_\beta, \varphi_\alpha\rangle\\ &= \langle \overline{A} P_\beta\varphi_\beta, P_\alpha\varphi_\alpha\rangle = \langle \overline{A}\,\overline{P}_\beta\varphi_\beta, \overline{P}_\alpha\varphi_\alpha\rangle\\ &= \langle \overline{P}_\alpha\overline{A}\,\overline{P}_\beta\varphi_\beta, \varphi_\alpha\rangle = a_{\alpha\beta}\langle U_{\alpha\beta}\varphi_\beta, \varphi_\alpha\rangle\\ &= a_{\alpha\beta}\langle\varphi_\alpha, \varphi_\alpha\rangle = a_{\alpha\beta}.\end{aligned}$$

Da aber $\langle \overline{A}'\varphi_\beta, \varphi_\alpha\rangle$ das Element $a'_{\alpha\beta}$ der Matrix des Operators $\overline{A}'$ in bezug auf das System $\{\varphi_\alpha\}$ ist, haben wir damit bewiesen, daß $A = \overline{A}'$ ist. Hieraus ergibt sich

$$\overline{P}'(\overline{A}\,\overline{B})\xi = (AB)\xi, \quad \overline{P}'\overline{A}\,\overline{P}'\overline{B}\xi = A(B\xi),$$

so daß $\overline{P}'\overline{A}(\overline{B}\xi) = \overline{P}'\overline{A}\,\overline{P}'(\overline{B}\xi)$ ist.

Mit anderen Worten, es gilt $\overline{P}'\overline{A}\eta = \overline{P}'\overline{A}\,\overline{P}'\eta$ für alle Elemente der Gestalt $\eta = \overline{B}\xi$, wobei ξ den ganzen Raum $\mathfrak{H}_{\alpha_0} = \mathfrak{H}$ und der Operator B die ganze Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ durchläuft. Wir bezeinchen mit $\overline{\mathfrak{H}}'$ die abgeschlossene lineare Hülle der Menge dieser Elemente $\overline{B}\xi$. In $\overline{\mathfrak{H}}'$ gilt die Gleichung

$$\overline{P}'\overline{A} = \overline{P}'\overline{A}\,\overline{P}'. \tag{1}$$

Wegen $\mathfrak{H}_{\alpha_0} \subset \overline{\mathfrak{H}}'$ gilt in dem Komplement $\overline{\mathfrak{H}} - \overline{\mathfrak{H}}'$ die Beziehung $\overline{P}' = 0$. Daher gilt die Gleichung (1) auch in $\overline{\mathfrak{H}} - \overline{\mathfrak{H}}'$, so daß sie im ganzen Raum $\overline{\mathfrak{H}}$ gilt. Wenden wir nun auf beide Seiten der Gleichung (1) die Involutionsoperation an und ersetzen danach A durch A^*, so erhalten wir

$$\overline{A}\,\overline{P}' = \overline{P}'\overline{A}\,\overline{P}'.$$

Hieraus folgt $\overline{P}'\overline{A} = \overline{A}\,\overline{P}'$, d. h., der Raum $\mathfrak{H}_{\alpha_0} = \mathfrak{H}$ reduziert alle Operatoren $\overline{A}$.

Die Gleichung $A = \overline{A}'$ nimmt jetzt die Gestalt

$$A\xi = \overline{P}'\overline{A}\xi = \overline{A}\,\overline{P}'\xi = \overline{A}\xi \quad \text{für} \quad \xi \in \mathfrak{H}$$

an, d. h., im Raum $\mathfrak{H} = \mathfrak{H}_{\alpha_0}$ reduziert sich die Darstellung $A \to \bar{A}$ der ganzen Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ebenfalls auf die identische Darstellung $A \to A$.

Im Raum $\mathfrak{H}_0$ gehen alle Operatoren der Algebra I_0 in den Nulloperator über. Folglich ist die Darstellung in diesem Raum gleichzeitig eine Darstellung der Quotientenalgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$.

Damit haben wir folgenden Satz bewiesen:

Theorem 3. *Jede Darstellung der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist die direkte Summe identischer Darstellungen $A \to A$ und einer Darstellung der Quotientenalgebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$.*

Ist $\mathfrak{H}$ separabel, so ist I_0 ein maximales zweiseitiges Ideal in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$ eine einfache Algebra. Daher ist jede Darstellung der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$, die von der Nulldarstellung verschieden ist, eine isomorphe Abbildung dieser Algebra in eine Algebra von Operatoren in einem HILBERTschen Raum.

Das Problem, *alle* Darstellungen der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I_0$ anzugeben, ist bis jetzt noch nicht gelöst worden. Bekannt ist lediglich eine konkrete Darstellung dieser Algebra. Sie wurde von I. W. CALKIN [1] konstruiert.

Die Ergebnisse aus §§ 17 bis 21 und § 22, Nr. 2, stammen im wesentlichen von I. M. GELFAND und NEUMARK [6] (vgl. auch NEUMARK [2]), die Ergebnisse aus § 22, Nr. 3, von NEUMARK [2] und die Ergebnisse aus § 17, Nr. 4, sowie der Spektralsatz von N. DUNFORD [1]. Hinsichtlich der Ergebnisse aus § 17, Nr. 5, sind M. K. FAGE [1] und N. DUNFORD [2] zu nennen; einige dieser Ergebnisse erhielt unabhängig von diesen I. SEGAL [1—4].

Das Theorem 5 aus § 20, Nr. 4, haben für den Fall der Gruppenalgebra einer lokal bikompakten kommutativen Gruppe unabhängig voneinander zuerst A. WEIL [1] und M. G. KREIN [7] (vgl. § 31, Nr. 4) bewiesen. Für Algebren hat ihn zuerst R. GODEMENT [7] bewiesen; in einer reduzierten Formulierung steht dieser Satz in dem Buch von L. H. LOOMIS [1]. Zu bemerken ist in diesem Zusammenhang, daß in allen Beweisen dieses Satzes der Grundgedanke derselbe ist wie bei M. G. KREIN [7]. Der von A. WEIL [1] angegebene Beweis benutzt Struktureigenschaften einer lokal bikompakten kommutativen Gruppe. Das Theorem 1 aus § 22, Nr. 1, stammt von I. W. CALKIN [1].

KAPITEL V

SPEZIELLE ALGEBREN

§ 23. Vollsymmetrische Algebren

1. Definition. Beispiele für vollsymmetrische Algebren. In § 14, Nr. 2, haben wir eine Banachsche symmetrische Algebra R mit Einselement *vollsymmetrisch* genannt, wenn es zu jedem Element $x \in R$ ein Element $(e + x^* x)^{-1}$ in R gibt.

Als Beispiel für eine vollsymmetrische Algebra kann jede Algebra $C(\mathfrak{M})$ dienen, die zu einem bikompakten Raum $\mathfrak{M}$ gehört; denn in diesem Fall ist

$$(e + x^* x)^{-1} = \frac{1}{1 + |x(M)|^2}$$

ein Element von $C(\mathfrak{M})$.

Nach § 16, Nr. 2, Theorem 2, ist jede vollständige vollreguläre kommutative Algebra R mit Einselement einer Algebra $C(\mathfrak{M})$ vollisomorph und folglich eine vollsymmetrische Algebra.

Ferner gilt:

I. *Jede abgeschlossene symmetrische Teilalgebra R der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit Einselement ist eine vollsymmetrische Algebra.*

Um dies zu beweisen, setzen wir $|A| = c$ und

$$B = \frac{1}{c^2 + 1}(c^2 1 - A^* A);$$

wegen $0 \leqq \langle A^* A \xi, \xi\rangle \leqq c^2 \langle \xi, \xi\rangle$ ist $0 \leqq \langle B\xi, \xi\rangle \leqq \frac{c^2}{c^2+1}\langle \xi, \xi\rangle$. Daraus folgt $|B| \leqq \frac{c^2}{c^2+1} < 1$, so daß also $1 - B$ ein inverses Element in R besitzt. Dann folgt aber aus der Beziehung

$$A^* A + 1 = (c^2 + 1)\left(1 - \frac{1}{c^2+1}(c^2 1 - A^* A)\right) = (c^2 + 1)(1 - B),$$

daß $A^* A + 1$ ebenfalls ein Inverses in R hat.

Jede Banachsche reduzierte Algebra mit minimaler regulärer Norm ist einer abgeschlossenen Teilalgebra von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ vollisomorph (vgl. § 18, Nr. 3, Satz 1). Deshalb gilt:

II. *Jede Banachsche reduzierte Algebra mit minimaler regulärer Norm ist eine vollsymmetrische Algebra.*

Weiter gilt:

III. *Jede maximale symmetrische kommutative Teilalgebra einer vollsymmetrischen Algebra ist wieder eine vollsymmetrische Algebra.*

Beweis. Gegeben sei eine maximale symmetrische kommutative Teilalgebra K einer vollsymmetrischen Algebra R und ein Element $x \in K$. Dann existiert in R das Element $y = (e + x^* x)^{-1}$. Da y mit allen Elementen aus K vertauschbar ist und K maximal sein sollte, ist y ein Element aus K. Das bedeutet aber, daß K vollsymmetrisch ist.

2. Spektrum. In § 8, Nr. 4, nannten wir die Gesamtheit aller komplexen Zahlen λ, für die $(x - \lambda e)^{-1}$ nicht in R enthalten ist, das *Spektrum* des Elements x von R.

Es sei R eine BANACHsche Algebra mit Einselement und x ein Element aus R.

I. *Ist $|\lambda| > |x|$, so gehört λ nicht zum Spektrum von x.*

In diesem Fall gilt nämlich $x - \lambda e = -\lambda \left(e - \frac{1}{\lambda} x\right)$ mit $\left|\frac{1}{\lambda} x\right| < 1$, so daß $(x - \lambda e)^{-1} = -\lambda^{-1} \left(e - \frac{1}{\lambda} x\right)^{-1}$ in R liegt.

II. *Liegt x^{-1} in R und ist $|\lambda|^{-1} > |x^{-1}|$, so gehört λ nicht zum Spektrum von x.*

Dieser Satz folgt aus dem vorhergehenden, denn es ist

$$(x - \lambda e)^{-1} = -x^{-1}(x^{-1} - \lambda^{-1} e)^{-1} \lambda^{-1}.$$

III. *Besteht das Spektrum eines hermiteschen Elements x einer* BANACH*schen symmetrischen Algebra R mit Einselement nur aus der Null, so gehört x zum reduzierenden Ideal dieser Algebra.*

Beweis. Es sei R_1 eine maximale kommutative symmetrische Teilalgebra von R, und es sei $x \in R_1$. Das Spektrum von x bezüglich R_1 stimmt mit dem Spektrum von x bezüglich R überein (vgl. § 10, Nr. 1, Satz V) und besteht folglich nur aus der Null. Dann gehört x allen maximalen Idealen von R_1 und demnach auch dem Radikal von R_1 an. Es ist also

$$\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|x^* x|^n} = 0$$

(vgl. § 10, Nr. 3), und die Ungleichung (3) aus § 10, Nr. 4, zeigt, daß x zum reduzierenden Ideal von R gehört.

IV. *Besteht das Spektrum eines hermiteschen Elements x der* BANACH*schen reduzierten Algebra R nur aus der Null, so ist $x = 0$.*

In diesem Fall ist nämlich das reduzierende Ideal gleich (0) und folglich $x = 0$.

Wir setzen jetzt voraus, daß R eine vollsymmetrische Algebra ist.

V. *Jedes hermitesche Element einer vollsymmetrischen Algebra hat ein reelles Spektrum.*

Beweis. Es sei x ein hermitesches Element. Wir setzen $y = \frac{1}{\tau} x$. Nach Definition existiert dann das Element

$$(e + y^* y)^{-1} = \left(e + \frac{1}{|\tau|^2} x^2\right)^{-1} = |\tau|^2 (x^2 + |\tau|^2 e)^{-1}$$

und folglich auch das Element $z = (x^2 + |\tau|^2 e)^{-1}$. Hieraus folgt

$$e = z(x^2 + |\tau|^2 e) = z(x + i|\tau|e)(x - i|\tau|e),$$

d. h., es existieren ebenfalls die Elemente

$$(x + i|\tau|e)^{-1} \quad \text{und} \quad (x - i|\tau|e)^{-1}$$

für jedes $\tau \neq 0$.

Es sei jetzt $\lambda = \sigma + i\tau$ eine beliebige komplexe Zahl ($\tau \neq 0$). Ist x ein hermitesches Element, so ist $x - \sigma e$ ebenfalls hermitesch. Also existiert das Element

$$(x - \sigma e - i\tau e)^{-1} = (x - \lambda e)^{-1}.$$

Somit gibt es kein komplexes λ, das zum Spektrum des hermiteschen Elements x gehört, d. h., das Spektrum ist reell.

VI. *In einer vollsymmetrischen Algebra besitzt jedes Element der Form $x^* x$ ein reelles nichtnegatives Spektrum.*

Beweis. Da $x^* x$ ein hermitesches Element ist, muß sein Spektrum reell sein. Es sei $\lambda > 0$. Wir setzen $y = \frac{1}{\sqrt{\lambda}} x$. Dann existiert

$$(y^* y + e)^{-1} = \left(\frac{1}{\lambda} x^* x + e\right)^{-1} = \lambda (x^* x + \lambda e)^{-1},$$

so daß also die negative Zahl $-\lambda$ nicht dem Spektrum des Elements $x^* x$ angehört.

Es sei jetzt R eine reduzierte vollsymmetrische Algebra. Mit P und P^+ bezeichnen wir die Gesamtheit aller hermiteschen Elemente der Algebra R mit nichtnegativem bzw. positivem Spektrum.

VII. *Jedes Element $x \in P^+$ läßt sich in der Form $x = y^2$ mit $y \in P^+$ darstellen.*

Beweis. Wir bezeichnen mit K eine maximale kommutative Teilalgebra der Algebra R, die x enthält. Das Spektrum von x bezüglich K ist positiv, so daß es genügt, Theorem 7 aus § 11, Nr. 6, und seine Folgerung auf das Element $x \in K$ und den auf der positiven Halbachse positiven Zweig der analytischen Funktion $f(\zeta) = \sqrt{\zeta}$ anzuwenden.

VIII. *Für $x \in P$ und $\lambda \geqq 0$ ist $\lambda x \in P$. Ist jedoch $x \in P$, $x \neq 0$ und $\lambda < 0$, so ist $\lambda x \notin P$.*

Bei Multiplikation des Elements x mit der Zahl λ werden alle Zahlen des Spektrums mit λ multipliziert. Ist aber $x \in P$ und $\lambda x \in P$ für ein gewisses $\lambda < 0$, so besteht das Spektrum von x nur aus der Null, und folglich ist $x = 0$ wegen Satz IV.

IX. *Aus* $x_1, x_2 \in P$ *folgt* $x_1 + x_2 \in P$.

Man braucht hier nur zu zeigen, daß $(x_1 + x_2 + \lambda e)^{-1}$ für $\lambda > 0$ existiert.

Es sei $0 < \lambda_1 < \lambda$. Wir setzen $\lambda_2 = \lambda - \lambda_1$; dann ist auch $0 < \lambda_2 < \lambda$. Da $x_1 + \lambda_1 e$ und $x_2 + \lambda_2 e$ zu P^+ gehören, lassen sich die Elemente $x_1 + \lambda_1 e$, $x_2 + \lambda_2 e$ wegen Satz VII in der Form

$$x_1 + \lambda_1 e = y_1^2, \quad y_1 \in P^+, \qquad x_2 + \lambda_2 e = y_2^2, \quad y_2 \in P^+,$$

darstellen. Es existiert

$$z = (x_1 + \lambda_1 e)^{-1}$$

wegen $x_1 \in P$, und wir erhalten

$$y_1(y_1 z) = (x_1 + \lambda_1 e) z = e;$$

infolgedessen existiert y_1^{-1}.

Wir schreiben $x_1 + x_2 + \lambda e$ in der Form

$$x_1 + x_2 + \lambda e = x_1 + \lambda_1 e + x_2 + \lambda_2 e = y_1^2 + y_2^2 = y_1^2(e + y_1^{-2} y_2^2).$$

Da y_1^{-2} existiert, genügt es zu zeigen, daß $(e + y_1^{-2} y_2^2)^{-1}$ existiert. Dazu braucht man nur zu beweisen, daß das Spektrum von $y_1^{-2} y_2^2$ nichtnegativ ist. Dies folgt aber aus der Beziehung

$$y_1^{-2} y_2^2 = y_1^{-1}\left((y_2 y_1^{-1})^* (y_2 y_1^{-1})\right) y_1;$$

denn infolge Satz VI ist das Spektrum von $(y_2 y_1^{-1})^* (y_2 y_1^{-1})$ nichtnegativ, und die Abbildung $x \to y_1^{-1} x y_1$ ändert das Spektrum von x nicht. Damit ist Satz IX bewiesen.

3. Fortsetzungssätze. Wir bezeichnen mit H die Gesamtheit aller hermiteschen Elemente der vollsymmetrischen reduzierten Algebra R. Dann ist H ein reeller BANACHscher Raum.

Die Sätze VIII und IX aus Nr. 2 sagen aus, daß P *ein Kegel im Raum* H *ist* (vgl. § 3, Nr. 10).

Offenbar enthält P das Einselement e der Algebra R. Wir zeigen, daß e ein inneres Element des Kegels P ist.

Es sei $x = e + y$ mit $y \in H$ und $|y| < 1$. Aus dem Beweis von Satz I in § 10, Nr. 4, folgt, daß sich x in der Form $x = x_1^2$ mit $x_1 \in H$ darstellen läßt. Deshalb ist $x \in P$. Somit gehören alle Elemente x aus H, die der Bedingung $|e - x| < 1$ genügen, zum Kegel P. Folglich ist e ein inneres Element von P.

I. *Für jedes abgeschlossene Linksideal* I_l *einer vollsymmetrischen Algebra* R *existiert ein positives Funktional* $f(x)$ *mit der Eigenschaft*

$$f(e) = 1, \qquad f(x^* x) = 0 \quad \textit{für alle} \quad x \in I_l.$$

Beweis. Wir setzen zuerst voraus, daß R auch reduziert ist. Es sei $I_l^{(H)}$ die Gesamtheit aller hermiteschen Elemente von I_l. Offenbar ist $I_l^{(H)}$ ein abgeschlossener Teilraum des Raumes H. Da R eine reduzierte Algebra ist, muß P ein Kegel in H mit dem inneren Punkt e sein. Wir bezeichnen mit H' die Gesamtheit aller Elemente der Form $\lambda e + y$, wobei $y \in I_l^{(H)}$ und λ eine

reelle Zahl ist. H' ist Teilraum von H. Wir setzen auf H'

$$f(\lambda e + y) = \lambda,$$

insbesondere $f(e) = 1$ und $f(y) = 0$ für $y \in I_l^{(H)}$. Das so erhaltene Funktional ist für $x \in H' \cap P$ nichtnegativ; denn für $x \in H' \cap P$ ist

$$x - \lambda e = y \in I_l^{(H)} \subset I_l,$$

und folglich existiert $(x - \lambda e)^{-1}$ nicht. Dies kann aber nicht eintreten für $\lambda < 0$, denn es ist $x \in P$. Also muß $\lambda \geqq 0$ sein, d. h. $f(x) = f(y + \lambda e) = \lambda \geqq 0$.

Nach einem Satz von Krein (vgl. § 3, Nr. 10, Theorem 2) läßt sich das Funktional $f(x)$ zu einem reellen Funktional im ganzen Raum H derart fortsetzen, daß es auf dem Kegel P nichtnegative Werte annimmt.

Jedes Element x aus R können wir in der Form

$$x = x_1 + i x_2, \qquad x_1, x_2 \in H,$$

darstellen. Wir setzen

$$f(x) = f(x_1) + i f(x_2).$$

Dabei ist $f(x)$ ein positives Funktional; denn da $x^* x \in P$ ist, folgt $f(x^* x) \geqq 0$; weiter ist $x^* x \in I_l^{(H)}$ für $x \in I_l$ und folglich $f(x^* x) = 0$. Aus der Schwarzschen Ungleichung $|f(x)|^2 \leqq f(e) f(x^* x)$ folgt dann, daß auch $f(x) = 0$ ist.

Es sei jetzt R eine beliebige vollsymmetrische Algebra, I ihr reduzierendes Ideal, $R' = R/I$ die entsprechende reduzierte Algebra und I_l' das Bild des Ideals I_l bei dem natürlichen Homomorphismus von R auf R'. Offenbar ist auch R' vollsymmetrisch. Wie schon bewiesen wurde, existiert ein positives Funktional $f'(x)$ in R', das auf I_l' gleich Null und für e' gleich Eins ist. Dann genügt das Funktional $f(x) = f'(x')$ für $x \in x'$ allen gestellten Forderungen.

II. *Das Radikal einer vollsymmetrischen Algebra stimmt mit dem reduzierenden Ideal überein.*

Beweis. Auf Grund von § 18, Nr. 2, Satz VII, ist das Radikal stets in dem reduzierenden Ideal enthalten. Deshalb brauchen wir nur zu zeigen, daß jedes Element des reduzierenden Ideals dem Radikal angehört. Es sei x_0 ein Element derart, daß

$$f(x_0^* x_0) = 0$$

für alle positiven Funktionale f gilt. Wir beweisen, daß x_0 dem Radikal angehört. Da das Radikal gleich dem Durchschnitt aller maximalen Linksideale ist (vgl. § 7, Nr. 5, Satz I), genügt es nachzuweisen, daß x_0 allen maximalen Linksidealen angehört.

Es sei M_l ein maximales Linksideal. Nach Satz I gibt es dann ein positives Funktional $f_0(x)$ mit

$$f_0(e) = 1 \quad \text{und} \quad f_0(x^* x) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in M_l.$$

Andererseits bildet die Gesamtheit aller Elemente x, die der Bedingung $f_0(x^* x) = 0$ genügen, ein Linksideal (vgl. § 17, Nr. 3), das M_l enthält. Da dieses Linksideal maximal ist, stimmt es mit M_l überein. Mit anderen Worten, die Gleichung $f_0(x^* x) = 0$ gilt nur für Elemente $x \in M_l$. Insbesondere folgt aus

der Gleichung $f_0(x_0^* x_0) = 0$, daß x_0 zu M_l gehört. Die Behauptung ist damit bewiesen.

Aus Satz II folgt, daß *die vollsymmetrischen halbeinfachen Algebren mit den vollsymmetrischen reduzierten Algebren übereinstimmen.*

III. *Es sei R_1 eine abgeschlossene symmetrische Teilalgebra einer vollsymmetrischen Algebra R. Ferner enthalte R_1 das Einselement. Dann läßt sich jedes positive Funktional $f_0(x)$ über R_1 zu einem positiven Funktional über R fortsetzen. Ist außerdem das Funktional $f_0(x)$ über R_1 unzerlegbar, so kann es zu einem unzerlegbaren Funktional über R fortgesetzt werden.*

Beweis. Wir bezeichnen mit H_1 und H die Gesamtheit aller hermiteschen Elemente der Algebren R_1 bzw. R. Dann ist H_1 ein abgeschlossener Teilraum in H. Das positive Funktional $f(x)$ über R_1 läßt sich als lineares Funktional über H_1 auffassen, das für alle Elemente aus $P \cap H_1$ nichtnegative Werte annimmt. Auf Grund des erwähnten Satzes von Krein kann man dann $f(x)$ zu einem linearen Funktional über H fortsetzen, das auf allen Elementen von P nichtnegative Werte annimmt. Jetzt braucht man nur die gleichen Überlegungen wie am Ende des Beweises von Satz I anzustellen.

Nun sei das Funktional $f_0(x)$ über R_1 irreduzibel. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit kann man $f_0(e) = 1$ annehmen. Mit K bezeichnen wir die Gesamtheit aller positiven Funktionale $f(x)$ über R, die über R_1 mit $f_0(x)$ übereinstimmen. Offenbar ist K eine schwach abgeschlossene konvexe Menge in dem zu H konjugierten Raum H'. Nach dem Satz von Krein und Milman (§ 3, Nr. 9) enthält K mindestens einen extremalen Punkt, den wir mit $F_0(x)$ bezeichnen wollen.

Wir werden zeigen, daß $F_0(x)$ ein unzerlegbares Funktional über R ist. Das Funktional $F_0(x)$ lasse sich in der Form

$$F_0(x) = \lambda F_1(x) + (1 - \lambda) F_2(x) \tag{1}$$

darstellen, wobei $0 < \lambda < 1$ sei und $F_1(x)$, $F_2(x)$ normierte[1]) positive Funktionale über R sein mögen. Betrachtet man (1) nur für Elemente $x \in R_1$, so erhält man insbesondere

$$f_0(x) = \lambda f_1(x) + (1 - \lambda) f_2(x);$$

dabei sind $f_1(x)$ und $f_2(x)$ die Einschränkungen der Funktionale $F_1(x)$ bzw. $F_2(x)$ auf R_1. Da aber $f_0(x)$ unzerlegbar ist, müssen die Funktionale f_1 und f_2 Vielfache von f_0 sein. Wegen der Normiertheit von f_1 und f_2 folgt

$$f_1(x) = f_2(x) = f_0(x)$$

über R_1, d. h., über R_1 ist $F_1(x) = F_2(x) = f_0(x)$, also $F_1, F_2 \in K$.

Dann läßt sich aus (1) ablesen, daß F_1 und F_2 Vielfache von F_0 sind, da F_0 extremaler Punkt von K ist. Damit ist die Unzerlegbarkeit von F_0 bewiesen.

Es sei R_1 eine Teilalgebra von R, und es seien $x \to A_x$, $x \to B_x$ Darstellungen der Algebren R_1 bzw. R in den Räumen $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}$. Die Darstellung

---

[1]) Wir erinnern daran, daß wir ein positives Funktional $f(x)$ *normiert* nennen, wenn $f(e) = 1$ ist (vgl. § 19, Nr. 4).

$x \to B_x$ nennen wir eine *Erweiterung* der Darstellung $x \to A_x$, wenn $\mathfrak{H}_1 \subset \mathfrak{H}$ ist und für alle $x \in R_1$ und $\xi \in \mathfrak{H}_1$

$$A_x \xi = B_x \xi$$

gilt.

Theorem 1. *Es sei R_1 eine abgeschlossene symmetrische Teilalgebra einer vollsymmetrischen Algebra R, und R_1 enthalte das Einselement. Dann läßt sich jede Darstellung von R_1 zu einer Darstellung der ganzen Algebra R erweitern, wobei jede irreduzible Darstellung von R_1 zu einer irreduziblen Darstellung von R erweitert werden kann.*

Beweis. Es sei zunächst $x \to A_x$ eine zyklische Darstellung der Algebra R_1 und ξ_0 ein zyklischer Vektor von $\mathfrak{H}_1$. Dann ist $f_0(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$ ein positives Funktional über R_1. Nach Satz III kann man es zu einem positiven Funktional $F_0(x)$ über R fortsetzen, welches die zyklische Darstellung $x \to B_x$ der Algebra R in einem gewissen Raum $\mathfrak{H}$ bestimmt. Dabei ist $F_0(x) = \langle B_x \eta_0, \eta_0 \rangle$, wobei η_0 ein zyklisches Element in $\mathfrak{H}$ ist (vgl. § 17, Nr. 3, Theorem 2).

Der Raum $\mathfrak{H}_1$ ist die abgeschlossene Hülle der Menge aller Elemente $A_x \xi_0$, $x \in R_1$, denn ξ_0 ist ein zyklisches Element. Jedem Element $A_x \xi_0$ soll das Element $B_x \eta_0$ entsprechen. Diese Zuordnung bildet $\mathfrak{H}_1$ auf einen Teilraum in $\mathfrak{H}$ isometrisch ab; denn wegen $F_0(x) = f_0(x)$ für $x \in R_1$ gilt

$$\langle A_x \xi_0, A_x \xi_0 \rangle = f_0(x^* x) = F_0(x^* x) = \langle B_x \eta_0, B_x \eta_0 \rangle \quad \text{für} \quad x \in R_1.$$

Identifizieren wir $\mathfrak{H}_1$ mit seinem Bild in $\mathfrak{H}$, so wird $\mathfrak{H}_1$ Teilraum von $\mathfrak{H}$, und ξ_0 stimmt mit η_0 und $A_x \xi$ mit $B_x \xi$ für alle $\xi \in \mathfrak{H}$, $x \in R_1$ überein. Somit ist für die zyklische Darstellung $x \to A_x$ der erste Teil des Satzes bewiesen. Ist die Darstellung $x \to A_x$ nicht zyklisch, so ist sie die direkte Summe zyklischer Darstellungen. Erweitern wir jede dieser Darstellungen und bilden wir die direkte Summe der erhaltenen Erweiterungen, so erhalten wir eine Erweiterung der ursprünglichen Darstellung $x \to A_x$.

Ist die Darstellung $x \to A_x$ der Algebra R_1 irreduzibel, so ist $f_0(x)$ ein unzerlegbares Funktional. Wegen Satz III kann dann auch das Funktional $F_0(x)$ unzerlegbar gewählt werden, und die entsprechende Darstellung $x \to B_x$ der Algebra R ist ebenfalls irreduzibel.

Wir nennen das positive Funktional $f(x)$ über der Algebra R *eindimensional*, wenn für alle $x, y \in R$

$$f(xy) = f(x) f(y)$$

gilt.

Jedes eindimensionale Funktional erzeugt eine eindimensionale und folglich irreduzible Darstellung einer Algebra.

In der Tat, ist $x \to A_x$ die durch das Funktional erzeugte Darstellung, so gilt

$$|f(y^* x)| = |\langle A_x \xi_0, A_y \xi_0 \rangle| \leqq |A_x \xi_0| \, |A_y \xi_0| = (\langle A_{x^* x} \xi_0, \xi_0 \rangle)^{\frac{1}{2}} (\langle A_{y^* y} \xi_0, \xi_0 \rangle)^{\frac{1}{2}}$$

$$= (f(x^* x))^{\frac{1}{2}} (f(y^* y))^{\frac{1}{2}} = |f(y^*)| \, |f(x)|.$$

Da nach Voraussetzung $f(y^*x) = f(y^*) f(x)$ ist, gilt hier überall das Gleichheitszeichen. Das ist aber nur dann möglich, wenn die Vektoren $A_x \xi_0$ und $A_y \xi_0$ proportional sind. Folglich ist der Raum der Darstellung eindimensional. Somit ist $A_x \xi_0 = \varphi(x) \xi_0$, wobei $\varphi(x)$ ein Skalar ist. Daraus ergibt sich

$$f(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle = \varphi(x) \langle \xi_0, \xi_0 \rangle = \varphi(x)$$

und

$$A_x \xi_0 = f(x) \xi_0.$$

Wenden wir Theorem 1 auf ein eindimensionales Funktional an, so erhalten wir die

Folgerung 1. *Es seien R und R_1 die Algebren aus Theorem 1. Ist $f(x)$ ein eindimensionales Funktional über R_1, so existieren eine irreduzible Darstellung $x \to A_x$ der Algebra R und ein Vektor ξ_0 im Raum $\mathfrak{H}$ dieser Darstellung derart, daß*

$$A_x \xi_0 = f(x) \xi_0$$

für alle Elemente $x \in R_1$ gilt.

Es sei insbesondere R_1 eine maximale symmetrische kommutative Teilalgebra einer vollsymmetrischen Algebra R. Nach Nr. 1, Satz III, ist R_1 ebenfalls vollsymmetrisch. Die unzerlegbaren positiven Funktionale über R_1 haben die Form $f(x) = x(M)$, wobei M ein maximales Ideal in R_1 ist (vgl. die Bemerkung auf Seite 284). Deshalb sind alle unzerlegbaren positiven Funktionale über R_1 eindimensional.

Jedes normale Element $x_0 \in R$ läßt sich in eine maximale symmetrische kommutative Teilalgebra von R einbetten (vgl. § 10, Nr. 1), und infolge § 10, Nr. 1, Satz V, stimmt das Spektrum von x_0 in R mit dem Spektrum in R_1 überein. Ist aber λ_0 ein Punkt des Spektrums von x_0, so gilt $\lambda_0 = x_0(M_0)$, wobei M_0 ein maximales Ideal von R_1 ist. Wenden wir die Folgerung 1 auf die Algebra R_1, das eindimensionale Funktional $f_0(x) = x(M_0)$ und das Element $x_0 \in R_1$ an, so erhalten wir die

Folgerung 2. *Ist λ_0 ein Punkt des Spektrums des normalen Elements x_0 der vollsymmetrischen Algebra R, so gibt es eine irreduzible Darstellung $x \to A_x$ von R und einen Vektor ξ_0 im Raum dieser Darstellung mit*

$$A_{x_0} \xi_0 = \lambda_0 \xi_0.$$

Somit entspricht jedem Punkt eines (sogar kontinuierlichen) Spektrums ein Eigenvektor im Raum einer irreduziblen Darstellung.

Der Folgerung 1 kann man eine einfache quantenmechanische Deutung geben.

Jedes quantenmechanische System S bestimmt auf natürliche Weise eine Banachsche symmetrische Algebra, nämlich die Algebra aller beschränkten Operatoren, welche die Größen in diesem System definieren. Als abgeschlossene Teilalgebra der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist sie eine vollsymmetrische Algebra (vgl. Nr. 1). Ein positives Funktional $f(x)$ in dieser Algebra wird durch einen Vektor ξ_0 bestimmt: $f(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle$, d. h. durch einen gewissen Zustand des Systems S, wobei $f(x)$ die mathematische Erwartung der Größe x in diesem Zustand ist.

Ist $f(x)$ ein eindimensionales Funktional über der Teilalgebra R_1, so besagt die Folgerung 1, daß im Zustand ξ_0 aus dem Raum $\mathfrak{H}$ einer irreduziblen Darstellung von R alle Größen x aus R_1 den Wert $f(x)$ haben.

4. Kriterium für die Vollsymmetrie.

Theorem 2 (D. A. Raikow [5]). *Eine* Banach*sche symmetrische Algebra R mit Einselement ist genau dann vollsymmetrisch, wenn für jedes Element $x \in R$ die Gleichung*

$$\sup f(x^* x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(x^* x)^n|} \tag{1}$$

gilt, wobei auf der linken Seite von (1) *die obere Grenze über alle positiven Funktionale zu bilden ist, die der Bedingung $f(e) = 1$ genügen.*

Beweis. Es sei R eine vollsymmetrische Algebra und $x \in R$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{A}$ eine beliebige maximale symmetrische kommutative Teilalgebra von R, die das Element $x^* x$ enthält. Nach Nr. 1, Satz III, ist $\mathfrak{A}$ vollsymmetrisch, und $x^* x$ nimmt auf allen maximalen Idealen M von $\mathfrak{A}$ nichtnegative Werte an. Da

$$\max (x^* x)(M) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(x^* x)^n|}$$

ist, existiert in $\mathfrak{A}$ ein maximales Ideal M_0 mit

$$(x^* x)(M_0) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(x^* x)^n|}.$$

Wir setzen für $y \in \mathfrak{A}$

$$f_0(y) = y(M_0).$$

Aus der Vollsymmetrie von $\mathfrak{A}$ folgt, daß $f_0(y)$ ein positives Funktional über $\mathfrak{A}$ ist, das man nach Nr. 3, Satz III, zu einem positiven Funktional $f_1(y)$ über ganz R fortsetzen kann. Dann ist

$$f_1(x^* x) = f_0(x^* x) = \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(x^* x)^n|}$$

und folglich

$$\sup_f f(x^* x) \geqq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(x^* x)^n|}.$$

Andererseits ergibt sich aus § 10, Nr. 4 (3) für $f(e) = 1$

$$f(x^* x) \leqq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(x^* x)^n|}$$

oder

$$\sup_f f(x^* x) \leqq \lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{|(x^* x)^n|},$$

womit die Gleichung (1) bewiesen ist.

Wir nehmen jetzt an, daß in R die Gleichung (1) erfüllt ist, und werden beweisen, daß R eine vollsymmetrische Algebra ist. Nach § 18, Nr. 3, Theorem 2, ist die linke Seite von (1) das Quadrat der minimalen regulären Norm von x. Diese Norm[1]) bezeichnen wir mit $|x|_0$. Dann gilt für jedes positive Funktional φ die Ungleichung

$$\varphi(x^* x) \leqq \varphi(e) |x^* x|_0. \tag{2}$$

[1]) Wir erinnern daran, daß $|x|_0 = 0$ auch für $x \neq 0$ sein kann, so daß $|x|_0$ in Wirklichkeit die Norm in der reduzierten Algebra ist.

Wir zeigen, daß für jedes positive Funktional f

$$f(x^*xx^*x) \leqq f(x^*x)\,|x^*x|_0 \tag{3}$$

ist. Für $f(x^*xx^*x) = 0$ ist die Behauptung trivial; also nehmen wir $f(x^*xx^*x) > 0$ an. Dann ist

$$f(x^*xx^*x) = f\big((xx^*x)^*x\big) \leqq \sqrt{f(x^*xx^*xx^*x)\,f(x^*x)}\,. \tag{4}$$

Andererseits erhalten wir

$$f(x^*xx^*xx^*x) \leqq f(x^*xx^*x)\,|x^*x|_0,$$

wenn wir die Ungleichung (2) auf das positive Funktional

$$\varphi(y) = f(x^*x\,y\,x^*x)$$

anwenden. Setzen wir die letzte Ungleichung in (4) ein, so folgt

$$f(x^*xx^*x) \leqq \sqrt{f(x^*xx^*x)\,|x^*x|_0 f(x^*x)},$$

woraus sich (3) ergibt.

Wir müssen noch zeigen, daß für jedes $x \in R$ das Element $(e + x^*x)^{-1}$ existiert. Hierzu schreiben wir formal

$$\begin{aligned}(e + x^*x)^{-1} &= \big((|x^*x|_0 + 1)e - (|x^*x|_0 e - x^*x)\big)^{-1}\\ &= \frac{1}{|x^*x|_0 + 1}\left(e - \frac{|x^*x|_0 e - x^*x}{|x^*x|_0 + 1}\right)^{-1}\\ &= \frac{1}{|x^*x|_0 + 1}\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{|x^*x|_0 e - x^*x}{|x^*x|_0 + 1}\right)^n.\end{aligned} \tag{5}$$

Das Element $(e + x^*x)^{-1}$ existiert, wenn die Reihe (5) in R im Sinne der Norm absolut konvergiert.

Wir setzen $y = |x^*x|_0 e - x^*x$. Dann ist

$$|y|_0 = \sqrt{\sup_{f(e)=1} f(y^*y)} \leqq |x^*x|_0; \tag{6}$$

denn aus (3) folgt

$$\begin{aligned} f(y^*y) &= f(|x^*x|_0^2 e - 2|x^*x|_0 x^*x + x^*xx^*x)\\ &= |x^*x|_0^2 - 2|x^*x|_0 f(x^*x) + f(x^*xx^*x)\\ &\leqq |x^*x|_0^2 - 2|x^*x|_0 f(x^*x) + |x^*x|_0 f(x^*x)\\ &= |x^*x|_0^2 - |x^*x|_0 f(x^*x) \leqq |x^*x|_0^2\end{aligned}$$

und hieraus (6). Da nach Voraussetzung $|y|_0 = \lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y^n|}$ ist, läßt sich (6) in der Form

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|y^n|} \leqq |x^*x|_0$$

oder

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(|x^*x|_0 e - x^*x)^n|} \leqq |x^*x|_0$$

schreiben. Daraus ergibt sich für $n \geqq n_0$

$$|(|x^*x|_0 e - x^*x)^n| < \left(|x^*x|_0 + \frac{1}{2}\right)^n,$$

und folglich ist

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} \left|\left(\frac{|x^*x|_0 e - x^*x}{|x^*x|_0 + 1}\right)^n\right| \leqq \sum_{n=n_0}^{\infty} \left(\frac{|x^*x|_0 + \frac{1}{2}}{|x^*x|_0 + 1}\right)^n.$$

Die Reihe in (5) ist also gleichmäßig konvergent, womit die Vollsymmetrie von R bewiesen ist.

§ 24. Vollreguläre Algebren

1. Eigenschaften vollregulärer Algebren. Wir erinnern zunächst daran, daß wir eine symmetrische normierte Algebra R *vollregulär* nennen, wenn für alle $x \in R$

$$|x^*x| = |x|^2 \tag{1}$$

gilt (vgl. § 16, Nr. 1). Vollreguläre Algebren sind beispielsweise die Algebra $C(\mathfrak{M})$ aller auf dem bikompakten Raum $\mathfrak{M}$ stetigen Funktionen und die Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ aller im Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$ beschränkten linearen Operatoren.

I. *Jede vollreguläre Algebra ist halbeinfach.*

Denn ist x ein Element des Radikals einer solchen Algebra, so gilt (vgl. § 10, Nr. 3)

$$0 = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|x^*x|^n} = |x^*x| = |x|^2$$

und folglich $x = 0$.

Insbesondere gilt:

II. *Jede symmetrische Teilalgebra von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist halbeinfach.*

Nun sei h ein hermitesches Element einer vollständigen vollregulären Algebra R und $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene kommutative symmetrische, das Element h enthaltende Teilalgebra von R. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine vollständige vollreguläre kommutative Algebra und daher einer Algebra $C_0(T)$, die zu einem lokal bikompakten Raum T gehört, vollisomorph (vgl. § 16, Nr. 2). Die Funktion $h(t)$, die dem Element h bei diesem Isomorphismus entspricht, nennen wir die *Funktionaldarstellung* von h und schreiben $h \underset{\mathfrak{A}}{\sim} h(t)$. Diese Funktionaldarstellung hängt von der Wahl der das Element h enthaltenden Algebra $\mathfrak{A}$ ab. Jedoch gilt in jedem Fall

$$|h| = \sup_{t\in T} |h(t)|.$$

Ferner ist $h(t)$ stets eine reellwertige Funktion.

Lemma 1. *Ist h ein hermitesches Element einer vollständigen vollregulären Algebra R, so besitzt h^2 in R ein quasiinverses Element $(h^2)'$ mit*

$$|(h^2)'| = \frac{|h|^2}{1+|h|^2}. \tag{2}$$

Beweis. Es sei $h(t)$ die Funktionaldarstellung von h, die einer abgeschlossenen kommutativen symmetrischen Teilalgebra $\mathfrak{A} \subset R$ entspricht. Dann ist die Funktion $g(t) = -\frac{h^2(t)}{1+h^2(t)}$ stetig und verschwindet im Unendlichen. Folglich ist $g(t) \in C_0(T)$. Dies bedeutet, daß in $\mathfrak{A}$ das Element $g \underset{\mathfrak{A}}{\sim} g(t)$ existiert. Aus der Beziehung $h^2(t) + g(t) + h^2(t)g(t) = 0$ ergibt sich, daß g Quasiinverses von h^2 ist. Da die Funktion $\frac{x}{1+x}$, $0 \leqq x \leqq |h|^2$, im Intervall $[0, |h|^2]$ für $x = |h|^2$ ihren größten Wert annimmt, ist

$$|(h^2)'| = |g| = \sup_{t \in T} |g(t)| = \frac{|h|^2}{1+|h|^2}.$$

Lemma 2. *Es sei x ein Element einer kommutativen, im allgemeinen unvollständigen normierten Algebra R. Besitzt das Bild von x für jedes abgeschlossene maximale reguläre Ideal M in R bei dem natürlichen Homomorphismus $R \to R/M$ ein Quasiinverses in R/M, so existiert in der vollständigen Hülle $\tilde{R}$ von R ein Quasiinverses von x.*

Beweis. Gäbe es in $\tilde{R}$ kein Quasiinverses von x, so besäße $\tilde{R}$ ein maximales reguläres Ideal M', für das $-x$ Einselement wäre (vgl. § 7, Nr. 4, Satz V und Satz VII). Dann wäre $M = M' \cap R$ ein abgeschlossenes maximales reguläres Ideal in R, und entgegen unserer Annahme hätte das Bild $\tilde{x}$ von x bei dem Homomorphismus $R \to R/M$ kein Quasiinverses in R/M.

Theorem 1. *Es sei $C_0(T)$ die Algebra aller stetigen und im Unendlichen verschwindenden Funktionen $x = x(t)$ über einem lokal bikompakten Raum T. Dann ist jede Norm $|x|_1$ in $C_0(T)$, bezüglich welcher $C_0(T)$ eine (vollständige oder unvollständige) normierte Algebra ist, mindestens gleich der Norm*

$$|x| = \sup_{t \in T} |x(t)|.$$

Beweis. Die maximalen regulären Ideale in $C_0(T)$, die bezüglich der Norm $|x|_1$ abgeschlossen sind, bilden einen Teilraum S von T. Es genügt zu zeigen, daß S in T dicht ist; denn dann ist

$$|x|_1 \geqq \sup_{t \in S} |x(t)| = \sup_{t \in T} |x(t)| = |x|.$$

Wir nehmen an, S sei in T nicht dicht. Dann gibt es in T eine offene Menge U, die S nicht schneidet, und es existiert in $C_0(T)$ eine Funktion $x(t)$, die auf einer offenen Menge $V \subset U$ gleich -1 und überall auf S ungleich -1 ist. Nach Lemma 2 besitzt x in der vollständigen Hülle von $C_0(T)$ bezüglich der Norm $|x|_1$ ein quasiinverses Element z. Andererseits läßt sich eine stetige Funktion $y(t) \not\equiv 0$ mit $y + xy = 0$ konstruieren. Dazu braucht man nur

$y \neq 0$ auf einer in V enthaltenden Menge und $y = 0$ auf der Komplementärmenge von V zu setzen. Multipliziert man beide Seiten der Gleichung $x + z + xz = 0$ mit y, so ergibt sich $xy + z(y + xy) = 0$, also $xy = 0$. Betrachtet man dann die beiden Gleichungen $y + xy = 0$ und $xy = 0$, so kommt man zu dem Schluß, daß entgegen der Voraussetzung $y = 0$ ist. Folglich ist S in T dicht und das Theorem bewiesen.

Theorem 1 zeigt, daß der Vorrat an Funktionen der Algebra $C_0(T)$ in $C_0(T)$ eindeutig eine minimale Norm definiert.

Folgerung. *Es sei R eine vollständige vollreguläre Algebra, I ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal von R und $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene, von einem hermiteschen Element erzeugte Teilalgebra von R, und es sei $J = I \cap \mathfrak{A}$. Dann ist die natürliche Abbildung von $\mathfrak{A}/J$ in R/I isometrisch.*

Beweis. Nach der Bemerkung am Schluß von § 16, Nr. 2, ist $\mathfrak{A}/J$ einem gewissen $C_0(T)$ vollisomorph. Die natürliche Abbildung $\mathfrak{A}/J$ in R/I ergibt sich, wenn jeder Klasse $\xi = a + J$, $a \in \mathfrak{A}$, die Klasse $\xi' = a + I$ entspricht. Man sieht sofort, daß diese Abbildung ein Isomorphismus ist. Wegen $J \subset I$ ist

$$|\xi| = \inf_{x \in J} |a + x| \geqq \inf_{x \in I} |a + x| = |\xi'|. \tag{3}$$

Setzen wir $|\xi|_1 = |\xi'|$, so erhalten wir in $\mathfrak{A}/J$ eine zweite Norm, so daß $|\xi'| \geqq |\xi|$ nach Theorem 1 ist. Hieraus und aus (3) folgt $|\xi'| = |\xi|$.

Theorem 2. *Ist in $C_0(T)$ eine zweite Norm $|x|_1$ gegeben, für welche die vollständige Hülle von $C_0(T)$ eine halbeinfache Algebra ist, so ist $|x|_1$ der Norm $|x| = \sup_T |x(t)|$ topologisch äquivalent.*

Beweis. Einerseits ist $|x|_1 \leqq C|x|$ nach § 12, Nr. 1, Theorem 1; andererseits ist $|x| \leqq |x|_1$ nach Theorem 1.

Theorem 3. *Jeder symmetrische Isomorphismus $x \to x'$ einer vollständigen vollregulären Algebra R in eine vollständige vollreguläre Algebra R' läßt die Norm invariant.*

Beweis. Es sei $x_0 \in R$. Ferner sei $\mathfrak{A}$ die abgeschlossene, vom Element $x_0^* x_0$ erzeugte Teilalgebra in R und $\mathfrak{A}'$ ihr Bild in R' bei dem Isomorphismus $x \to x'$. Nach § 20, Nr. 1, Folgerung 2, läßt der Isomorphismus $x \to x'$ die Norm von $\mathfrak{A}$ invariant. Insbesondere ist $|x_0^* x_0| = |x_0'^* x_0'|$, also $|x_0|^2 = |x_0'|^2$ oder $|x_0| = |x_0'|$.

2. Realisierung einer vollregulären Algebra als Operatorenalgebra. In diesem Abschnitt werden wir zeigen, daß jede vollreguläre Algebra mit Einselement einer Algebra von beschränkten Operatoren in einem Hilbertschen Raum vollisomorph ist. Zunächst beweisen wir einige Hilfssätze. Dabei bezeichne R eine vollständige vollreguläre Algebra mit Einselement.

I. *Die Gesamtheit Q aller Quadrate der hermiteschen Elemente von R stimmt mit der Gesamtheit aller hermiteschen Elemente $x \in R$, die der Bedingung*

$$\left| e - \frac{1}{c} x \right| \leqq 1 \tag{1}$$

für ein geeignetes $c > 0$ genügen, und insbesondere mit der Gesamtheit aller hermiteschen Elemente $x \in R$ überein, die die Bedingung

$$||x|e - x| \leqq |x| \tag{2}$$

erfüllen.

Beweis. Es sei $x \in Q$. Wenden wir auf das Element $z = \frac{1}{c} x$ mit $c \geqq |x|$, $c > 0$, eine beliebige Funktionaldarstellung an (vgl. Nr. 1), so erhalten wir $0 \leqq z(t) \leqq 1$ und deshalb

$$\left|e - \frac{1}{c} x\right| = |e - z| \leqq 1.$$

Ist andererseits $\left|e - \frac{1}{c} x\right| \leqq 1$ mit $c > 0$, so ist (in Funktionaldarstellung) $\left|1 - \frac{1}{c} x(t)\right| \leqq 1$ und folglich $\frac{1}{c} x(t) \geqq 0$, $x(t) \geqq 0$; d. h., es existiert ein hermitesches Element $y = y(t) \in R$ derart, daß $y^2 = x$, also $x \in Q$ ist.

Für $x \neq 0$ kann offenbar $c = |x|$ gesetzt werden. Deshalb ist Q die Gesamtheit aller hermiteschen Elemente $x \in R$, die der Bedingung (2) genügen.

II. *Q ist ein in R abgeschlossener Kegel.*

Beweis. Die Abgeschlossenheit von Q folgt unmittelbar aus (2).

Ist $x = y^2$, wobei y hermitesch ist, und $\lambda \geqq 0$, so gilt $\lambda x = (\sqrt{\lambda} y)^2$, wobei $\sqrt{\lambda} y$ hermitesch ist. Aus $x \in Q$ und $\lambda \geqq 0$ folgt also $\lambda x \in Q$.

Ist $x \in Q$ und auch $\lambda x \in Q$ für ein gewisses $\lambda < 0$, so zeigt die Funktionaldarstellung, daß $x(t) \geqq 0$ und $\lambda x(t) \geqq 0$ ist, woraus sich $x(t) \leqq 0$ und folglich $x(t) \equiv 0$ und $x = 0$ ergibt.

Schließlich sei $x, y \in Q$. Wählt man $c > \max(|x|, |y|)$, so erhält man nach Satz I

$$\left|e - \frac{1}{c} x\right| \leqq 1, \qquad \left|e - \frac{1}{c} y\right| \leqq 1,$$

also

$$\left|e - \frac{1}{2c}(x + y)\right| = \frac{1}{2}\left|\left(e - \frac{1}{c} x\right) + \left(e - \frac{1}{c} y\right)\right| \leqq 1.$$

Wegen (1) ist folglich auch $x + y \in Q$.

III. *Q ist die Gesamtheit der hermiteschen Elemente von R, die ein nichtnegatives Spektrum haben.*

Beweis. Das Spektrum des hermiteschen Elements x ist die Gesamtheit aller Werte der Funktion $x(t)$ in einer Funktionaldarstellung. Ist $x = y^2$, wobei y hermitesch ist, so muß $x(t) = (y(t))^2 \geqq 0$ sein. Ist dagegen $x(t) \geqq 0$, so erhalten wir $x = y^2$ (y hermitesch), wenn wir $y(t) = \sqrt{x(t)}$ setzen.

IV. *Die Elemente xy und yx besitzen, abgesehen von Null, das gleiche Spektrum.*

Beweis. Existiert $(xy-\lambda e)^{-1}$ und ist $\lambda \neq 0$, so existiert auch

$$(yx-\lambda e)^{-1} = \frac{1}{\lambda}\left(y(xy-\lambda e)^{-1}x - e\right);$$

denn es ist

$$(yx-\lambda e)\frac{1}{\lambda}\left(y(xy-\lambda e)^{-1}x-e\right)$$
$$=\frac{1}{\lambda}\left(y(xy-\lambda e)(xy-\lambda e)^{-1}x-(yx-\lambda e)\right)=e$$

und analog

$$\frac{1}{\lambda}\left(y(xy-\lambda e)^{-1}x-e\right)(yx-\lambda e)=e.$$

V. *Für jedes Element $x \in R$ ist $-x^*x \in Q$ nur für $x^*x = 0$ möglich.*

Beweis. Wir setzen $x = u + iv$. Dann ist

$$x^*x + xx^* = 2u^2 + 2v^2 \in Q$$

und

$$x^*x = 2u^2 + 2v^2 + (-xx^*). \tag{3}$$

Wegen $-x^*x \in Q$ und Satz III hat $-x^*x$ ein nichtnegatives reelles Spektrum. Dann hat nach Satz IV das hermitesche Element $-xx^*$ ebenfalls ein nichtnegatives Spektrum, und es ist $-xx^* \in Q$ (wieder nach Satz III). Somit folgt aus (3) $x^*x \in Q$. Da aber Q ein Kegel ist, ist $-x^*x \in Q$ und $x^*x \in Q$ nur für $x^*x = 0$ möglich.

Theorem 4. *Jede vollständige vollreguläre Algebra mit Einselement ist vollsymmetrisch.*

Beweis. Wir wollen beweisen, daß $x^*x \in Q$ für alle $x \in R$ gilt. Da das Element x^*x hermitesch ist, läßt es sich in der Form $x^*x = u - v$ darstellen, wobei $u, v \in Q$ und $uv = 0$ ist (vgl. § 16, Nr. 2, Folgerung 8). Dann ist aber

$$(xv)^*(xv) = vx^*xv^* = v(u-v)v = -v^3$$

und folglich $-(xv)^*(xv) \in Q$. Nach Satz V ist dies nur dann möglich, wenn $(xv)^*(xv) = 0$, d. h. $v^3 = 0$ ist. Daraus folgt $v = 0$ und $x^*x = u \in Q$. Es existiert also $(e + x^*x)^{-1}$ für alle $x \in R$. Damit ist das Theorem bewiesen.

Theorem 5. *Jede vollreguläre Algebra ist einer Algebra von beschränkten Operatoren eines* Hilbertschen *Raumes vollisomorph.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die vollreguläre Algebra R vollständig ist und das Einselement enthält. Anderenfalls läßt sich R in eine vollständige vollreguläre Algebra R_1 mit Einselement einbetten (vgl. § 16, Nr. 1, Satz I und III). Nach Theorem 4 ist R_1 vollsymmetrisch und deshalb (vgl. § 23, Nr. 4 (1))

$$\sup_{f(e)=1} f(x^*x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|(x^*x)^n|}. \tag{4}$$

Andererseits erhalten wir, wenn wir die Formel (1) von Nr. 1 auf x^*x anstelle von x anwenden, $|(x^*x)^2| = |x^*x|^2$. Wiederholen wir die Überlegung, so finden

wir $|(x^*x)^{2^n}| = |x^*x|^{2^n}$, und zusammen mit (4) ergibt sich

$$\sup_{f(e)=1} f(x^*x) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|(x^*x)^{2^n}|} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[2^n]{|x^*x|^{2^n}} = |x^*x| = |x|^2.$$

Die Norm in R_1 stimmt also mit der minimalen regulären Norm überein.

Auf Grund von § 18, Nr. 3, Theorem 1, ist R_1 und damit auch R einer Algebra von beschränkten Operatoren eines HILBERTschen Raumes vollisomorph.

3. Die Quotientenalgebra einer vollregulären Algebra.

Theorem 6. *Jedes abgeschlossene zweiseitige Ideal I einer vollständigen vollregulären Algebra ist symmetrisch. Die Quotientenalgebra R/I ist ebenfalls vollregulär.*

Beweis. Wir setzen für ein beliebiges $x \in R$ und ein beliebiges $c > 0$

$$y = x\big(c(x^*x)^2\big)' + x, \tag{1}$$

wobei $\big(c(x^*x)^2\big)'$ ein Quasiinverses von $c(x^*x)^2$ ist. Ein solches existiert, weil die vollständige Algebra R nach Nr. 1, Lemma 1, vollregulär ist. Dabei ist, wenn wir $z = x^*x$ setzen,

$$y^*y = \big((cz^2)' + e\big)x^*x\big((cz^2)' + e\big) = \big((cz^2)' + e\big)^2 z. \tag{2}$$

Für positives c erreicht die Funktion $\frac{t}{(1+ct^2)^2}$ ihren größten Wert im Punkt $t = \frac{1}{\sqrt{3c}}$. Folglich finden wir, wenn wir auf (2) die Funktionaldarstellung anwenden,

$$|y^*y| \leqq \frac{9}{16\sqrt{3c}}$$

und deshalb

$$|y| \leqq \frac{3}{4\sqrt[4]{3c}}. \tag{3}$$

Außerdem ist wegen Nr. 1 (2)

$$|(cz^2)'| = \frac{c|z|^2}{1 + c|z|^2}. \tag{4}$$

Es sei jetzt I ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal von R, und es sei $x \in I$. Dann ist auch $z = x^*x \in I$ und $(cz^2)' \in I$. Aus (1) folgt

$$x^* = y^* - (cz^2)'x^*. \tag{5}$$

Da $-(cz^2)'x^* \in I$ ist und nach (3) $|y^*|$ für $c \to \infty$ gegen Null strebt, ist aus (5) ersichtlich, daß $x^* \in I$ und somit das Ideal I symmetrisch ist.

Wir betrachten jetzt die Quotientenalgebra R/I. Da der natürliche Homomorphismus $R \to R/I$ nur die Norm verkleinern kann, gilt die Ungleichung (3) auch in R/I. Es sei $\mathfrak{A}$ eine abgeschlossene kommutative Teilalgebra in R mit z als erzeugendem Element. Wir setzen $J = I \cap \mathfrak{A}$. Die Beziehung (4) gilt in $\mathfrak{A}/J$, da $\mathfrak{A}/J$ eine Darstellung als Funktionenalgebra erlaubt. Nach der Folgerung aus Nr. 1 behält (4) auch in R/I seine Gültigkeit. Faßt man (1), (3)

und (4) zusammen, so folgt, daß in R/I

$$|x| \leqq |y| + |x(cz^2)'| \leqq \frac{3}{4\sqrt[4]{3c}} + \frac{c|x||z|^2}{1+c|z|^2}$$

gilt. Setzen wir hier $c = \frac{1}{3|z|^2}$, so ergibt sich

$$|x| \leqq \frac{3}{4}\sqrt{|z|} + \frac{1}{4}|x|$$

oder

$$\frac{3}{4}|x| \leqq \frac{3}{4}\sqrt{|z|}, \qquad |x|^2 \leqq |z| = |x^*x|.$$

Andererseits ist aber $|x^*x| \leqq |x^*||x| = |x|^2$ (denn es ist in R/I auch $|x^*| = |x|$). Also ist $|x^*x| = |x|^2$ in R/I, womit das Theorem bewiesen ist.

Folgerung. *Bei einem symmetrischen Homomorphismus $x \to x'$ einer vollständigen vollregulären Algebra R in eine vollständige vollreguläre Algebra R' ist das Bild von R ebenfalls eine vollständige Algebra.*

Beweis. Es sei I der Kern des Homomorphismus $x \to x'$. Dann ist I ein abgeschlossenes symmetrisches Ideal R, und nach Theorem 6 ist R/I eine vollständige vollreguläre Algebra. Der Homomorphismus $x \to x'$ von R in R' erzeugt den Isomorphismus $\tilde{x} \to x'$ von R/I in R', wobei das Bild von R bei dem Homomorphismus $x \to x'$ mit dem Bild von R/I bei dem Isomorphismus $\tilde{x} \to x'$ übereinstimmt. Nach Nr. 1, Theorem 3, ist der Isomorphismus $\tilde{x} \to x'$ isometrisch, und deshalb ist das Bild eine vollständige Algebra.

Beispiel. Es sei R die Algebra aller beschränkten Operatoren im HILBERTschen Raum $\mathfrak{H}$ ($R = \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$) und I die Gesamtheit aller vollstetigen Operatoren in $\mathfrak{H}$. Dann ist I ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in R. Da R vollregulär ist, muß auf Grund von Theorem 6 die Quotientenalgebra R/I ebenfalls vollregulär sein. Wenden wir auf R/I das Theorem 5 aus Nr. 2 an, so kommen wir zu folgendem Satz.

Theorem 7. *Die Quotientenalgebra der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ nach dem Ideal I aller vollstetigen Operatoren in $\mathfrak{H}$ ist einer Algebra von beschränkten Operatoren in einem HILBERTschen Raum $\mathscr{H}$ vollisomorph.*

Dieser Satz wurde zum ersten Mal von CALKIN [1] ausgesprochen, der die Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})/I$ als Algebra von Operatoren in einem HILBERTschen Raum realisierte.

§ 25. Duale Algebren

1. Annullatoralgebren und duale Algebren. Es sei R eine topologische Algebra und S eine beliebige Menge in R. Wir nennen die Gesamtheit aller Elemente $x \in R$, für die $xS = (0)$ ist, den *Linksannullator* $\mathfrak{L}(S)$. Analog soll dann die Gesamtheit aller Elemente $x \in R$, für die $Sx = (0)$ ist, der *Rechtsannullator* $\mathfrak{R}(S)$ genannt werden. Offenbar sind $\mathfrak{L}(S)$ und $\mathfrak{R}(S)$, falls sie nicht mit der ganzen Algebra übereinstimmen, abgeschlossene Links- bzw. Rechtsideale. Außerdem ist

$$S \subset \mathfrak{L}(\mathfrak{R}(S)) \quad \text{und} \quad S \subset \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S)) \tag{1a}$$

sowie

$$\mathfrak{L}(S_1) \subset \mathfrak{L}(S_2), \qquad \mathfrak{R}(S_1) \subset \mathfrak{R}(S_2) \quad \text{für} \quad S_1 \supset S_2. \tag{1b}$$

In diesem Paragraphen ist es in einigen Fällen günstig, die ganze Algebra R als Ideal zu bezeichnen. Dann werden wir R das *uneigentliche Rechts-, Linksideal* oder *zweiseitige Ideal* nennen. Ferner können wir sagen, daß $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(S))$ und $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S))$ abgeschlossene (eigentliche oder uneigentliche) Links- bzw. Rechtsideale sind, die S enthalten.

Wir nennen R eine *Annullatoralgebra,* wenn

$$\mathfrak{L}(R) = \mathfrak{R}(R) = (0) \tag{2}$$

und

$$\mathfrak{L}(I_r) \neq (0), \tag{3a}$$

$$\mathfrak{R}(I_l) \neq (0) \tag{3b}$$

für jedes abgeschlossene Linksideal I_l und jedes abgeschlossene Rechtsideal I_r ist.

Wenn für jedes abgeschlossene (eigentliche oder uneigentliche) Linksideal I_l und jedes abgeschlossene (eigentliche oder uneigentliche) Rechtsideal I_r

$$\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)) = I_l, \tag{4a}$$

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) = I_r \tag{4b}$$

gilt, nennen wir R *dual.*

Aus diesen Definitionen folgt unmittelbar, daß *jede duale Algebra auch Annullatoralgebra ist.* Setzen wir nämlich $I_l = (0)$ und $I_r = (0)$ in (4a) bzw. (4b) ein und berücksichtigen wir, daß $\mathfrak{R}((0)) = R$ und $\mathfrak{L}((0)) = R$ ist, so erhalten wir (2). Ferner kann für das Ideal I_l nicht $\mathfrak{R}(I_l) = (0)$ sein, denn dann wäre $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)) = \mathfrak{L}((0)) = R \neq I_l$, was der Bedingung (4a) widerspricht. Folglich ist $\mathfrak{R}(I_l) \neq (0)$, also (3b) bewiesen. Analog läßt sich (3a) beweisen.

Es ist bis jetzt noch unbekannt, ob auch die Umkehrung gilt.

I. *Für eine beliebige Teilmenge S einer dualen Algebra ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S))$ bzw. $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(S))$ das minimale abgeschlossene (eigentliche oder uneigentliche) Rechts- bzw. Linksideal, das S enthält.*

Ist etwa I_r das minimale abgeschlossene (eigentliche oder uneigentliche) Rechtsideal, das S enthält, so ist

$$I_r = \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) \supset \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S)).$$

Da $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S))$ ebenfalls ein abgeschlossenes (eigentliches oder uneigentliches) Rechtsideal ist, das S enthält, muß $I_r = \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(S))$ sein.

II. *Sind I_r und J_r abgeschlossene Rechtsideale der dualen Algebra R, so ist*

$$\mathfrak{L}(I_r \cap J_r) = \overline{\mathfrak{L}(I_r) + \mathfrak{L}(J_r)}; \tag{5a}$$

analog gilt für abgeschlossene Linksideale I_l und J_l

$$\mathfrak{R}(I_l \cap J_l) = \overline{\mathfrak{R}(I_l) + \mathfrak{R}(J_l)}. \tag{5b}$$

Beweis. Da $\mathfrak{L}(I_r) + \mathfrak{L}(J_r)$ ein (eigentliches oder uneigentliches) Linksideal ist, muß nach Satz I und Formel (4a)

$$\overline{\mathfrak{L}(I_r) + \mathfrak{L}(J_r)} = \mathfrak{L}[\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r) + \mathfrak{L}(J_r))] = \mathfrak{L}[\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) \cap \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(J_r))] = \mathfrak{L}(I_r \cap J_r)$$

sein. Analog läßt sich (5b) beweisen.

III. *Ist R eine duale Algebra, so gilt*

$$x \in \overline{xR} \quad \text{und} \quad x \in \overline{Rx}$$

für jedes $x \in R$.

Beweis. Wir zeigen, daß $x \in \overline{xR}$ ist. Die Beziehung $x \in \overline{Rx}$ läßt sich dann analog nachweisen. Da $\overline{xR} = \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(\overline{xR}))$ ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{L}(\overline{xR})x = (0)$ gilt. Aus $y \in \mathfrak{L}(\overline{xR})$ folgt $yxR = 0$. Folglich ist $yx \in \mathfrak{L}(R) = (0)$, $yx = 0$, also $\mathfrak{L}(\overline{xR})x = (0)$.

2. Ideale einer Annullatoralgebra. In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit R eine Annullatoralgebra mit stetigen Quasiinversen (vgl. § 8, Nr. 6).

I. *Ist $I_l = \{yp - y : y \in R\}$, so folgt*

$$\mathfrak{R}(I_l) = \{x \in R : px - x = 0\}.$$

Beweis. Ist $x \in \mathfrak{R}(I_l)$, so gilt $y(px - x) = (yp - y)x = 0$ für alle $y \in R$, so daß also $px - x = 0$ wegen Nr. 1 (2) ist. Haben wir umgekehrt $px - x = 0$, so folgt

$$(yp - y)x = y(px - x) = 0 \quad \text{und} \quad x \in \mathfrak{R}(I_l).$$

Offenbar gilt der analoge Satz für das Ideal

$$I_r = \{py - y : y \in R\}.$$

II. *Hat das Element p kein linkes Quasiinverses, so existiert ein Element $x \neq 0$ mit der Eigenschaft $px = x$.*

Beweis. Es habe p kein linkes quasiinverses Element. Dann ist die Menge $I_l = \{yp - y : y \in R\}$ ein reguläres Linksideal in R (vgl. § 7, Nr. 4, Satz VII). Folglich ist auch die abgeschlossene Hülle $\overline{I_l}$ ein reguläres Linksideal in R (vgl. § 8, Nr. 3), woraus $\mathfrak{R}(\overline{I_l}) \neq (0)$ folgt. Ist x ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{R}(\overline{I_l})$, so liegt x auch in $\mathfrak{R}(I_l)$, und aus Satz I folgt $px = x$.

Das Linksideal I_l heißt *minimal*, wenn es keine von (0) und I_l verschiedenen Linksideale enthält. Analog kann man minimale Rechtsideale und minimale zweiseitige Ideale definieren. Ferner nennen wir ein abgeschlossenes Linksideal ein *minimales abgeschlossenes Linksideal*, wenn I_l keine von (0) und I_l verschiedenen abgeschlossenen Linksideale enthält. Analog lassen sich auch minimale abgeschlossene Rechtsideale und minimale abgeschlossene zweiseitige Ideale definieren. Ein abgeschlossenes Linksideal ist ein *maximales Linksideal*, wenn es in keinem anderen abgeschlossenen Linksideal enthalten ist. Analog werden maximale abgeschlossene Rechtsideale und maximale abgeschlossene zweiseitige Ideale definiert. Ein *idempotentes* Element oder kurz *Idempotent* ist ein Element $p \neq 0$ von R mit der Eigenschaft $p^2 = p$.

Theorem 1. *Ist M_r ein maximales abgeschlossenes Rechtsideal von R und hat $\mathfrak{L}(M_r)$ mit dem Radikal der Algebra R nur das Nullelement gemeinsam, so enthält $\mathfrak{L}(M_r)$ ein Idempotent p. Dabei ist $\mathfrak{L}(M_r) = Rp$ und*

$$M_r = \{x - px : x \in R\}. \tag{1}$$

Beweis. Wegen $\mathfrak{L}(M_r) \neq (0)$ existiert ein Element $a \neq 0$, $a \in \mathfrak{L}(M_r)$. Dann ist aber $M_r \subset \mathfrak{R}((a)) \neq R$, und da M_r maximal ist, folgt

$$\mathfrak{R}((a)) = M_r. \tag{2}$$

Nach Voraussetzung gehört a nicht zum Radikal von R, so daß das Element $-p = \lambda a + ya$ für ein λ und ein $y \in R$ kein linkes Quasiinverses besitzt (vgl. § 7, Nr. 5). Also ist $p \neq 0$, $p \in \mathfrak{L}(M_r)$. Nach Satz II gibt es ein Element $x \neq 0$ derart, daß $px = x$ und folglich $(p^2 - p)x = 0$ ist. Wir zeigen, daß $p^2 - p = 0$ ist, und haben damit die erste Behauptung des Satzes bewiesen. Wir nehmen das Gegenteil an, nämlich $p^2 - p \neq 0$. Wegen $p^2 - p \in \mathfrak{L}(M_r)$ folgt aus (2), wenn wir a durch $p^2 - p$ ersetzen, daß $x \in M_r$ und folglich $x = px = 0$ entgegen dem oben Gesagten ist. Also muß $p^2 = p$ sein.

Wegen $p \in \mathfrak{L}(M_r)$ und $p \neq 0$ folgt aus (2), wenn wir a durch p ersetzen, daß $M_r = \mathfrak{R}((p)) = \{x - px : x \in R\}$ ist; denn es ist $p(x - px) = px - p^2x = 0$ und, falls $py = 0$ gilt, $y = y - py$. Daraus ergibt sich wegen Satz I und der Idempotenz von p

$$\mathfrak{L}(M_r) = Rp.$$

Folgerung 1. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 1 ist M_r ein maximales Rechtsideal und $\mathfrak{L}(M_r)$ ein minimales Linksideal. Außerdem ist pR ein minimales Rechtsideal und $\mathfrak{L}(pR)$ ein maximales Linksideal.*

Beweis. Nach Theorem 1 ist M_r regulär und außerdem nach Voraussetzung ein maximales abgeschlossenes Rechtsideal. Folglich ist M_r ein maximales Rechtsideal (vgl. § 8, Nr. 3 und 6). Ferner ist wegen (1)[1]

$$R = pR \dotplus M_r. \tag{3}$$

Dies ist die Zerlegung von R in eine direkte Summe der Ideale pR und M_r. Da M_r maximal sein sollte, muß also pR minimal sein.

Wir setzen $I_l = \mathfrak{L}(pR)$. Für $y \in I_l$ ist $ypR = 0$, also $yp = 0$ und $y = y - yp$. Hieraus können wir schließen, daß $I_l = \{y - yp : y \in R\}$ und folglich nach Satz I auch $\mathfrak{R}(I_l) = pR$ ist.

Wir beweisen jetzt, daß I_l ein maximales abgeschlossenes Linksideal ist. Dazu nehmen wir an, J_l sei ein abgeschlossenes Linksideal, das I_l enthält. Dann ist $(0) \neq \mathfrak{R}(J_l) \subset pR$. Da aber pR minimal ist, folgt hieraus $\mathfrak{R}(J_l) = pR$, also $J_l pR = (0)$. Doch dann ist $J_l p = (0)$ nach Nr. 1, Formel (2), d. h., es ist $J_l = \{y - yp : y \in R\} = I_l$. Somit ist I_l ein maximales abgeschlossenes Linksideal, und da I_l regulär ist, muß es auch ein maximales Linksideal sein. Aus der Beziehung $R = I_l \dotplus Rp$ folgt also, daß Rp ein minimales Linksideal ist.

Theorem 2. *Ist I_l ein nicht ganz im Radikal von R enthaltenes minimales abgeschlossenes Linksideal oder minimales Linksideal, so enthält I_l ein Idempotent p, und es ist*

$$I_l = Rp, \qquad \mathfrak{R}(Rp) = \{x - px : x \in R\}.$$

[1]) In diesem Paragraphen bezeichnet $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}$ stets die *direkte Summe* der linear unabhängigen Räume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, d. h. die Gesamtheit aller Vektoren $x + y$, $x \in \mathfrak{M}$, $y \in \mathfrak{N}$. Somit ist schon aus der Schreibweise $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}$ ersichtlich, daß $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ linear unabhängig sind.

Beweis. Nach Voraussetzung enthält I_l ein Element x_0, das nicht dem Radikal angehört. Folglich gibt es für ein λ und ein $y \in R$ zu dem Element $-p = \lambda x_0 + y x_0$, das ebenfalls zu I_l gehört, kein linkes Quasiinverses, und es ist $p \neq 0$. Nach Satz II folgt hieraus die Existenz eines Elements $a \neq 0$ mit $pa = a$. Andererseits ist die Menge $J_l = \{x \in I_l : xa = 0\}$ ein, wenn I_l abgeschlossen ist, ebenfalls abgeschlossenes Linksideal, das in I_l enthalten ist, mit I_l aber nicht übereinstimmt; denn es ist $p \notin J_l$, $p \in I_l$. Dies ist, da I_l minimal ist, nur im Fall $J_l = (0)$ möglich, so daß $xa \neq 0$ für $x \in I_l$, $x \neq 0$ ist. Da aber $p^2 - p \in I_l$ und $(p^2 - p)a = 0$ ist, muß $p^2 - p = 0$ und somit p idempotent sein.

Wir weisen darauf hin, daß Rp die Gesamtheit aller Elemente $x \in R$ ist, die der Bedingung $x = xp$ genügen. Daher ist Rp eine abgeschlossene Menge und demzufolge ein abgeschlossenes, in I_l enthaltenes Linksideal. Da aber I_l minimal ist, muß $Rp = I_l$ sein. Also ist $\mathfrak{R}(I_l) = \{x - px : x \in R\}$.

Folgerung 2. *Unter den Voraussetzungen von Theorem 2 ist I_l ein minimales Linksideal, $\mathfrak{R}(I_l)$ ein maximales Rechtsideal, pR ein minimales Rechtsideal und $\mathfrak{L}(pR)$ ein maximales Linksideal.*

Der Beweis verläuft analog dem Beweis von Folgerung 1.

Folgerung 3. *Jedes minimale Linksideal I_l aus R, das nicht im Radikal enthalten ist, ist abgeschlossen.*

Denn es ist $I_l = Rp$, und Rp ist eine abgeschlossene Menge.

Bemerkung 1. In sämtlichen vorhergehenden Resultaten lassen sich offenbar Links- und Rechtsideale vertauschen.

Theorem 3. *Jede vollständige vollreguläre normierte Annullatoralgebra R ist dual.*

Beweis. Es sei I_l ein abgeschlossenes Linksideal in R. Wir zeigen zuerst, daß

$$R = I_l \dot{+} (\mathfrak{R}(I_l))^* \tag{4}$$

ist. Für $x \in I_l \cap (\mathfrak{R}(I_l))^*$ ist $xx^* = 0$, also $x = 0$. Somit haben wir $I_l \cap (\mathfrak{R}(I_l))^* = (0)$. Wir setzen $J_l = I_l \dot{+} (\mathfrak{R}(I_l))^*$. Ist $J_l \neq R$, so ist J_l Linksideal in R und abgeschlossen. Ist nämlich $x = y + z$, $y \in I_l$, $z \in (\mathfrak{R}(I_l))^*$, so ist $xz^* = zz^*$ und somit $|x|\,|z^*| \geqq |z|^2$, $|x| \geqq |z|$.

Analog läßt sich $|x| \geqq |y|$ beweisen. Aus diesen Ungleichungen kann man ablesen, daß das Ideal J_l abgeschlossen ist. Dann existiert nach Nr. 1, Bedingung (3b), ein von Null verschiedenes Element $a \in R$ derart, daß $J_l a = (0)$, $I_l a = (0)$ und $(\mathfrak{R}(I_l))^* a = (0)$ ist.

Aus der zweiten dieser drei Gleichungen folgt $a \in \mathfrak{R}(I_l)$, also $a^* \in (\mathfrak{R}(I_l))^* \subset J_l$. Damit ergibt sich aber aus der ersten Gleichung $a^* a = 0$, was nicht möglich ist. Deshalb ist $J_l = R$, womit die Formel (4) bewiesen ist.

Analog können wir zeigen, daß für jedes abgeschlossene Rechtsideal I_r die Beziehung

$$R = I_r \dot{+} (\mathfrak{L}(I_r))^* \tag{5}$$

gilt. Setzen wir hier $I_r = \mathfrak{R}(I_l)$, so erhalten wir

$$R = \mathfrak{R}(I_l) \dotplus (\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)))^*$$

oder, wenden wir auf beide Seiten dieser Gleichung die Involution an,

$$R = (\mathfrak{R}(I_l))^* \dotplus \mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)). \tag{6}$$

Da I_l in $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l))$ liegt, ergibt ein Vergleich von (6) mit (4), daß $I_l = \mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l))$ ist. Setzen wir in (4) $I_l = \mathfrak{L}(I_r)$, wenden wieder die Involution an und vergleichen mit (5), so können wir schließen, daß auch $I_r = \mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r))$ für jedes abgeschlossene Rechtsideal I_r gilt. Damit ist das Theorem bewiesen.

Bemerkung 2. Wir weisen darauf hin, daß für die Richtigkeit von Theorem 3 schon eine der Bedingungen (3) aus Nr. 1 genügt.

Man sieht nämlich leicht, daß jede dieser Bedingungen aus der anderen durch Anwendung der Involution folgt, und die Bedingung (2) aus Nr. 1 ist für jede vollreguläre Algebra erfüllt.

3. Halbeinfache Annullatoralgebren. In diesem Abschnitt bezeichnen wir mit R eine halbeinfache Annullatoralgebra mit stetigen Quasiinversen. Aus den Ergebnissen von Nr. 2 ist ersichtlich, daß in der Algebra R jedes minimale Linksideal abgeschlossen ist und ein Idempotent enthält und daß der Annullator eines maximalen abgeschlossenen Rechtsideals ein minimales Linksideal ist, während der Annullator eines minimalen Linksideals ein maximales reguläres Rechtsideal ist.

Theorem 4. *Die Summe*[1] *aller minimalen Linksideale (Rechtsideale) der Algebra R ist in R dicht.*

Beweis. Es sei S die Summe aller minimalen Linksideale und $\bar{S}$ ihre abgeschlossene Hülle. Ist $\bar{S} \neq R$, so ist $\bar{S}$ ein abgeschlossenes Linksideal von R. Also existiert ein Element $x \neq 0$ mit $\bar{S}x = (0)$. Dann gehört x zu allen Rechtsannullatoren aller minimalen Linksideale, d. h. zum Durchschnitt aller maximalen regulären Rechtsideale. Nach § 7, Nr. 5, Satz III′, ist dieser Durchschnitt das Radikal der Algebra R und gleich (0), da R halbeinfach ist. Also ist $x = 0$ entgegen der Annahme. Folglich ist $\bar{S} = R$.

I. *Genügt ein Linksideal, Rechtsideal oder zweiseitiges Ideal I aus R der Bedingung $I^2 = (0)$, so ist $I = (0)$.*

Beweis. Es sei etwa I ein Linksideal in R, und es sei $I^2 = (0)$. Daraus ergibt sich $(\alpha x + yx)^2 = 0$ für alle Zahlen α und alle $x \in I$, $y \in R$, denn es ist auch $\alpha x + yx \in I$. Dann besitzt das Element $z = \alpha x + yx$ das linke Quasiinverse $-z$, und x gehört zum Radikal von R. Da R halbeinfach ist, folgt $x = 0$ und somit $I = (0)$. Analog läßt sich die Behauptung für Rechtsideale beweisen.

---

[1]) Unter der Summe der Linksideale $I_l^{(\alpha)}$ verstehen wir die Gesamtheit aller möglichen Summen der Elemente $x_\alpha \in I_l^{(\alpha)}$. Analog wird die Summe von Rechtsidealen oder zweiseitigen Idealen definiert.

II. *Ist I_r ein minimales Rechtsideal in R, so ist das von I_r erzeugte abgeschlossene zweiseitige Ideal $[I_r]$ ein minimales abgeschlossenes zweiseitiges Ideal in R.*

Beweis. Es sei J ein in $[I_r]$ enthaltenes abgeschlossenes zweiseitiges Ideal. Dann ist $I_r \cap J$ ein Rechtsideal, das in I_r enthalten ist. Entweder gilt nun $I_r \cap J = I_r$, also $I_r \subset J$, oder $I_r \cap J = (0)$.

Im ersten Fall ist $[I_r] \subset J$ und folglich $[I_r] = J$. Im zweiten Fall ist $I_r J \subset I_r \cap J = (0)$, also $I_r \subset \mathfrak{L}(J)$. Da $\mathfrak{L}(J)$, wie man leicht sieht, ein abgeschlossenes Ideal ist, muß auch $[I_r] \subset \mathfrak{L}(J)$ sein. Dann ist aber $J \subset \mathfrak{L}(J)$, also $J^2 = (0)$ und nach Satz I auch $J = (0)$.

Damit haben wir bewiesen, daß das Ideal $[I_r]$ minimal ist.

Zwei Idempotente p_1, p_2 heißen *orthogonal*, wenn $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$ ist. Ein System $\{p\}$ von Idempotenten heißt *orthogonal*, wenn je zwei verschiedene Idempotente dieses Systems orthogonal sind. Das Idempotent p heißt *irreduzibel*, wenn es nicht als Summe zweier orthogonaler Idempotente dargestellt werden kann.

III. *Ist pR ein minimales Rechtsideal (Rp ein minimales Linksideal), so ist p ein irreduzibles Idempotent.*

Beweis. Es sei p reduzibel, $p = p_1 + p_2$, $p_1 p_2 = p_2 p_1 = 0$. Dann ist $p_1 R = p p_1 R \subset pR$, $p_2 R = p p_2 R \subset pR$ und

$$pR = p_1 R \dotplus p_2 R. \tag{1}$$

Es ist nämlich $px = p_1 x + p_2 x$, und ist $p_1 x + p_2 y = 0$, so erhalten wir, wenn wir diese Gleichung von links mit p_1 und p_2 multiplizieren, $p_1 x = p_2 y = 0$. Aus (1) folgt aber, daß pR kein minimales Rechtsideal ist.

IV. *Ist pR ein minimales Rechtsideal und $a \in R$, so ist entweder $apR = (0)$, oder $apR = p' R$ ist ein minimales Rechtsideal.*

Beweis. Die reguläre Linksdarstellung $x \to ax$ bildet pR auf apR ab. Der Kern dieser Abbildung ist ein Rechtsideal, das in pR enthalten ist. Folglich ist entweder dieser Kern gleich (0) und die Abbildung eineindeutig, oder er stimmt mit pR überein, und es ist $apR = (0)$.

Im ersten Fall ist apR ein minimales Rechtsideal von R, woraus $apR = p'R$ für ein irreduzibles Idempotent p' folgt.

V. *Jedes Rechtsideal I_r von R enthält ein minimales Rechtsideal und folglich ein irreduzibles Idempotent.*

Beweis. Es enthalte I_r kein minimales Rechtsideal, und es sei pR ein minimales Rechtsideal. Dann ist $pR \cap I_r$ ein Rechtsideal, das in dem minimalen Ideal pR enthalten ist, aber mit pR nicht übereinstimmt, da pR nicht in I_r enthalten ist. Folglich ist $pR \cap I_r = (0)$.

Nach Satz IV ist apR für jedes $a \in R$ entweder gleich (0) oder ein minimales Rechtsideal. Deshalb ist auch $apR \cap I_r = (0)$ für alle $a \in R$. Insbesondere ergibt sich $ap \cap I_r = app \cap I_r \subset apR \cap I_r = (0)$ für alle $a \in R$, d. h. $Rp \cap I_r = (0)$. Wegen $I_r Rp \subset Rp \cap I_r$ ist auch $I_r Rp = (0)$. Nach Folgerung 2 und Bemerkung 1 aus Nr. 2 durchläuft Rp alle minimalen Linksideale, wenn pR

alle minimalen Rechtsideale durchläuft, so daß $I_r R p = (0)$ für alle minimalen Linksideale Rp gilt. Nach Theorem 4 folgt hieraus $I_r R = (0)$ und deshalb $I_r = (0)$.

VI. *Ist p ein irreduzibles Idempotent, so sind pR bzw. Rp minimale Rechts- bzw. Linksideale.*

Beweis. Es sei p ein irreduzibles Idempotent. Wir setzen voraus, daß das Rechtsideal pR nicht minimal ist. Nach Satz V enthält pR ein minimales Rechtsideal $p'R$, das mit pR nicht übereinstimmt, da pR nicht minimal ist. Insbesondere ist $p' = pa$ für ein gewisses $a \in R$. Dann gehört das Element $p'' = p'p = pap$ zu $p'R$ und ist mit p vertauschbar; denn es ist

$$pp'' = p^2ap = pap = p''$$

und

$$p''p = pap^2 = pap = p''.$$

Außerdem gilt $p''^2 = p'pp'' = p'p'' = p'p = p''$. Dabei ist $p'' \neq 0$ wegen

$$p''p' = p'pp' = (pa)p(pa) = (pa)^2 = p'^2 = p' \neq 0.$$

Also ist p'' ein in $p'R$ enthaltenes Idempotent.

Ferner ist auch $p - p'' \neq 0$ (wegen $p''R \subset p'R \neq pR$) und

$$p''(p - p'') = p'' - p'' = 0.$$

Setzen wir dann $p = p'' + (p - p'')$, so erhalten wir im Widerspruch zu unserer Annahme, p sei irreduzibel, eine Darstellung von p als Summe zweier orthogonaler Idempotente. Folglich ist pR minimal.

VII. *Links- und Rechtsannullatoren eines abgeschlossenen zweiseitigen Ideals I stimmen überein.*

Beweis. Nach Satz I ist $I \cap \mathfrak{R}(I) = (0)$, da $I \cap \mathfrak{R}(I)$ ein Rechtsideal J ist, das der Bedingung $J^2 = (0)$ genügt. Folglich ist auch $\mathfrak{R}(I)I = (0)$, also $\mathfrak{R}(I) \subset \mathfrak{L}(I)$. Analog ist $\mathfrak{L}(I) \subset \mathfrak{R}(I)$ und demzufolge $\mathfrak{L}(I) = \mathfrak{R}(I)$.

VIII. *Für jedes abgeschlossene zweiseitige Ideal I ist das Ideal*

$$I + \mathfrak{L}(I) = I + \mathfrak{R}(I)$$

in R dicht.

Beweis. Ist das Ideal $I + \mathfrak{L}(I)$ nicht dicht in R, so ist seine abgeschlossene Hülle ein Ideal in $\mathfrak{R}$. Folglich existiert ein Element $x \neq 0$ derart, daß $x(I + \mathfrak{L}(I)) = (0)$ ist, woraus sich $(\lambda x + yx)I = (0)$, $(\lambda x + yx)\mathfrak{L}(I) = (0)$ ergibt. Der ersten Gleichung entnimmt man, daß $\lambda x + yx$ zu $\mathfrak{L}(I)$ gehört; damit erhält man aus der zweiten Gleichung $(\lambda x + yx)^2 = 0$ für alle $y \in R$ und alle λ. Dies ist jedoch in einer halbeinfachen Algebra für $x \neq 0$ unmöglich (vgl. den Beweis von Satz I).

IX. *Jedes minimale abgeschlossene zweiseitige Ideal I in R ist eine Annullatoralgebra. Ist außerdem R dual, so ist auch I dual.*

Beweis. Es sei $x \in I$ und $Ix = (0)$. Dann ist $x = 0$ wegen $I \cap \mathfrak{R}(I) = (0)$ (vgl. den Beweis von Satz VII).

Ist $xI = (0)$ und $x \in I$, so ist $x = 0$. Die Bedingung (2) aus Nr. 1 ist also erfüllt.

Es seien jetzt J_l, J_r abgeschlossene Links- bzw. Rechtsideale in I. Wir müssen zeigen, daß $\mathfrak{R}(J_l) \cap I \neq (0)$ und $\mathfrak{L}(J_r) \cap I \neq (0)$ ist. Wir bemerken, daß J_l ein abgeschlossenes Linksideal auch in R ist. Es ist nämlich

$$(\overline{I + \mathfrak{L}(I)})\, J_l = I J_l \subset J_l,$$

und da $I + \mathfrak{L}(I)$ in R dicht ist, haben wir auch $R J_l \subset J_l$.

Wir setzen $I_l = J_l + \mathfrak{L}(I) = J_l + \mathfrak{R}(I)$. Dann ist entweder I_l in R dicht oder aber $\mathfrak{R}(I_l) \neq (0)$.

Wir untersuchen zunächst den ersten Fall. Es sei $a \in I$. Dann ist $a I_l = a J_l + a \mathfrak{R}(I) = a J_l \subset J_l$ und daher auch $a R = \overline{a I_l} \subset J_l$. Dies bedeutet $I R \subset J_l$ und somit $I^2 \subset J_l$. Da I^2 ein (infolge der Halbeinfachheit von R; vgl. Satz I) von (0) verschiedenes zweiseitiges Ideal ist, das in dem minimalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideal I enthalten ist, folgt $\overline{I^2} = I$. Daraus ergibt sich $I \subset J_l$ entgegen der Voraussetzung $J_l \subsetneqq I$. Somit ist der erste Fall nicht möglich, also gilt $\mathfrak{R}(I_l) \neq (0)$. Nach Satz V enthält $\mathfrak{R}(I_l)$ ein irreduzibles Idempotent p. Wir zeigen, daß $p \in I$, und nehmen dazu an, daß $p \notin I$. Ferner sei $[pR]$ das zweiseitige Ideal, das von dem minimalen Rechtsideal pR erzeugt wird. Das Ideal $[pR]$ ist nach Satz II minimal. Da es wegen $p^2 = p \notin I$ nicht mit dem minimalen Ideal I übereinstimmt, ist $[pR] \cap I = (0)$. Ferner ist $pI = (0)$ (wegen $pI \subset [pR] \cap I$), also $p \in \mathfrak{L}(I) \subset I_l$. Da andererseits $p \in \mathfrak{R}(I_l)$ ist, kommen wir zu dem Widerspruch $p^2 = 0$. Somit ist $\mathfrak{R}(I_l) \cap I \neq (0)$ und erst recht $\mathfrak{R}(J_l) \cap I \neq (0)$. Analog läßt sich beweisen, daß $\mathfrak{L}(J_r) \cap I \neq (0)$ ist.

Wir nehmen jetzt an, R sei eine duale halbeinfache Algebra, und zeigen, daß I ebenfalls dual ist.

Wir behaupten: Aus $x \in I$ und $[\mathfrak{L}(J_r) \cap I]\, x = (0)$ folgt $x \in J_r$. Mit Hilfe von Nr. 1 (1a) folgt dann, daß in I die Bedingung (4b) aus Nr. 1 erfüllt ist. Analog kann man beweisen, daß in I ebenfalls (4a) aus Nr. 1 gilt.

Da R dual ist, genügt es zu zeigen, daß $\mathfrak{L}(J_r)\, x = (0)$ ist. Nach Voraussetzung ist

$$x \in \mathfrak{R}[\mathfrak{L}(J_r) \cap I] = \overline{\mathfrak{R}[\mathfrak{L}(J_r)] + \mathfrak{R}(I)} = \overline{J_r + \mathfrak{R}(I)} = \overline{J_r + \mathfrak{L}(I)} \tag{2}$$

[vgl. Nr. 1 (5b) und Satz VII]. Nun gilt $(J_r + \mathfrak{L}(I))\, I = J_r I \subset J_r$, da J_r ein Rechtsideal in I ist. Folglich ist $\overline{(J_r + \mathfrak{L}(I))}\, I \subset J_r$. Dann ergibt sich wegen (2) $x I \subset J_r$ und somit

$$\mathfrak{L}(J_r)\, x I \subset \mathfrak{L}(J_r)\, J_r = (0).$$

Außerdem ist $\mathfrak{L}(J_r)\, x \mathfrak{R}(I) = (0)$ wegen $x \in I$. Hieraus folgt

$$\mathfrak{L}(J_r)\, x (I + \mathfrak{R}(I)) = (0).$$

Da $I + \mathfrak{R}(I)$ in R dicht ist (vgl. Satz VIII), gilt auch $\mathfrak{L}(J_r)\, x R = (0)$ und schließlich $\mathfrak{L}(J_r)\, x \subset \mathfrak{L}(R) = (0)$.

Theorem 5. *Jede halbeinfache Annullatoralgebra R mit stetigen Quasiinversen ist die abgeschlossene Hülle der direkten Summe*[1]) *aller ihrer minimalen*

[1]) Die Summe der zweiseitigen Ideale I^α (vgl. die Fußnote auf S. 331) nennen wir *direkt*, wenn die I^α linear unabhängige Räume aus R sind und $I^{\alpha_1} I^{\alpha_2} = (0)$ für $\alpha_1 \neq \alpha_2$ ist.

abgeschlossenen zweiseitigen Ideale, die einfache[1]) *Annullatoralgebren sind* (*für duales R sind diese Annullatoralgebren ebenfalls dual*).

Beweis. Auf Grund von Satz V enthält jedes minimale abgeschlossene zweiseitige Ideal I von R ein minimales Rechtsideal I_r und stimmt folglich mit $[I_r]$ überein (vgl. Satz II). Andererseits ist nach Satz II für jedes minimale Rechtsideal I_r das Ideal $[I_r]$ ein minimales abgeschlossenes zweiseitiges Ideal. Wegen Satz IX ist $[I_r]$ eine Annullatoralgebra und dual, wenn R dual ist. Außerdem ist $[I_r]$ eine einfache Algebra, da jedes abgeschlossene zweiseitige Ideal in $[I_r]$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal von R wäre (vgl. den Beweis von Satz IX), das in dem minimalen Ideal $[I_r]$ enthalten wäre, was jedoch nicht möglich ist.

Nach Theorem 4 ist die Summe aller minimalen Rechtsideale I_r und somit auch die aller minimalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale $[I_r]$ in R dicht. Wir müssen noch zeigen, daß diese Summe direkt ist. Ist $[I_r] \neq [I'_r]$, so gilt

$$I_r I'_r \subset [I_r] \cap [I'_r] = (0), \tag{3}$$

da $[I_r] \cap [I'_r]$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal ist, das in den minimalen Idealen $[I_r]$, $[I'_r]$ enthalten ist und nicht mit ihnen übereinstimmt. Es sei

$$0 = x_1 + x_2 + \cdots + x_n \tag{4}$$

mit $x_k \in [I_r^{(k)}]$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, und es seien $[I_r^{(1)}], \ldots, [I_r^{(n)}]$ paarweise verschiedene Ideale. Multiplizieren wir (4) von links mit $I_r^{(k)}$ und berücksichtigen wir (3), so erhalten wir $[I_r^{(k)}] x_k = (0)$ und folglich

$$(x_k R)^2 \subset [I_r^{(k)}] \cdot (x_k R) = (0).$$

Daraus folgt $x_k R = (0)$, da R halbeinfach ist, und schließlich $x_k = 0$.

Folgerung. *Neben den Voraussetzungen von Theorem 5 nehmen wir noch zusätzlich an, daß R eine symmetrische Algebra ist, in der die Involution $x \to x^*$ stetig und die Bedingung*

$$x^* x = 0 \quad \textit{nur für} \quad x = 0 \tag{5}$$

erfüllt ist. Dann sind alle minimalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale I in R symmetrisch.

Beweis. Die Abbildung $x \to x^*$ führt ein minimales abgeschlossenes zweiseitiges Ideal I in ein minimales abgeschlossenes zweiseitiges Ideal I^* über. Wäre $I^* \neq I$, so hätten wir $I^* I = (0)$ und folglich $x^* x = 0$ für alle $x \in I$, was der Bedingung (5) widerspricht.

Die beiden folgenden Sätze sind Spezialfälle von Theorem 5.

Theorem 6. *Es sei $\{R_\alpha\}$ eine Menge dualer Algebren und R die Algebra aller Komplexe $x = \{x_\alpha\}$, $x_\alpha \in R_\alpha$, in denen nur endlich viele Elemente x_α von Null verschieden sind. Die Verknüpfungsoperationen in R seien durch die Formeln*

$$\lambda x = \{\lambda x_\alpha\}, \quad x + y = \{x_\alpha + y_\alpha\}, \quad xy = \{x_\alpha y_\alpha\}$$

---

[1]) In diesem Paragraphen wollen wir die Algebra R *einfach* nennen, wenn sie keine abgeschlossenen zweiseitigen Ideale enthält.

gegeben, wobei $x = \{x_\alpha\}$, $y = \{y_\alpha\}$ *ist. Ferner sei in* R *eine Topologie gegeben, mit der* R *eine topologische Algebra wird und deren Einschränkung auf jedes* R_α *schwächer als die ursprüngliche Topologie in* R_α *ist oder mit dieser übereinstimmt. Dann ist* R *eine duale Algebra.*

Beweis. Wir vereinbaren, zwischen dem Element x_{α_0} und dem Komplex $x = \{x_\alpha\}$, in welchem $x_\alpha = 0$ für $\alpha \neq \alpha_0$ ist, nicht zu unterscheiden. Dann können wir sagen, daß R aus allen möglichen Summen der Elemente $x_\alpha \in R_\alpha$ besteht, wobei $x_\alpha x_\beta = x_\beta x_\alpha = 0$ für $\alpha \neq \beta$ ist.

Es sei jetzt I_r ein abgeschlossenes (eigentliches oder uneigentliches) Rechtsideal in R und $I_r^{(\alpha)}$ die Gesamtheit aller α-ten Komponenten der Elemente $\{x_\alpha\} \in I_r$. Ist $x_\alpha \in I_r^{(\alpha)}$ und $y_\alpha \in R_\alpha$, so ist $x_\alpha y_\alpha \in I_r$, so daß $I_r^{(\alpha)} R_\alpha \subset I_r$. Nun ist $I_r^{(\alpha)} R_\alpha$ auf Grund von Nr. 1, Satz III, in $I_r^{(\alpha)}$ dicht, und folglich ist auch $I_r^{(\alpha)} \subset I_r$. Daraus ergibt sich $I_r^{(\alpha)} = I_r \cap R_\alpha$, d. h., $I_r^{(\alpha)}$ ist ein abgeschlossenes (eigentliches oder uneigentliches) Ideal in R_α.

Offenbar besteht $\mathfrak{L}(I_r)$ genau aus denjenigen $y = \{y_\alpha\}$, für die $y_\alpha I_r^{(\alpha)} = (0)$ gilt, d. h. für die sich y_α im Linksannullator $\mathfrak{L}_\alpha(I_r^{(\alpha)})$ des Ideals $I_r^{(\alpha)}$ in R_α befindet. Analog stellt man fest, daß $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r))$ genau aus denjenigen $z = \{z_\alpha\}$ besteht, für welche $z_\alpha \in \mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{L}_\alpha(I_r^{(\alpha)}))$ ist. Da die Algebren R_α dual und die Ideale $I_r^{(\alpha)}$ abgeschlossen sind, gilt $\mathfrak{R}_\alpha(\mathfrak{L}_\alpha(I_r^{(\alpha)})) = I_r^{(\alpha)}$. Also besteht $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r))$ aus allen Elementen $z = \{z_\alpha\}$ mit $z_\alpha \in I_r^{(\alpha)}$, d. h., es ist $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) = I_r$.

Analog gilt $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)) = I_l$ für jedes abgeschlossene (eigentliche oder uneigentliche) Linksideal I_l in R.

Theorem 7. *Es sei* R *eine topologische Algebra, die den folgenden Bedingungen genügt:*

a) $x \in \overline{xR}$ *und* $x \in \overline{Rx}$ *für jedes* $x \in R$;

b) *in* R *existiert ein in* R *dichtes zweiseitiges Ideal* I, *das in einer Topologie, die stärker als die Einschränkung der Topologie von* R *ist oder mit dieser übereinstimmt, eine duale Algebra ist.*

Dann ist R *eine duale Algebra.*

Beweis. Es seien I_r, I_l abgeschlossene (eigentliche oder uneigentliche) Rechts- bzw. Linksideale von R. Auf Grund der Bedingung b) ist dann $I_r \cap I$ ein abgeschlossenes (eigentliches oder uneigentliches) Rechtsideal von I. Außerdem ist $I_r \cap I$ in I_r dicht im Sinne der Topologie in R; denn es ist $I_r I \subset I_r \cap I$, und $I_r I$ ist in $I_r R$ dicht im Sinne der Topologie in R (da nach Voraussetzung I in R dicht ist) und $I_r R$ in I_r dicht wegen Bedingung a). Somit ist

$$\overline{I_r \cap I} = I_r. \tag{6}$$

Daraus folgt, daß $\mathfrak{L}(I_r) \cap I$ genau der Linksannullator des Ideals $I_r \cap I$ von I ist, wobei $\mathfrak{L}$ und im folgenden auch $\mathfrak{R}$ Links- bzw. Rechtsannullatoren in der ganzen Algebra R sind.

Analog läßt sich zeigen, daß $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) \cap I$ genau der Rechtsannullator des Ideals $\mathfrak{L}(I_r) \cap I$ von I ist. Da I dual und das (eigentliche oder uneigentliche) Ideal $I_r \cap I$ in I abgeschlossen ist, folgt $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) \cap I = I_r \cap I$. Nun sind infolge (6) $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r))$ und I_r die abgeschlossenen Hüllen der linken bzw. rechten Seite dieser Beziehung. Daraus folgt $\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) = I_r$ und analog $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)) = I_l$.

4. Einfache Annullatoralgebren. In diesem Abschnitt sei R eine einfache Annullatoralgebra mit stetigen Quasiinversen.

I. *Ist p ein irreduzibles Idempotent, so ist die Algebra pRp dem Körper der komplexen Zahlen isomorph.*

Beweis. Wir zeigen, daß pRp ein Körper ist. Als Teilalgebra von R mit stetigen Quasiinversen ist pRp ein Körper mit stetigen Inversen und folglich dem Körper der komplexen Zahlen isomorph (vgl. § 8, Nr. 5 und 6).

Offenbar ist p Einselement von pRp. Es sei x ein Element aus pRp mit $x \neq 0$. Wir müssen dann beweisen, daß x ein Inverses in pRp besitzt. Es ist Rx ein Linksideal von R, das [wegen Nr. 1 (2)] von (0) verschieden und im minimalen Ideal Rp enthalten ist. Folglich ist $Rx = Rp$. Daraus ergibt sich, daß ein Element $y \in R$ mit $yx = p$ existiert. Dann ist

$$(pyp)\,x = (pyp)(pxp) = pyp\,xp = pyx = pp = p,$$

d. h., pyp ist Linksinverses zu x in pRp. Analog läßt sich beweisen, daß x auch ein Rechtsinverses in pRp hat.

II. *In R existiert ein maximales orthogonales System*[1] *$\{p_\alpha\}$ von irreduziblen Idempotenten. Die Summe der entsprechenden minimalen Linksideale Rp_α bzw. die der minimalen Rechtsideale $p_\alpha R$ ist in R dicht.*

Beweis. Nach Nr. 3, Satz V, enthält R irreduzible Idempotente und auf Grund des Zornschen Lemmas folglich auch ein maximales orthogonales System $\{p_\alpha\}$ von irreduziblen Idempotenten.

Es sei I_l die Summe aller Linksideale Rp_α. Ist $\bar{I}_l \neq R$, so ist $\bar{I}_l$ ein abgeschlossenes Linksideal, d. h., $\mathfrak{R}(\bar{I}_l)$ ist ein von (0) verschiedenes Rechtsideal. Dann folgt aus Nr. 3, Satz V, daß $\mathfrak{R}(\bar{I}_l)$ ein irreduzibles Idempotent besitzt, das zu allen p_α orthogonal ist. Das ist aber nicht möglich, da das System $\{p_\alpha\}$ maximal sein sollte. Also ist die Summe aller Rp_α und analog die Summe aller $p_\alpha R$ in R dicht.

Theorem 8. *Jede einfache Annullatoralgebra R mit stetigen Quasiinversen läßt sich in die Algebra der stetigen linearen Operatoren auf einem lokal konvexen linearen Raum isomorph abbilden derart, daß*

a) *das Bild von R bei diesem Isomorphismus alle endlichdimensionalen*[2] *Operatoren enthält;*

b) *in R eine dichte Teilalgebra R_1 existiert, deren Bild bei diesem Isomorphismus aus endlichdimensionalen Operatoren besteht.*

Ist R überdies eine Banachsche Algebra, so läßt sich dieser Isomorphismus als stetiger Isomorphismus in die Algebra aller Operatoren realisieren, welche Grenzwerte (im Sinne der Operatornorm) der endlichdimensionalen Operatoren über einem Banachschen Raum sind.

---

[1]) Vgl. Nr. 3, S. 331.

[2]) Wir erinnern daran, daß wir einen linearen Operator *endlichdimensional* nennen, wenn sein Wertebereich endlichdimensional ist.

Beweis. Es sei $\{p_\alpha\}$ ein maximales Orthogonalsystem von irreduziblen Idempotenten und p_1 ein festes Idempotent aus $\{p_\alpha\}$. Die Menge Rp_1R ist ein von (0) verschiedenes zweiseitiges Ideal in R. Da R einfach ist, folgt

$$\overline{Rp_1R} = R, \tag{1}$$

also $p_\alpha R p_1 R p_\alpha \neq 0$. Nun ist $p_\alpha R p_1 R p_\alpha \subset p_\alpha R p_\alpha = \{\lambda p_\alpha\}$. Also existieren zwei Elemente x, y aus R, für die

$$p_\alpha x p_1 y p_\alpha = p_\alpha \tag{2}$$

ist. Setzen wir

$$p_{\alpha 1} = p_\alpha x p_1, \quad p_{1\alpha} = p_1 y p_\alpha, \quad p_{\alpha\beta} = p_{\alpha 1} p_{1\beta}, \tag{3}$$

so ist

$$p_{\alpha\alpha} = p_\alpha, \quad p_{\alpha_1\beta_1} p_{\alpha_2\beta_2} = \begin{cases} 0 & \text{für } \beta_1 \neq \alpha_2, \\ p_{\alpha_1\beta_2} & \text{für } \beta_1 = \alpha_2. \end{cases} \tag{4}$$

Aus Formel (3) und der Idempotenz von p_1 folgt nämlich, daß die Gleichung $p_{\alpha\alpha} = p_\alpha$ nichts anderes als die Gleichung (2) ist. Ferner ist

$$p_{1\alpha} p_{\alpha 1} \subset p_1 R p_1 = \{\lambda p_1\}$$

und somit auch $p_{1\alpha} p_{\alpha 1} = \lambda p_1$ für ein gewisses λ. Multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung von links mit $p_{\alpha 1}$ und von rechts mit $p_{1\alpha}$, so erhalten wir $p_\alpha^2 = \lambda p_\alpha$, also $p_\alpha = \lambda p_\alpha$, so daß $\lambda = 1$ und $p_{1\alpha} p_{\alpha 1} = p_1$ ist. Daraus folgt leicht die untere Beziehung der rechten Gleichung von (4). Die obere Beziehung ergibt sich unmittelbar aus der Orthogonalität des Systems $\{p_\alpha\}$.

Die Menge $p_\alpha R p_\beta$ besteht aus den Vielfachen von $p_{\alpha\beta}$. Denn aus

$$p_\alpha z p_{\beta\alpha} \in p_\alpha R p_\alpha = \{\lambda p_\alpha\}$$

folgt $p_\alpha z p_{\beta\alpha} = \lambda p_\alpha$ für ein gewisses λ, und multiplizieren wir beide Seiten dieser Gleichung von rechts mit $p_{\alpha\beta}$ und berücksichtigen wir die zweite der Beziehungen (4), so erhalten wir $p_\alpha z p_\beta = \lambda p_{\alpha\beta}$.

Hieraus und aus (4) folgt, daß die Summe aller $p_\alpha R p_\beta$ eine Teilalgebra R_1 von R ist. R_1 ist in R dicht. Um dies zu beweisen, berücksichtigen wir, daß die Summe aller $p_\alpha R p_\beta$ die lineare Hülle von $\left(\sum_\alpha p_\alpha R\right)\left(\sum_\beta R p_\beta\right)$ enthält, die in der linearen Hülle von $\left(\sum_\alpha p_\alpha R\right) R$ dicht ist, welche ihrerseits in der linearen Hülle der Menge R^2 dicht ist, denn $\sum_\alpha p_\alpha R$ und $\sum_\beta R p_\beta$ sind in R dicht, und das Produkt xy ist stetig in jedem seiner Faktoren. Andererseits ist die lineare Hülle der Menge R^2 ein zweiseitiges Ideal von R und demzufolge in R dicht. Also ist R_1 dicht in R.

Aus (1) folgt außerdem $\overline{xRp_1R} \neq (0)$ für jedes $x \neq 0$, also $xRp_1R \neq (0)$ und

$$xRp_1 \neq (0) \quad \text{für jedes } x \neq 0. \tag{5}$$

Jedem Element $x \in R$ entspricht ein stetiger Operator $A_x y = xy$ einer regulären Linksdarstellung in dem abgeschlossenen, also lokal konvexen Teilraum Rp_1. Infolge (5) ist die Darstellung $x \to A_x$ ein Isomorphismus.

Ist $x = p_{\alpha\beta}$, so folgt aus (4), daß der Operator A_x den eindimensionalen Teilraum $p_\beta R p_1$ in $p_\alpha R p_1$ und alle Teilräume $p_{\beta'} R p_1$ für $\beta' \neq \beta$ in die Null abbildet. Da die Summe aller $p_\beta R p_1$ in $R p_1$ dicht ist, muß somit der Wertebereich des Operators A_x für $x = p_{\alpha\beta}$ eindimensional sein. Dann ist A_x für jedes $x \in R_1$ endlichdimensional, d. h., das Bild von R_1 bei dem Isomorphismus $x \to A_x$ besteht aus endlichdimensionalen Operatoren.

Wir zeigen jetzt, daß unter den A_x, $x \in R$, alle endlichdimensionalen Operatoren auftreten. Dazu genügt es zu beweisen, daß unter den A_x, $x \in R$, alle eindimensionalen Operatoren vorkommen.

Es sei A ein eindimensionaler stetiger Operator auf $R p_1$ und b ein Element aus $R p_1$ mit $A b \neq 0$. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{N}$ die abgeschlossene Gesamtheit aller Elemente aus $R p_1$, auf denen A verschwindet. Dann ist $R p_1 = \{\lambda b\} \dotplus \mathfrak{N}$. Außerdem gilt $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}) \neq (0)$. Denn wäre $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}) = (0)$, so wäre auch $\mathfrak{L}(\mathfrak{N} R) = \mathfrak{L}(\mathfrak{N}) = (0)$; da die abgeschlossene lineare Hülle $[\mathfrak{N} R]$ von $\mathfrak{N} R$ ein (eigentliches oder uneigentliches) Rechtsideal von R ist, folgt $[\mathfrak{N} R] = R$ aus $\mathfrak{L}([\mathfrak{N} R]) = 0$; außerdem ist $\mathfrak{N} = \mathfrak{N} p_1$, so daß $[\mathfrak{N} p_1 R p_1] = R p_1$ wäre, und mit Hilfe der Beziehung $p_1 R p_1 = \{\lambda p_1\}$ erhielten wir die Gleichung $\mathfrak{N} = R p_1$, was nicht möglich ist.

Es ist also $\mathfrak{L}(\mathfrak{N}) \neq (0)$. Ferner sei a ein von Null verschiedenes Element aus $\mathfrak{L}(\mathfrak{N})$. Dann ist $ab \neq 0$; denn für $ab = 0$ würde $a R p_1 = a[\{\lambda b\} \dotplus \mathfrak{N}] = (0)$ gelten, was aber (5) widerspricht. In diesem Fall ist Rab ein von (0) verschiedenes Linksideal, das in dem minimalen Linksideal $R p_1$ enthalten ist, und hieraus folgt $Rab = R p_1$. Insbesondere existiert ein $x \in R$ mit $xab = Ab$. Das bedeutet, daß die Operatoren A_{xa} und A auf dem Element b übereinstimmen. Da außerdem $A_{xa}\mathfrak{N} = xa\mathfrak{N} = (0) = A\mathfrak{N}$ (wegen $a \in \mathfrak{L}(\mathfrak{N})$) ist, gilt sogar $A_{xa} = A$. Damit ist der erste Teil des Satzes bewiesen.

Wir nehmen jetzt an, R sei eine Banachsche Algebra. Dann ist $R p_1$ als abgeschlossene Teilalgebra von R ein Banachscher Raum, und alle Operatoren A_x sind in ihm beschränkt. Wegen $|A_x| \leqq |x|$ (vgl. § 9, Nr. 5 (2)) ist der Isomorphismus $x \to A_x$ stetig, und jeder Operator A_x ist Limes (im Sinne der Operatornorm) von endlichdimensionalen Operatoren A_{x_n}, $x_n \in R_1$.

Bemerkung. *Es erfülle R die Voraussetzungen von Theorem* 8, *und ferner sei R eine symmetrische Algebra, in der $x^* x$ nur für $x = 0$ verschwindet. Dann lassen sich die Elemente $p_{\alpha\beta}$ so wählen, daß $p^*_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$ ist.*

Beweis. Wir zeigen zuerst, daß wir alle p_α als hermitesch annehmen können.

Es sei p ein irreduzibles Idempotent. Dann ist $pRp = \{\lambda p\}$ und folglich $pp^*p = \lambda p$ für ein gewisses λ. Daraus ergibt sich

$$pp^*pp^* = \lambda pp^*. \tag{6}$$

Wegen $p \neq 0$ ist auch $pp^* \neq 0$ und $pp^*pp^* = (pp^*)^* pp^* \neq 0$. Also ist $\lambda \neq 0$. Außerdem ist λ reell, da beide Seiten in (6) hermitesch sind. Setzen wir $p' = \lambda^{-1} pp^*$, so ist $p' \neq 0$, $p'^* = p'$ und wegen (6) auch $p'^2 = p'$. Folglich ist p' ein hermitesches Idempotent. Es ist auch irreduzibel. Es ist nämlich

$$p' R = \lambda^{-1} pp^* R$$

ein Rechtsideal, das in dem minimalen Rechtsideal pR enthalten und (wegen $p = \lambda^{-1} p p^* p \in p' R$) von (0) verschieden ist; also gilt $p' R = pR$. Dann ergibt sich aber auf Grund von Nr. 3, Satz V, daß jedes Rechts- und jedes Linksideal ein irreduzibles hermitesches Idempotent enthält. Hieraus und aus Satz II erkennen wir, daß in R ein maximales orthogonales System $\{p_\alpha\}$ hermitescher irreduzibler Idempotente existiert.

Aus

$$p_{\alpha\beta} = p_\alpha p_{\alpha\beta} p_\beta$$

folgt $p^*_{\alpha\beta} = p_\beta p^*_{\alpha\beta} p_\alpha \in p_\beta R p_\alpha$ und

$$p^*_{\alpha\beta} = \lambda_{\beta\alpha} p_{\beta\alpha} \tag{7}$$

für ein gewisses $\lambda_{\beta\alpha}$. Wenden wir die Operation der Involution auf beide Seiten von (7) an, so folgt $p_{\alpha\beta} = \bar{\lambda}_{\beta\alpha} p^*_{\beta\alpha} = \bar{\lambda}_{\beta\alpha} \lambda_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}$. Somit ist

$$\lambda_{\alpha\beta} \bar{\lambda}_{\beta\alpha} = 1. \tag{8}$$

Andererseits gilt nacheinander $p_{\alpha\beta} p_{\beta\alpha} = p_\alpha$, $p^*_{\beta\alpha} p^*_{\alpha\beta} = p_\alpha$, $\lambda_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta} \lambda_{\beta\alpha} p_{\beta\alpha} = p_\alpha$, $\lambda_{\alpha\beta} \lambda_{\beta\alpha} p_\alpha = p_\alpha$, woraus $\lambda_{\alpha\beta} \lambda_{\beta\alpha} = 1$ folgt. Ein Vergleich mit (8) ergibt $\lambda_{\beta\alpha} = \bar{\lambda}_{\beta\alpha}$, d. h., alle Zahlen $\lambda_{\alpha\beta}$ sind reell, und es ist $\lambda^2_{\alpha\beta} = 1$, also $\lambda_{\alpha\beta} = \pm 1$. Ersetzen wir $p_{\alpha\beta}$ durch $i p_{\alpha\beta}$ für $\lambda_{\alpha\beta} = -1$, so erhalten wir ein System von Elementen $p_{\alpha\beta}$, das der Bedingung $p^*_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$ genügt.

5. Hilbertsche Algebren. Wir nennen eine Menge R von Elementen $x, y, z, \ldots$ eine HILBERT*sche Algebra* oder H^*-*Algebra*[1]), wenn

a) R eine BANACHsche symmetrische Algebra ist;

b) R ein HILBERTscher Raum ist;

c) die Norm in der Algebra R mit der Norm in dem HILBERTschen Raum R übereinstimmt;

d) $\langle xy, z\rangle = \langle y, x^* z\rangle$ für alle $x, y, z \in R$ gilt;

e) $x^* x \neq 0$ für $x \neq 0$ ist.

Aus $|x^*| = |x|$ folgt $\langle x^*, x^*\rangle = \langle x, x\rangle$. Hieraus erhalten wir, wenn wir die Darstellung des Skalarprodukts durch die Norm benutzen,

$$\langle x^*, y^*\rangle = \langle y, x\rangle.$$

Kombinieren wir diese Beziehung mit der Eigenschaft d), so ergibt sich

$$\langle xy, z\rangle = \langle x, zy^*\rangle.$$

Eine H^*-Algebra ist z. B. die Gesamtheit $X(\mathfrak{A})$ aller Matrizen $x = \|x_{\alpha\beta}\|$, $\alpha, \beta \in \mathfrak{A}$ ($\mathfrak{A}$ ist eine feste Indexmenge), die der Bedingung

$$\sum |x_{\alpha\beta}|^2 < \infty$$

genügen. In dieser Gesamtheit gelten die Operationen für Matrizen; das Skalarprodukt wird durch die Formel

$$\langle x, y\rangle = \omega \sum_{\alpha, \beta} x_{\alpha\beta} \bar{y}_{\alpha\beta}$$

definiert, wobei ω eine feste Zahl $\geqq 1$ ist.

---

[1]) Diese Bezeichnung wird in der Literatur oft benutzt (vgl. etwa KAPLANSKY [3]).

Später werden wir zeigen, daß jede H^*-Algebra isomorph ist der direkten und orthogonalen Summe von Algebren $X(\mathfrak{A})$. In diesem Abschnitt sei R stets eine H^*-Algebra.

Jedem Element $x \in R$ entspricht ein Operator A_x des HILBERTschen Raumes R, nämlich der Operator der regulären Linksdarstellung

$$A_x y = xy.$$

Dabei besagt die Bedingung d), daß $(A_x)^* = A_{x^*}$ ist.

Aus $A_x = 0$ folgt $xy = 0$ für alle $y \in R$. Setzen wir $y = x^*$, so erhalten wir $xx^* = 0$. Auf Grund von e) ergibt sich hieraus $x^* = 0$ und somit $x = 0$. Deshalb ist die reguläre Linksdarstellung $x \to A_x$ ein symmetrischer Isomorphismus der Algebra R in die Algebra der beschränkten Operatoren von R. Da jede symmetrische Algebra beschränkter Operatoren eines HILBERTschen Raumes halbeinfach ist (vgl. § 24, Nr. 1, Satz II), muß R eine halbeinfache Algebra sein.

I. *Sind I_r und I_l abgeschlossene (eigentliche oder uneigentliche) Rechts- bzw. Linksideale von R, so bilden $\mathfrak{L}(I_r)$ und $\mathfrak{R}(I_l)$ orthogonale Komplemente der Mengen I_r^* bzw. I_l^* im HILBERTschen Raum R.*

Beweis. Wir weisen darauf hin, daß $I_r R$ und $R I_l$ in I_r bzw. I_l dicht sind. Denn wäre etwa $I_r R$ nicht dicht in I_r, so würde ein Element $y_0 \in I_r$, $y_0 \neq 0$, existieren, für das $\langle I_r R, y_0 \rangle = 0$ ist. Daraus würde $0 = \langle R I^*, y_0^* \rangle = \langle R, y_0^* I_r \rangle$, $y_0^* I_r = (0)$ und insbesondere $y_0^* y_0 = 0$ folgen, was aber der Bedingung e) widerspricht. Nun läßt sich die Beziehung $\mathfrak{L}(I_r) = R - I_r^*$ aus

$$x \in \mathfrak{L}(I_r), \quad x I_r = (0), \quad \langle x I_r, R \rangle = 0, \quad \langle x, R I_r^* \rangle = 0,$$

$$\langle x, I_r^* \rangle = 0, \quad x \in R - I_r^*$$

ablesen. Analog beweist man $\mathfrak{R}(I_l) = R - I_l^*$.

II. *Jede H^*-Algebra ist dual.*

Beweis. Sind I_l, I_r abgeschlossene (eigentliche oder uneigentliche) Links- bzw. Rechtsideale von R, so ist auf Grund von Satz I

$$\mathfrak{R}(\mathfrak{L}(I_r)) = \mathfrak{R}(R - I_r^*) = R - (R - I_r) = I_r$$

und analog $\mathfrak{L}(\mathfrak{R}(I_l)) = I_l$.

Theorem 9. *Jede H^*-Algebra ist die direkte und gleichzeitig orthogonale Summe ihrer abgeschlossenen minimalen zweiseitigen Ideale, die einfache H^*-Algebren sind.*

Beweis. Auf Grund von Nr. 3, Theorem 5 und Folgerung, sind die minimalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale I von R einfache H^*-Algebren, und R ist die abgeschlossene Hülle ihrer direkten Summe. Daher genügt es zu zeigen, daß die voneinander verschiedenen minimalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale I und I' zueinander orthogonale Teilräume des HILBERTschen Raumes R sind. Es ist aber $II' = (0)$ und folglich nach Satz I

$$I' \subset \mathfrak{R}(I) = R - I^* = R - I.$$

Theorem 10. *Jede einfache H^*-Algebra ist einer Algebra $X(\mathfrak{A})$ vollisomorph.*

Beweis. Es seien $p_{\alpha\beta}$ die im Beweis von Theorem 8 konstruierten Elemente. Auf Grund der Bemerkung aus Nr. 4 (S. 339) können wir $p^*_{\alpha\beta} = p_{\beta\alpha}$ annehmen. Dem Beweis von Theorem 8 entnehmen wir ferner, daß die Summe der eindimensionalen Teilräume $p_\alpha R p_\beta = \{\lambda p_{\alpha\beta}\}$ in R dicht ist. Diese eindimensionalen Teilräume sind zueinander orthogonal, denn es ist

$$\langle p_{\alpha\beta}, p_{\alpha'\beta'}\rangle = \langle p_{\alpha\beta}, p_{\alpha'} p_{\alpha'\beta'} p_{\beta'}\rangle = \langle p_{\alpha'} p_{\alpha\beta} p_{\beta'}, p_{\alpha'\beta'}\rangle = 0 \tag{1}$$

für $\alpha' \neq \alpha$ oder $\beta' \neq \beta$. Folglich ist die direkte Summe dieser eindimensionalen Teilräume genau gleich R, d. h., die Elemente $p_{\alpha\beta}$ bilden ein vollständiges Orthogonalsystem in R.

Wir bemerken noch, daß

$$\langle p_{\alpha\beta}, p_{\alpha\beta}\rangle = \langle p_{\alpha 1} p_{1\beta}, p_{\alpha 1} p_{1\beta}\rangle = \langle p_{1\beta} p_{\beta 1}, p_{1\alpha} p_{\alpha 1}\rangle = \langle p_1, p_1\rangle \tag{2}$$

ist.

Jedem Element $x \in R$ entspricht eine Matrix $\|x_{\alpha\beta}\|$ derart, daß $x = \sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}$. Aus den Eigenschaften der $p_{\alpha\beta}$ und den Beziehungen (1) und (2) folgt, daß für $x = \sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}$ und $y = \sum_{\alpha,\beta} y_{\alpha\beta} p_{\alpha\beta}$

$$\langle x, y\rangle = \omega \sum_{\alpha,\beta} x_{\alpha\beta} \overline{y_{\alpha\beta}}$$

mit $\omega = \langle p_1, p_1\rangle$ gilt und die Beziehung $x \to \|x_{\alpha\beta}\|$ ein symmetrischer Isomorphismus der Algebra R auf die Algebra $X(\mathfrak{A})$ ist.

Aus den Theoremen 9 und 10 folgt

Theorem 11. *Jede H^*-Algebra R ist der direkten und orthogonalen Summe von Algebren $X(\mathfrak{A})$ vollisomorph.*

Theorem 12. *Für eine einfache H^*-Algebra R sind die folgenden Behauptungen einander äquivalent:*

a) *R ist endlichdimensional;*

b) *R ist eine Algebra mit Einselement;*

c) *das Zentrum von R ist von (0) verschieden.*

Beweis. Ist R endlichdimensional, so ist das Maximalsystem $\{p_\alpha\}$ irreduzibler Idempotente endlich, und das Element $p = \sum_\alpha p_\alpha$ ist ein Idempotent, das den Bedingungen

$$x = \sum_\alpha x p_\alpha = x p, \quad x = \sum_\alpha p_\alpha x = p x$$

genügt, d. h., p ist Einselement in R. Also folgt b) aus a). Ist ferner das Einselement p in I enthalten, so enthält das Zentrum der Algebra R ebenfalls p und ist daher ungleich (0). Also folgt c) aus b).

Es sei jetzt das Zentrum von R verschieden von (0) und $x \neq 0$ ein Element des Zentrums von R. Aus $x p_\alpha = (x p_\alpha) p_\alpha = p_\alpha x p_\alpha$ folgt auf Grund von Satz I aus Nr. 4 die Beziehung $x p_\alpha = c_\alpha p_\alpha$, wobei c_α eine Zahl ist. Hieraus ergibt sich $x = \sum_\alpha x p_\alpha = \sum_\alpha c_\alpha p_\alpha$. Nun ist aber

$$c_\beta p_{\beta\delta} = c_\beta p_\beta p_{\beta\delta} = x p_\beta p_{\beta\delta} = x p_{\beta\delta} = p_{\beta\delta} x = p_{\beta\delta} p_\delta x = p_{\beta\delta} c_\delta p_\delta = c_\delta p_{\beta\delta},$$

also $c_\beta = c_\delta$. Somit sind in der Summe $\sum_\alpha c_\alpha p_\alpha$ alle Koeffizienten c_α gleich, was nur dann möglich ist, wenn $\{p_\alpha\}$ ein endliches System und R endlichdimensional ist. Also folgt a) aus c). Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Gleichzeitig sehen wir, daß jedes Element aus dem Zentrum von R die Gestalt $x = \sum c p_\alpha = c \sum p_\alpha = c p$ hat, wobei p das Einselement von R ist.

6. Vollreguläre duale Algebren.

Theorem 13. *Die Gesamtheit R aller vollstetigen Operatoren eines* HILBERT*schen Raumes $\mathfrak{H}$ ist eine einfache duale Algebra.*

Beweis. Es sei $\{\varphi_\alpha\}$ ein festes vollständiges Orthonormalsystem in $\mathfrak{H}$. Mit I bezeichnen wir die Gesamtheit aller Operatoren A von $\mathfrak{H}$, deren Matrix $\|a_{\alpha\beta}\|$ im System $\{\varphi_\alpha\}$ die Bedingung

$$\sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha\beta}|^2 < \infty$$

erfüllt. Diese Operatoren A sind vollstetig (vgl. § 4, Nr. 6, Satz V; man sieht leicht, daß dies auch in einem nichtseparablen Raum l^2 gilt). Folglich bildet I mit dem Skalarprodukt

$$\langle A, B\rangle = \sum_{\alpha,\beta} a_{\alpha\beta} \overline{b}_{\alpha\beta} \quad (A, B \in I),$$

wobei $\|a_{\alpha\beta}\|$, $\|b_{\alpha\beta}\|$ die Matrizen der Operatoren A bzw. B sind, eine HILBERTsche und demnach auch duale Algebra. Wir zeigen jetzt, daß auf R und I das Theorem 7 aus Nr. 3 angewendet werden kann.

Wir weisen zunächst darauf hin, daß I ein zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und somit auch von R ist. In der Tat, ist $A \in I$, $C \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und $\|c_{\alpha\beta}\|$ die Matrix des Operators C im System $\{\varphi_\alpha\}$, so ist die Matrix des Operators CA im gleichen System durch die Formel $\|\sum_\gamma c_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}\|$ gegeben. Da C beschränkt ist, gilt

$$\sum_\beta \sum_\alpha \left|\sum_\gamma c_{\alpha\gamma} a_{\gamma\beta}\right|^2 \leqq |C|^2 \sum_\beta \sum_\alpha |a_{\alpha\beta}|^2 < \infty.$$

Folglich ist $CA \in I$ und $AC = (C^* A^*)^* \in I$. Da R wegen § 22, Nr. 1, Satz V, eine einfache Algebra ist, muß I in R im Sinne der Operatornorm dicht sein. Ferner ist die Norm des Operators $A \in I$ nicht größer als seine Norm im Sinne des HILBERTschen Raumes I. Ist nämlich $x = \sum_\alpha x_\alpha \varphi_\alpha$ ein beliebiges Element aus $\mathfrak{H}$, so folgt aus der SCHWARZschen Ungleichung

$$|Ax|^2 = \sum_\alpha \left|\sum_\beta a_{\alpha\beta} x_\beta\right|^2 \leqq \sum_\alpha \sum_\beta |a_{\alpha\beta}|^2 |x_\beta|^2 \leqq \langle A, A\rangle \sum_\beta |x_\beta|^2 = \langle A, A\rangle |x|^2,$$

so daß $|A| \leqq \sqrt{\langle A, A\rangle}$ ist. Hieraus können wir schließen, daß die Einschränkung der Topologie von R auf I schwächer ist als die Topologie der H^*-Algebra oder mit ihr übereinstimmt.

Schließlich sei $A \in R$, $A = UH$ die kanonische Zerlegung des Operators A und $P(\lambda)$ eine Spektralschar des Operators H. Wir setzen $P_\varepsilon = 1 - P(\varepsilon)$, $\varepsilon > 0$. Dann ist P_ε endlichdimensional, also $P_\varepsilon \in R$, und im Sinne der Operatornorm ist $HP_\varepsilon \to H$, d. h., es ist $AP_\varepsilon = UHP_\varepsilon \to UH = A$ für $\varepsilon \to 0$ (vgl. §17,

Nr. 4, Satz VI). Dies bedeutet $A \in \overline{AR}$. Ersetzen wir hier A durch A^*, so erhalten wir $A^* \in \overline{A^*R}$, also $A \in \overline{RA}$.

Somit genügen die Algebren R und I allen Bedingungen aus Theorem 7 von Nr. 3. R ist also eine duale Algebra.

Das folgende Theorem besagt, daß die Algebra aller vollstetigen Operatoren eines HILBERTschen Raumes das geeignete Modell für alle vollständigen vollregulären einfachen dualen Algebren ist.

Theorem 14. *Jede vollständige vollreguläre einfache duale Algebra ist der Algebra aller vollstetigen Operatoren eines* HILBERT*schen Raumes vollisomorph.*

Beweis. Es mögen p_α und $p_{\alpha\beta}$ dieselbe Bedeutung wie im Beweis von Theorem 8 (Nr. 4) haben. Wegen der Bemerkung am Schluß von Nr. 4 können wir jetzt $p_\alpha^* = p_\alpha$ und $p_{\alpha\beta}^* = p_{\beta\alpha}$ annehmen. Ferner ist R auf Grund von Theorem 8 der Algebra der Operatoren der regulären Linksdarstellung $A_a x = ax$ im Raum Rp_1 isomorph. Aus $x, y \in Rp_1$ folgt $y^*x \in p_1 R p_1 = \{\lambda p_1\}$, so daß $y^*x = \lambda p_1$ ist. Das Skalarprodukt in Rp_1 definieren wir durch $\langle x, y\rangle = \lambda$, so daß

$$y^*x = \langle x, y\rangle p_1$$

ist. Man kann leicht nachweisen, daß alle Eigenschaften des Skalarprodukts erfüllt sind. Insbesondere folgt $\langle x, x\rangle \geqq 0$ aus der Beziehung

$$x^*x = \langle x, x\rangle p_1 = \langle x, x\rangle p_1^2,$$

da die Elemente der Form x^*x in der vollregulären Algebra R einen Kegel bilden (vgl. § 24, Nr. 2), in dem $p_1^2 = p_1$ liegt und dem daher nur Elemente λp_1 mit $\lambda \geqq 0$ angehören können. Aus $\langle x, x\rangle = 0$ folgt $x^*x = 0$ und damit $x = 0$.

Wir bemerken, daß aus $p_1^2 = p_1$ und $p_1^* = p_1$ die Beziehung $|p_1| = |p_1|^2$, also $|p_1| = 1$ folgt. Daraus ergibt sich

$$|x|^2 = |x^*x| = \langle x, x\rangle |p_1| = \langle x, x\rangle$$

für $x \in Rp_1$, so daß die Norm in Rp_1 im Sinne des HILBERTschen Raumes mit der ursprünglichen Norm übereinstimmt. Ferner ist für $a \in R$ und $x, y \in Rp_1$

$$\langle ax, y\rangle p_1 = y^*ax = (a^*y)^*x = \langle x, a^*y\rangle p_1,$$

woraus sich $\langle ax, y\rangle = \langle x, a^*y\rangle$, also $\langle A_a x, y\rangle = \langle x, A_{a^*} y\rangle$ ergibt. Es ist somit $A_{a^*} = (A_a)^*$, d. h., die Zuordnung $a \to A_a$ ist ein symmetrischer Isomorphismus der vollständigen vollregulären Algebra R in die Algebra der in Rp_1 beschränkten Operatoren. Auf Grund von § 24, Nr. 1, Theorem 3, schließen wir hieraus, daß dieser Isomorphismus die Norm invariant läßt, d. h., daß $|A_a| = |a|$ ist.

Nun ist nach Theorem 8 jeder Operator A_a Limes (im Sinne der Operatornorm) von endlichdimensionalen Operatoren und somit vollstetig. Andererseits treten ebenfalls nach Theorem 8 unter den Operatoren A_a alle endlichdimensionalen Operatoren und folglich auch alle ihre Limites auf (denn die Gesamtheit aller Operatoren A_a, $a \in R$, ist eine vollständige Algebra), d. h. alle vollstetigen Operatoren.

Wir gehen jetzt zu beliebigen vollregulären dualen Algebren über und untersuchen folgende allgemeine Konstruktionsmethode.

Es sei T ein diskreter Raum. Nehmen wir zu T den unendlich fernen Punkt hinzu, so wird T bikompakt. Wir setzen voraus, daß jedem $t \in T$ eine vollreguläre Algebra R_t entspricht. Mit $C_\infty(T, R_t)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Vektorfunktionen $x = x(t)$ mit $x(t) \in R_t$, die der Bedingung

$$|x(t)| \to 0 \quad \text{für } t \to \infty$$

genügen. Diese Gesamtheit bildet eine vollständige vollreguläre Algebra, wenn wir für $x = \{x(t)\}$, $y = \{y(t)\}$

$$\lambda x = \{\lambda x(t)\}, \quad x + y = \{x(t) + y(t)\},$$
$$xy = \{x(t)\, y(t)\}, \quad x^* = \{x(t)^*\}, \quad |x| = \sup_{t \in T} |x(t)|$$

setzen.

Berücksichtigen wir die Theoreme 5, 6 und 7, so können wir folgendes behaupten:

I. *Sind alle Algebren R_t dual, so ist auch $C_\infty(T, R_t)$ dual.*

II. *Jede vollständige vollreguläre duale Algebra ist eine Algebra der Form $C_\infty(T, R_t)$, wobei die R_t alle minimalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale von R und somit einfache vollständige vollreguläre duale Algebren sind.*

§ 26. Algebren von Vektorfunktionen

1. Definition einer Algebra von Vektorfunktionen. Es sei T ein topologischer Raum, und es entspreche jedem Punkt $t \in T$ eine BANACHsche Algebra R_t. Mit $\mathfrak{C}(T, R_t)$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Vektorfunktionen $x = \{x(t)\}$, die folgende Eigenschaften besitzen:

a) Es ist $x(t) \in R_t$ für $t \in T$;

b) $|x(t)|$ ist eine beschränkte, auf T stetige Funktion.

Für $x = \{x(t)\}$, $y = \{y(t)\} \in \mathfrak{C}(T, R_t)$ setzen wir

$$\alpha x = \{\alpha x(t)\}, \quad x + y = \{x(t) + y(t)\}, \qquad xy = \{x(t)\, y(t)\} \tag{1}$$

und definieren die Norm

$$|x| = \sup_{t \in T} |x(t)|. \tag{2}$$

Wir nennen jede Teilmenge $\mathfrak{R}$ von $\mathfrak{C}(T, R_t)$, die eine BANACHsche Algebra bildet, eine *von T und R_t erzeugte Algebra von Vektorfunktionen* und bezeichnen sie mit $\mathfrak{R}(T, R_t)$.

Ist etwa T ein diskreter Raum, der aus n Punkten $t_1, \ldots, t_n$ (n endlich) besteht, so können wir die Funktion $x = \{x(t)\}$ mit dem System $x = \{x_1, \ldots, x_n\}$ identifizieren, wenn wir $x_k = x(t_k)$ $(\in R_{t_k})$ setzen. Offenbar ist dann die Bedingung b) überflüssig, und $\mathfrak{C}(T, R_t)$ selbst stellt eine BANACHsche Algebra dar, wobei jetzt die Formeln (1) und (2) folgende Gestalt annehmen:

$$\alpha x = \{\alpha x_1, \ldots, \alpha x_n\}, \quad x + y = \{x_1 + y_1, \ldots, x_n + y_n\},$$
$$xy = \{x_1 y_1, \ldots, x_n y_n\}, \quad |x| = \max(|x_1|, \ldots, |x_n|).$$

In diesem Fall nennen wir $\mathfrak{C}(T, R_t)$ die *direkte Summe der Algebren* $R_{t_1}, \ldots, R_{t_n}$ und bezeichnen sie mit $R_{t_1} + \cdots + R_{t_n}$.

Stimmen insbesondere die Algebren R_t mit einer festen BANACHschen Algebra R überein, so erhält die Summe die Gestalt $R + \cdots + R$. Wir nennen sie dann die *n-fache Wiederholung von R.*

Die Verallgemeinerung dieses Falles erhalten wir, wenn T ein beliebiger topologischer Raum ist und alle Algebren R_t wie eben mit einer festen BANACHschen Algebra R übereinstimmen. Dann ist beispielsweise die Algebra $\mathfrak{C}(T, R)$ die Gesamtheit aller stetigen Vektorfunktionen $x = \{x(t)\}$ mit Werten aus R, die der Norm nach beschränkt sind. Diese Gesamtheit bezeichnen wir mit $C(T, R)$. Analog dem Vorhergehenden nennen wir $C(T, R)$ die *stetige Wiederholung von R bezüglich T.* Ist insbesondere R der Körper der komplexen Zahlen, so stimmt $C(T, R)$ mit der Algebra $C(T)$ aller beschränkten und auf T stetigen Zahlenfunktionen überein. Ist R der Körper der reellen Zahlen, so stimmt $C(T, R)$ mit der Algebra $C^r(T)$ aller reellen, beschränkten und auf T stetigen Funktionen überein.

Es sei $\mathscr{F}$ eine Familie von Zahlenfunktionen, die auf T definiert sind. Wir nennen die Algebra $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *bezüglich der Multiplikation mit einer Funktion aus* $\mathscr{F}$ *abgeschlossen*, wenn aus $\{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ und $\{\alpha(t)\} \in \mathscr{F}$ folgt, daß auch $\{\alpha(t)x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$. Insbesondere spricht man von der Abgeschlossenheit von $\mathfrak{R}(T, R_t)$ bezüglich der Multiplikation mit einer Funktion aus $C(T)$ bzw. $C^r(T)$.

Es sei S eine beliebige Menge aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$. Die Gesamtheit der von allen Funktionen $x = \{x(t)\} \in S$ in einem festen Punkt $t_0 \in T$ angenommenen Werte $x(t_0)$ nennen wir die *Projektion der Menge S auf* R_{t_0} und bezeichnen sie mit S_{t_0}. Offenbar ist

$$S_{t_0} \subset R_{t_0},$$

wobei S_{t_0} im allgemeinen nicht mit R_{t_0} übereinstimmt. Insbesondere kann auch die Projektion $\mathfrak{R}_{t_0}(T, R_t)$ von $\mathfrak{R}(T, R_t)$ auf R_{t_0} echt in R_{t_0} enthalten sein.

2. Ideale einer Algebra von Vektorfunktionen.

Theorem 1. *Es sei T ein HAUSDORFFscher bikompakter Raum, wobei zu jedem Punkt t von T eine BANACHsche Algebra* R_t *gegeben sei, und die Algebra* $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *genüge folgenden Bedingungen:*

a) $\mathfrak{R}_t(T, R_t) = R_t$ *für alle* $t \in T$;

b) *für jede stetige reelle Zahlenfunktion* $\alpha(t)$ *und jedes Element* $x = \{x(t)\}$ *von* $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *gehört die Funktion* $\{\alpha(t)x(t)\}$ *dem von x erzeugten abgeschlossenen Ideal von* $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *an.*

Dann ist jedes abgeschlossene Rechtsideal, Linksideal bzw. zweiseitige Ideal I von $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *gleich der Gesamtheit aller Vektorfunktionen* $x = \{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$, *die der Bedingung*

$$x(t) \in I_t \quad \text{für alle } t \in T$$

genügen, wobei die I_t *abgeschlossene (eigentliche oder uneigentliche) Rechtsideale, Linksideale bzw. zweiseitige Ideale von* R_t *sind.*

Beweis. Es sei I_t die Projektion des Ideals I auf R_t; wir setzen $H_t = \bar{I}_t$. Offenbar ist H_t ein abgeschlossenes (eigentliches oder uneigentliches) Ideal von R_t. Ferner sei $y = \{y(t)\}$ ein beliebiges Element aus $\Re(T, R_t)$, das der Bedingung

$$y(t) \in H_t \quad \text{für alle } t \in T$$

genügt. Wir zeigen, daß $y \in I$. Wegen $H_t = \bar{I}_t$ existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $x = \{x_\tau(t)\}$ in I mit $|x_\tau(\tau) - y(\tau)| < \varepsilon$. Wegen der Stetigkeit gilt auch $|x_\tau(t) - y(t)| < \varepsilon$ in einer gewissen Umgebung $U(\tau)$ des Punktes τ. Unter diesen Umgebungen $U(\tau)$ existieren endlich viele Umgebungen $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$, die T überdecken. Es sei $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$ eine entsprechende Zerlegung des Einselements mit Hilfe stetiger nichtnegativer Zahlenfunktionen (vgl. § 15, Nr. 2, Satz II). Dann ist wegen b)

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\, x_{\tau_k}(t)\right\} \in I. \tag{1}$$

Andererseits ist

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)\, x_{\tau_j}(t) - y(t)\right| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in T; \tag{2}$$

denn ist t ein beliebiger Punkt aus T, der in den Umgebungen $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_k)$, jedoch nicht in den Umgebungen $U(\tau_{k+1}), \ldots, U(\tau_n)$ liegt, so ist $\alpha_{k+1}(t) = \cdots = \alpha_n(t) = 0$ und $|x_{\tau_j}(t) - y(t)| < \varepsilon$ $(j = 1, \ldots, k)$, woraus

$$\left|\sum_{j=1}^{n} \alpha_j(t)\, x_{\tau_j}(t) - y(t)\right| = \left|\sum_{j=1}^{k} \alpha_j(t)\, [x_{\tau_j}(t) - y(t)]\right|$$
$$\leqq \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(t)\, |x_{\tau_j}(t) - y(t)| < \varepsilon \sum_{j=1}^{k} \alpha_j(t) = \varepsilon$$

folgt. Aus der Abgeschlossenheit von I ergibt sich wegen (1) und (2) sofort $y \in I$. Wir sehen also, daß H_t die Projektion von I auf R_t ist und demzufolge mit I_t übereinstimmt. Folglich ist I_t selbst ein abgeschlossenes Ideal von R_t. Damit ist der Satz bewiesen.

Folgerung. *Es seien T und R_t das gleiche wie in Theorem* 1. *Dann gilt:*

a) *Jedes maximale abgeschlossene Rechtsideal, Linksideal oder zweiseitige Ideal von $\Re(T, R_t)$ besteht aus allen Elementen $x = \{x(t)\}$ von $\Re(T, R_t)$, deren Werte in einem festen Punkt t_0 einem festen maximalen abgeschlossenen Ideal von R_{t_0} angehören;*

b) *ist jede der Algebren R_t einfach, so besteht jedes abgeschlossene zweiseitige Ideal von $\Re(T, R_t)$ aus allen Elementen $x = \{x(t)\}$ von $\Re(T, R_t)$, die auf einer abgeschlossenen Teilmenge von T verschwinden.*

Bei Zusatzvoraussetzungen über die Algebren R_t läßt sich die Bedingung b) von Theorem 1 abschwächen, denn es gilt der folgende Satz:

I. *Es sei T ein* HAUSDORFF*scher bikompakter Raum, und es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

a) $\mathfrak{R}_t(T, R_t) = R_t$ *für alle* $t \in T$;

b) *für jedes* $t \in T$ *und jedes* $y \in R_t$ *gilt* $y \in \overline{yR_t}$;

c) $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *ist bezüglich der Multiplikation mit Funktionen aus* $C^r(T)$ *abgeschlossen.*

Dann gehört das Element $\{\alpha(t)x(t)\}$ *für jedes* $x = \{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ *und jede stetige reelle Zahlenfunktion* $\alpha(t)$ *dem von* $x = \{x(t)\}$ *erzeugten abgeschlossenen Ideal* I_x *von* $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *an.*

Beweis. Es sei $x = \{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ und $\varepsilon > 0$. Dann existiert wegen a) und b) für jeden Punkt $\tau \in T$ ein Element $y_\tau = \{y_\tau(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ mit $|x(\tau)y_\tau(\tau) - x(\tau)| < \varepsilon$. Wegen der Stetigkeit ist auch $|x(t)y_\tau(t) - x(t)| < \varepsilon$ in einer gewissen Umgebung $U(\tau)$. Wir wählen eine endliche Überdeckung $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$ des Raumes T und eine entsprechende Zerlegung des Einselements mit Hilfe stetiger nichtnegativer Funktionen $\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t)$ und setzen $z(t) = \alpha(t) \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t) y_{\tau_j}(t)$. Nach Bedingung c) ist $z = \{z(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$. Wiederholen wir die beim Beweis von Theorem 1 angestellten Überlegungen, so finden wir

$$\left| \sum_{j=1}^{n} \beta_j(t)\, y_{\tau_j}(t)\, x(t) - x(t) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in T$$

und somit

$$\sup_{t \in T} |z(t)\, x(t) - \alpha(t)\, x(t)| < \varepsilon \sup_{t \in T} |\alpha(t)|. \tag{3}$$

Hieraus ergibt sich, daß mit $\{z(t)x(t)\} \in I_x$ auch $\{\alpha(t)x(t)\}$ zu I_x gehört, was zu beweisen war.

Wir weisen darauf hin, daß die Bedingung b) von Satz I offenbar erfüllt ist, wenn jede der Algebren R_t ein Einselement enthält.

Faßt man Satz I und Theorem 1 zusammen, so erhält man das folgende Ergebnis.

II. *Es sei T ein bikompakter* HAUSDORFF*scher Raum und R eine* BANACH*sche Algebra derart, daß* $z \in \overline{zR}$ *für jedes* $z \in R$ *gilt. Dann ist jedes abgeschlossene Ideal I von $C(T, R)$ gleich der Gesamtheit aller stetigen Vektorfunktionen* $x = \{x(t)\}$, *die der Bedingung*

$$x(t) \in I_t \quad \textit{für alle } t \in T$$

genügen, wobei I_t ein abgeschlossenes (eigentliches oder uneigentliches) Ideal von R ist.

Bemerkung. In Satz II läßt sich der bikompakte Raum T durch einen lokal bikompakten Raum und die Algebra $C(T, R)$ durch die Algebra $C_\infty(T, R)$ aller in R stetigen Vektorfunktionen $x = \{x(t)\}$ mit im Unendlichen verschwindenden Werten ersetzen. Denn ist T' die bikompakte Erweiterung

von T, die man durch Hinzufügen des unendlich fernen Punktes erhält, so kann $C_\infty(T, R)$ als Algebra $\Re(T', R_t)$ angesehen werden, in der $R_t = R$ für $t \in T$ und $R_\infty = (0)$ gilt.

3. Die Zugehörigkeit einer Vektorfunktion zu einer Algebra. Die Vektorfunktion $y = \{y(t)\}$ *gehört lokal zur Algebra* $\Re(T, R_t)$ *im Punkt* $\tau \in T$, wenn eine Vektorfunktion $\{x_\tau(t)\} \in \Re(T, R_t)$ und eine Umgebung $U(\tau)$ existieren derart, daß

$$y(t) = x_\tau(t) \quad \text{für alle } t \in U(\tau).$$

Die Vektorfunktion $y = \{y(t)\}$ *gehört lokal zur Algebra* $\Re(T, R_t)$, wenn sie dieser Algebra in allen Punkten $\tau \in T$ lokal angehört.

Wiederholen wir hier die beim Beweis von Theorem 1 aus § 15, Nr. 2, angestellten Überlegungen, so erhalten wir das folgende

Theorem 2. *Es sei T ein bikompakter* HAUSDORFF*scher Raum, und es sei $\Re(T, R_t)$ bezüglich der Multiplikation mit allen stetigen reellen Funktionen $\alpha(t)$ mit Werten im Intervall* $[0, 1]$ *abgeschlossen. Dann ist jede Vektorfunktion $y = \{y(t)\}$, die lokal zu $\Re(T, R_t)$ gehört, in dieser Algebra enthalten.*

Die Vektorfunktion $y = \{y(t)\}$, $y(t) \in R_t$, heißt *stetig bezüglich der Algebra* $\Re(T, R_t)$, wenn für jede Funktion $x = \{x(t)\}$ aus $\Re(T, R_t)$ die Zahlenfunktion $|y(t) - x(t)|$ stetig ist. Stimmen insbesondere alle Algebren R_t mit einer festen Algebra R überein und ist $\Re(T, R)$ eine Teilalgebra von $C(T, R)$, so ist jede auf T stetige Vektorfunktion $y = \{y(t)\}$, $y(t) \in R$, ebenfalls bezüglich $\Re(T, R)$ stetig.

Theorem 3. *Es sei T ein bikompakter* HAUSDORFF*scher Raum, und es genüge die Algebra $\Re(T, R_t)$ den folgenden Bedingungen:*

a) $\Re_t(T, R_t) = R_t$ *für alle* $t \in T$;

b) $\Re(T, R_t)$ *ist bezüglich der Multiplikation mit allen auf T stetigen Funktionen, deren Werte im Intervall* $[0, 1]$ *liegen, abgeschlossen.*

Dann ist jede bezüglich $\Re(T, R_t)$ stetige Vektorfunktion $y = \{y(t)\}$ in $\Re(T, R_t)$ enthalten.

Beweis. Es sei $y = \{y(t)\}$ stetig bezüglich $\Re(T, R_t)$. Auf Grund der Bedingung a) existiert für jedes $\tau \in T$ eine Vektorfunktion $x = \{x(t)\} \in \Re(T, R_t)$ mit $x_\tau(\tau) = y(\tau)$. Wegen der Stetigkeit ist dann auch $|y(t) - x_\tau(t)| < \varepsilon$ in einer Umgebung $U(\tau)$. Wählen wir eine endliche Überdeckung $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$ von T und eine entsprechende Zerlegung des Einselements mit Hilfe stetiger nichtnegativer Funktionen $\alpha_1(t), \ldots, \alpha_n(t)$, so erhalten wir, wenn wir die gleichen Überlegungen wie beim Beweis von Theorem 1 anstellen,

$$\left| y(t) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\, x_{\tau_k}(t) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in T. \tag{1}$$

Da wegen b) die Vektorfunktion $\left\{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k(t)\, x_{\tau_k}(t)\right\}$ zur Algebra $\Re(T, R_t)$ gehört und diese Algebra vollständig ist, folgt aus (1), daß $\{y(t)\}$ ebenfalls zu $\Re(T, R_t)$ gehört.

Ist insbesondere $R_t = R$ und $\mathfrak{R}(T, R_t) \subset C(T, R)$, so gelangen wir zum folgenden Ergebnis.

Folgerung. *Es sei T ein bikompakter* HAUSDORFF*scher Raum und $\mathfrak{R}$ eine abgeschlossene Teilalgebra der Algebra $C(T, R)$, die folgenden Bedingungen genügt:*

a) $\mathfrak{R}_t = R$ *für alle* $t \in T$;

b) $\mathfrak{R}$ *ist bezüglich der Multiplikation mit allen auf T stetigen Zahlenfunktionen, deren Werte im Intervall* $[0, 1]$ *liegen, abgeschlossen.*

Dann ist $\mathfrak{R} = C(T, R)$.

4. Vollreguläre Algebren. Es sei jetzt jede der Algebren R_t symmetrisch. Wir nennen dann die Algebra $\mathfrak{R}(T, R_t)$ symmetrisch, wenn aus $\{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ auch $\{[x(t)]^*\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ folgt. Ist $\mathfrak{R}(T, R_t)$ symmetrisch, so definieren wir in dieser Algebra eine Involution, indem wir $x^* = \{[x(t)]^*\}$ für $x = \{x(t)\}$ setzen. Offenbar sind für diese Involution alle Axiome erfüllt, und es gilt der folgende Satz.

I. *Ist jede der Algebren R_t vollregulär, so ist die symmetrische Algebra $\mathfrak{R}(T, R_t)$ ebenfalls vollregulär.*

Wir erinnern uns jetzt an die folgenden Tatsachen. Es sei R eine vollständige vollreguläre Algebra mit Einselement und x ein hermitesches Element von R. Dann existiert für jede auf dem Spektrum von x stetige Funktion $f(\lambda)$ ein Element $f(x) \in R$, das der Limes (der Norm nach) einer Folge $\{p_n(x)\}$ ist, wobei $\{p_n(\lambda)\}$ eine beliebige Folge von Polynomen ist, die auf dem Spektrum von x gleichmäßig gegen $f(\lambda)$ konvergiert. Ist insbesondere $f(0) = 0$, so gehört $f(x)$ zu jedem abgeschlossenen Ideal, das x enthält. Um dies zu beweisen, genügt es, die Folgerung 6 aus § 16, Nr. 2, auf die BANACHsche Algebra mit Einselement anzuwenden, die von x erzeugt wird, und für $f(0) = 0$ auch $p_n(0) = 0$ anzunehmen.

In den folgenden Sätzen II und III sei R eine vollständige vollreguläre Algebra mit Einselement.

II. *Ist I ein abgeschlossenes symmetrisches zweiseitiges Ideal von R und $x^\wedge$ das Bild des hermiteschen Elements x aus R bei dem natürlichen Homomorphismus $R \to R/I$, so ist für jede auf dem Spektrum von x stetige Funktion $f(\lambda)$*

$$f(x^\wedge) = [f(x)]^\wedge. \tag{1}$$

Für jedes Polynom $p(\lambda)$ ist nämlich $p(x^\wedge) = [p(x)]^\wedge$; gehen wir zum Limes über und berücksichtigen wir die Stetigkeit des Homomorphismus $R \to R/I$, so erhalten wir (1).

III. *Es sei $\{I_\alpha\}$ eine Menge von abgeschlossenen symmetrischen zweiseitigen Idealen von R, deren Durchschnitt gleich* (0) *ist, und x_α das Bild des hermiteschen Elements x aus R bei dem natürlichen Homomorphismus $R \to R/I_\alpha$. Ist das Spektrum jedes der Elemente x_α nichtnegativ, so ist das Spektrum von x ebenfalls nichtnegativ.*

Beweis. Wir setzen

$$f(\lambda)=\begin{cases}0 & \text{für } \lambda\geqq 0,\\ -\lambda & \text{für } \lambda<0,\end{cases}$$

$$\varphi(\lambda)=\begin{cases}\lambda & \text{für } \lambda>0,\\ 0 & \text{für } \lambda\leqq 0.\end{cases}$$

Dann ist das Spektrum jedes der Elemente $f(x)$, $\varphi(x)$ nichtnegativ, und es ist $x=\varphi(x)-f(x)$. Nach Voraussetzung ist

$$f(x)_\alpha = f(x_\alpha) = 0.$$

Also gehört $f(x)$ zu allen I_α, woraus $f(x)=0$ folgt. Dann ist aber

$$x=\varphi(x)-f(x)=\varphi(x),$$

so daß das Spektrum von x nichtnegativ ist.

IV. *Es sei R_t eine vollständige vollreguläre Algebra mit Einselement und $\Re(T, R_t)$ eine symmetrische Algebra mit Einselement. Dann ist für jede auf dem Spektrum des hermiteschen Elements $x=\{x(t)\}\in\Re(T, R_t)$ stetige Funktion $f(\lambda)$*

$$f(x)=\{f(x(t))\};$$

ist das Spektrum von $x(t)$ nichtnegativ für jedes $t\in T$, so ist das Spektrum von x ebenfalls nichtnegativ.

Beweis. Es sei I_t die Gesamtheit aller Elemente von $\Re(T, R_t)$, die im Punkt t verschwinden. Dann ist I_t ein abgeschlossenes symmetrisches zweiseitiges Ideal von $\Re(T, R_t)$, und der Durchschnitt aller I_t ist gleich (0). Folglich genügt es, die Sätze II und III auf diesen Fall anzuwenden.

V. *Es sei $\Re(T, R_t)$ eine symmetrische Algebra mit Einselement und $x=\{x(t)\}$ ein hermitesches Element aus $\Re(T, R_t)$. Dann existiert für jedes $\tau\in T$ und jedes $\varepsilon>0$ eine Umgebung $U(\tau)$ derart, daß für $t\in U(\tau)$ das Spektrum von $x(t)$ in der ε-Umgebung des Spektrums von $x(\tau)$ enthalten ist.*

Beweis. Wir bezeichnen mit S_t das Spektrum von $x(t)$ und mit U die ε-Umgebung der Menge S_τ. Ferner sei $f(\lambda)$ eine stetige Funktion, die auf S_τ gleich Null und außerhalb U gleich Eins ist. Dann ist $f(x(\tau))=0$ und wegen der Stetigkeit auch $|f(x(t))|<1$ in einer Umgebung $U(\tau)$. Weiterhin befindet sich für $t\in U(\tau)$ das ganze Spektrum von $f(x(t))$ im Intervall $(-1, 1)$, so daß S_t in U enthalten ist. Würde nämlich ein Punkt λ_0 von S_t nicht in U liegen, so würde das Spektrum von $f(x(t))$ den Punkt $f(\lambda_0)=1$ enthalten, was jedoch nicht möglich ist.

Bemerkung 1. Im Beweis wurde die Stetigkeit der Funktionen aus $\Re(T, R_t)$ [nämlich der Funktion $f(x(t))$] nur für die Punkte t_0 benutzt, in denen $x(t_0)=0$ ist. Folglich bleibt die Behauptung des Satzes V auch gültig, wenn die Stetigkeit der Funktionen nur in den Punkten t_0 mit $x(t_0)=0$ vorausgesetzt wird.

Theorem 4. *Eine symmetrische Algebra* $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *mit Einselement genüge den folgenden Bedingungen:*

a) T *ist ein bikompakter* HAUSDORFFscher *Raum;*

b) *jedes* R_t *ist vollständig und vollregulär;*

c) *für alle* $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, *existiert in der Algebra* $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *eine Vektorfunktion* $x = \{x(t)\}$ *mit* $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = e$.[1])

Dann enthält $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *alle Vektorfunktionen* $\{\alpha(t)e\}$, *wobei* $\alpha(t)$ *eine auf* T *stetige Zahlenfunktion ist.*

Beweis. Es sei $t_1, t_2 \in T$ und $t_1 \neq t_2$. Nach Voraussetzung gibt es in $\mathfrak{R}(T, R_t)$ eine Funktion $x = \{x(t)\}$ derart, daß $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = e$. Setzen wir $y = x^* x$, so erhalten wir eine hermitesche Vektorfunktion $y = \{y(t)\}$, für die ebenfalls $y(t_1) = 0$, $y(t_2) = e$ ist. Daraus folgt $|y(t)| < \varepsilon$ in einer gewissen Umgebung $U(t_1)$. Ist ferner $f(\lambda)$ eine stetige reelle Funktion, die in der Umgebung $|\lambda| < \varepsilon$ des Punktes $\lambda = 0$ gleich Null und für $\lambda = 1$ gleich Eins ist, so ist $z = f(y)$ eine hermitesche Vektorfunktion aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$, die in der Umgebung $U(t_1)$ gleich Null und im Punkt t_2 gleich e ist.

Wir betrachten jetzt eine abgeschlossene Menge $F \subset T$ und den Punkt $t_2 \notin F$. Aus dem für jeden Punkt $\tau \in F$ eben Gesagten folgt, daß in der Algebra $\mathfrak{R}(T, R_t)$ eine Vektorfunktion $z_\tau = \{z_\tau(t)\}$ existiert, die in t_2 gleich Eins und in der Umgebung $U(\tau)$ gleich Null ist. Unter diesen Umgebungen gibt es endlich viele Umgebungen $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$, die die Menge F überdecken. Setzen wir $z = (z_{\tau_1} z_{\tau_2} \cdots z_{\tau_n})^* (z_{\tau_1} z_{\tau_2} \cdots z_{\tau_n})$, so erhalten wir eine hermitesche Vektorfunktion $z = \{z(t)\}$ aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$, die auf F gleich Null und in t_2 gleich Eins ist.

Nun seien F_1 und F_2 sich nicht schneidende abgeschlossene Mengen. Infolge des oben Bewiesenen gibt es dann zu jedem Punkt $\tau \in F_2$ in $\mathfrak{R}(T, R_t)$ eine hermitesche Vektorfunktion $z_\tau = \{z_\tau(t)\}$, die auf F_1 gleich Null und in τ gleich Eins ist. Setzen wir $h_\tau = e - z_\tau$, so ergibt sich die hermitesche Vektorfunktion $h_\tau = \{h_\tau(t)\}$ aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$, die auf F_1 gleich Eins und im Punkt τ gleich Null ist. Dann ist $|h_\tau(t)| < \varepsilon$ in einer Umgebung $U(\tau)$, und das Element $g_\tau = f(h_\tau)$ [wobei $f(\lambda)$ die obige Funktion ist] ist eine hermitesche Vektorfunktion $g_\tau = \{g_\tau(t)\}$ aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$, die auf F_1 gleich Eins und in $U(\tau)$ gleich Null ist. Wählt man eine endliche Überdeckung $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_n)$ der Menge F_2 und setzt man $g = (g_{\tau_1} g_{\tau_2} \cdots g_{\tau_n})^* (g_{\tau_1} g_{\tau_2} \cdots g_{\tau_n})$, so erhält man eine hermitesche Vektorfunktion $g = \{g(t)\}$ aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$, die auf F_1 gleich Eins und auf F_2 gleich Null ist.

Somit existiert in $\mathfrak{R}(T, R_t)$ *für je zwei sich nicht schneidende abgeschlossene Mengen* F_1, F_2 *von* T *eine hermitesche Vektorfunktion* $g = \{g(t)\}$, *die auf* F_1 *gleich Eins und auf* F_2 *gleich Null ist.*

Gegeben sei nun eine beliebige, auf T stetige Zahlenfunktion $\alpha(t)$, und es sei $\varepsilon > 0$. Jedem Punkt $\tau \in T$ entspricht eine Umgebung $U(\tau)$, in der die Schwankung der Funktion $\alpha(t)$ kleiner als ε ist. Da der Raum T normal ist, enthält $U(\tau)$ eine Umgebung $V(\tau)$ mit $\overline{V(\tau)} \subset U(\tau)$.

[1]) Wir wollen mit ein und demselben Symbol e das Einselement in jeder Algebra R_t bezeichnen. Dies führt nicht zu Mißverständnissen.

Ferner sei $V(\tau_1), \ldots, V(\tau_n)$ eine Überdeckung von T. Da $\overline{V(\tau_j)}$ und $T - U(\tau_j)$ sich nicht schneidende abgeschlossene Mengen sind, gibt es in $\mathfrak{R}(T, R_t)$ eine hermitesche Vektorfunktion $g_j = \{g_j(t)\}$, die auf $\overline{V(\tau_j)}$ gleich Eins und auf $T - U(\tau_j)$ gleich Null ist. Setzen wir $k = \sum_{j=1}^{n} g_j^* g_j$, so ist $k = \{k(t)\}$ eine hermitesche Vektorfunktion aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$, wobei für jedes $t \in T$ das Spektrum von $k(t) - e$ nichtnegativ ist. Dann können wir mit Hilfe von Satz IV schließen, daß das Spektrum von $k - e$ ebenfalls nichtnegativ ist und demzufolge in $\mathfrak{R}(T, R_t)$ ein Element $q = k^{-\frac{1}{2}}$ existiert. Mit $q_j = k^{-\frac{1}{2}} g_j^* g_j k^{\frac{1}{2}}$ erhalten wir hermitesche Elemente q_j von $\mathfrak{R}(T, R_t)$ mit nichtnegativem Spektrum, die den Bedingungen

$$\sum_{j=1}^{n} q_j = e, \quad q_j(t) = 0 \text{ außerhalb } U(\tau_j) \tag{2}$$

genügen. Es sei jetzt α_j einer der Werte, die die Funktion $\alpha(t)$ auf $U(\tau_j)$ annimmt. Wir werden zeigen, daß dann

$$\left| \alpha(t)\, e - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j(t) \right| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in T.$$

Da die Algebra $\mathfrak{R}(T, R_t)$ vollständig ist und die Zahl $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt werden kann, läßt sich hieraus schließen, daß $\alpha(t) e \in \mathfrak{R}(T, R_t)$. Damit wird dann der Satz bewiesen sein.

Wir setzen voraus, daß der feste Punkt t den Umgebungen $U(\tau_1), \ldots, U(\tau_m)$, jedoch nicht den Umgebungen $U(\tau_{m+1}), \ldots, U(\tau_n)$ angehört. Dann ist

$$|\alpha(t) - \alpha_j| < \varepsilon \text{ für } j = 1, \ldots, m, \quad q_j(t) = 0 \text{ für } j > m. \tag{3}$$

Ferner ist $q_j(t)$ ein beschränkter nichtnegativer Operator eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}_t$ (vgl. § 24, Nr. 2, Theorem 5). Aus (2) und (3) folgt für jedes $\xi \in \mathfrak{H}_t$

$$\begin{aligned} \left| \left\langle \left(\alpha(t)\, e - \sum_{j=1}^{n} \alpha_j q_j(t) \right) \xi, \xi \right\rangle \right| &= \left| \left\langle \left(\alpha(t)\, e - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q_j(t) \right) \xi, \xi \right\rangle \right| \\ &= \left| \sum_{j=1}^{m} [\alpha(t) - \alpha_j] \langle q_j(t)\, \xi, \xi \rangle \right| \\ &\leqq \sum_{j=1}^{m} |\alpha(t) - \alpha_j| \langle q_j(t)\, \xi, \xi \rangle \\ &< \varepsilon \left\langle \left(\sum_{j=1}^{m} q_j(t) \right) \xi, \xi \right\rangle \\ &= \varepsilon \langle \xi, \xi \rangle = \varepsilon |\xi|^2 \end{aligned}$$

und somit

$$\left| \alpha(t)\, e - \sum_{j=1}^{m} \alpha_j q_j(t) \right| < \varepsilon.$$

Bemerkung 2. Beim Beweis von Theorem 4 wurde nur die abgeschwächte Bedingung für die Stetigkeit der Norm der Funktion $|x(t)|$, $\{x(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$, benutzt, die folgendermaßen lautet: Ist $x(t_0) = 0$ in einem Punkt $t_0 \in T$, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(t_0)$, in der $|x(t)| < \varepsilon$ gilt. Daher bleibt die Behauptung des Theorems auch dann richtig, wenn $\mathfrak{R}(C, R_t)$ durch eine Algebra $\mathfrak{R}'(T, R_t)$ ersetzt wird, wobei die Funktionen aus $\mathfrak{R}'(T, R_t)$ nur der abgeschwächten Stetigkeitsbedingung zu genügen brauchen (natürlich bei Erfülltsein der übrigen Bedingungen des Theorems).

Bemerkung 3. Die Voraussetzungen in Theorem 4 lassen sich wie folgt abändern:

a) *T sei ein bikompakter* Hausdorff*scher Raum;*

b) *R_t sei für alle Punkte $t \in T$ außer einem festen Punkt t_0 vollregulär, und es sei $R_{t_0} = (0)$;*

c) *in $\mathfrak{R}(T, R_t)$ existiere für zwei Punkte t_1, t_2 ($t_1 \neq t_2$, $t_2 \neq t_0$) eine Vektorfunktion $x = \{x(t)\}$ mit $x(t_1) = 0$, $x(t_2) = e$;*

d) *alle Vektorfunktionen der Algebra $\mathfrak{R}(T, R_t)$ mögen der abgeschwächten Stetigkeitsbedingung genügen, und sie seien so beschaffen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung $U(\tau)$ existiert, in der $|x(t) - e| < \varepsilon$ ist, wenn $x(\tau) = e$ in einem Punkt $\tau \in T$ ist.*

Dann enthält die Algebra $\mathfrak{R}(T, R_t)$ alle Vektorfunktionen $\{\alpha(t)e\}$, wobei $\alpha(t)$ eine auf T stetige und im Punkt t_0 verschwindende Zahlenfunktion ist.

Beweis. Fügen wir zu $\mathfrak{R}(T, R_t)$ das Einselement $e = \{e\}$ hinzu, so erhalten wir die Algebra $\mathfrak{R}'(T, R'_t)$, wobei $R'_t = R_t$ für $t \neq t_0$ und R'_{t_0} die Algebra der Skalare ist. $\mathfrak{R}'(T, R'_t)$ genügt allen Bedingungen von Theorem 4, wobei die abgeschwächte Stetigkeit der Norm der Vektorfunktion $x = \{x(t)\}$ von $\mathfrak{R}'(T, R'_t)$ aus d) folgt. Daher enthält $\mathfrak{R}'(T, R'_t)$ alle Funktionen $\{\alpha(t)e\}$, wobei $\alpha(t)$ eine beliebige, auf T stetige Zahlenfunktion ist. Da sich $\mathfrak{R}'(T, R'_t)$ aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$ durch Hinzufügen des Einselements ergibt, können wir die Folgerung ziehen, daß $\mathfrak{R}(T, R_t)$ alle Funktionen $\{\alpha(t)e\}$ enthält, wobei $\alpha(t)$ eine auf T stetige und im Punkt t_0 verschwindende Zahlenfunktion ist. Es sei jetzt T' ein lokal bikompakter Raum, der sich aus T durch Entfernen des Punktes t_0 ergibt. Dann stimmt $\mathfrak{R}(T, R_t)$ mit der Algebra $\mathfrak{R}(T', R_t)$ überein, deren sämtliche Vektorfunktionen im Unendlichen verschwinden. Somit können wir auch T als lokal bikompakten Raum auffassen, dessen unendlich ferner Punkt t_0 ist.

Theorem 5. *Die symmetrische Algebra $\mathfrak{R}(T, R_t)$ genüge den folgenden Bedingungen:*

a) *T ist ein bikompakter* Hausdorff*scher Raum;*

b) *jedes R_t ist eine* Banach*sche symmetrische Algebra, die aus vollstetigen Operatoren eines* Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}_t$ besteht;*

c) *für je zwei verschiedene Punkte $t_1, t_2 \in T$ und beliebige Elemente $x_1 \in R_{t_1}$, $x_2 \in R_{t_2}$ existiert in $\mathfrak{R}(T, R_t)$ eine Funktion $x = \{x(t)\}$, die in den Punkten t_1 bzw. t_2 die Werte x_1 bzw. x_2 besitzt.*

Dann ist die Algebra $\mathfrak{R}(T, R_t)$ bezüglich der Multiplikation mit Funktionen aus $C^r(T)$ abgeschlossen.

Beweis. Es sei $x_0 = \{x_0(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ und $\alpha(t) \in C^r(T)$. Es muß gezeigt werden, daß $\{\alpha(t) x_0(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ ist. Dazu setzen wir zunächst $y = x_0^* x_0$ und betrachten $y(t_0)$ in einem festen Punkt $t_0 \in T$. Nach Voraussetzung ist $y(t_0)$ ein vollstetiger und positiv definiter Operator eines HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}_{t_0}$. Folglich besteht das Spektrum von $y(t_0)$ aus dem Punkt 0 und endlich oder abzählbar vielen positiven Eigenwerten, die keinen von Null verschiedenen Häufungspunkt haben.

Wir untersuchen zuerst den Fall unendlich vieler Eigenwerte. Sie mögen eine fallende, gegen Null konvergierende Folge $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ bilden. Dann existiert zu jedem $\varepsilon > 0$ ein r derart, daß $\lambda_{r+1} < \lambda_r < \varepsilon$. Wir wählen zwei Zahlen β und γ derart, daß $\lambda_r > \beta > \gamma > \lambda_{r+1}$, und wir bezeichnen mit $f(\lambda)$ eine stetige Zahlenfunktion, die für $\lambda \geqq \beta$ gleich Eins, für $\lambda \leqq \gamma$ gleich Null und im Intervall $[\gamma, \beta]$ linear ist. Setzen wir dann $p = f(y)$, so gehört $p = \{p(t)\}$ zu $\mathfrak{R}(T, R_t)$, und $p(t_0)$ ist Projektionsoperator in $\mathfrak{H}_{t_0}$. Außerdem ist das Spektrum des hermiteschen Operators $y(t_0) - p(t_0)\, y(t_0)$ im Intervall $[0, \varepsilon]$ enthalten, so daß $|y(t_0) - p(t_0) y(t_0)| < \varepsilon$ ist. Der Stetigkeit wegen ist dann ebenfalls $|y(t) - p(t) y(t)| < \varepsilon$ in einer Umgebung $U_1(t_0)$.

Weiterhin existiert infolge Satz V eine Umgebung $U_2(t_0)$ derart, daß für alle $t \in U_2(t_0)$ das Spektrum des Operators $y(t)$ außerhalb des Intervalls $[\gamma, \beta]$ liegt, d. h., $p(t)$ ist ein Projektionsoperator. Es sei $U(t_0)$ eine Umgebung des Punktes t_0, deren abgeschlossene Hülle in $U_1(t_0) \cap U_2(t_0)$ enthalten ist. Dann ist $p(t)$ Projektionsoperator und

$$|y(t) - p(t)\, y(t)| < \varepsilon \quad \text{für alle } t \in \overline{U(t_0)}. \tag{4}$$

Wir zeigen, daß dies auch für einen Operator $y(t_0)$ mit nur endlich vielen positiven Eigenwerten gilt. Es sei λ_0 der kleinste dieser positiven Eigenwerte. Wir wählen zwei Zahlen β, γ derart, daß $0 < \gamma < \beta < \lambda_0$, und definieren wie oben eine stetige Funktion $f(\lambda)$. Setzen wir wieder $p = f(y)$, so erhalten wir $y(t_0) - p(t_0) y(t_0) = 0$. Eine Wiederholung der obigen Überlegungen führt uns auch jetzt auf (4).

Wir zeigen jetzt, daß innerhalb von $U(t_0)$ die Multiplikation der Vektorfunktion $\{p(t)\}$ mit jeder stetigen reellen Funktion $\alpha(t)$ möglich ist. Mit anderen Worten, es existiert für jede solche Funktion $\alpha(t)$ in $\mathfrak{R}(T, R_t)$ eine Vektorfunktion $z = \{z(t)\}$ mit $z(t) = \alpha(t) p(t)$ für alle $t \in \overline{U(t_0)}$. Um dies zu beweisen, bezeichnen wir die Gesamtheit aller Vektorfunktionen $x = \{x(t)\}$ aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$, die der Bedingung

$$p(t)\, x(t) = x(t)\, p(t) = x(t) \quad \text{für alle } t \in \overline{U(t_0)} \tag{5}$$

genügen, mit $\mathfrak{R}_1$. Offenbar ist dann $\mathfrak{R}_1$ eine BANACHsche Teilalgebra von $\mathfrak{R}(T, R_t)$. Ferner sei $\mathfrak{R}_1^\wedge$ die Gesamtheit aller nur auf $\overline{U(t_0)}$ betrachteten Vektorfunktionen $x = \{x(t)\}$ aus $\mathfrak{R}_1$. Die Transformation $x \to x^\wedge$, die jeder Funktion $x = \{x(t)\}$ aus $\mathfrak{R}_1$ ihre Einschränkung $x^\wedge = \{x^\wedge(t)\}$ auf $\overline{U(t_0)}$ zuordnet, ist ein symmetrischer Homomorphismus der vollständigen vollregulären Algebra $\mathfrak{R}_1$ auf die vollreguläre Algebra $\mathfrak{R}_1^\wedge$. Somit ist $\mathfrak{R}_1^\wedge$ auch eine

vollständige Algebra (vgl. die Folgerung aus § 24, Nr. 3). Andererseits ist $\mathfrak{R}_1^{\wedge}$ eine Algebra der Form $\mathfrak{R}(\overline{U(t_0)}, R_t')$, wobei R_t' die Gesamtheit aller Elemente x von R_t ist, die der Bedingung $x\,p(t) = p(t)\,x = x$ genügen. Hieraus und aus der Voraussetzung c) kann man schließen, daß $\mathfrak{R}_1^{\wedge}$ allen Bedingungen von Theorem 4 genügt; dabei ist $p(t)$ das Einselement von R_t' und p das von $\mathfrak{R}_1^{\wedge}$. Auf Grund von Theorem 4 enthält $\mathfrak{R}_1^{\wedge}$ die Funktion $\{\alpha(t)\,p(t)\}$. Also existiert in $\mathfrak{R}(T, R_t)$ eine Vektorfunktion $z = \{z(t)\}$, die in $\overline{U(t_0)}$ mit $\{\alpha(t)\,p(t)\}$ übereinstimmt.

Wir ändern jetzt die Funktion $z = \{z(t)\}$ so, daß sie außerhalb $\overline{U(t_0)}$ verschwindet. Es sei $\tau \notin U(t_0)$ und $t_1 \in U(t_0)$. Das Spektrum des Operators $p(\tau)$ besteht dann nach Konstruktion aus endlich vielen positiven Eigenwerten endlicher Vielfachheit. Ferner sei q_0 der Operator der Projektion auf die direkte Summe der zu diesen Eigenwerten gehörenden Teilräume. Da der Operator q_0 endlichdimensional ist, ist er vollstetig, und es gilt außerdem $p(\tau)q_0 = q_0 p(\tau) = p(\tau)$, $q_0 \in R_\tau$. Infolge der Voraussetzung c) existiert in $\mathfrak{R}(T, R_t)$ ein hermitesches Element $q = \{q(t)\}$ derart, daß $q(t_1) = 0$, $q(\tau) = q_0$. Ist $\varphi(\lambda)$ eine reelle stetige Funktion, die in der Umgebung des Punktes $\lambda = 0$ gleich Null und im Punkt $\lambda = 1$ gleich Eins ist, und setzen wir $k = \varphi(q)$, so erhalten wir eine Vektorfunktion $k = \{k(t)\}$ aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$, die in einer Umgebung $U(t_1)$ verschwindet und im Punkt τ gleich q_0 ist. Ist $V(t_0)$ eine Umgebung von t_0 mit $\overline{V(t_0)} \subset U(t_0)$ und führen wir die vorhergehende Konstruktion für jeden Punkt $t_1 \in \overline{V(t_0)}$ durch, wählen dann aus den Umgebungen $U(t_1)$ eine endliche Überdeckung der Menge $\overline{V(t_0)}$ und multiplizieren wir die entsprechenden Vektorfunktionen $k = \{k(t)\}$, so erhalten wir eine Vektorfunktion $\tilde{k} = \{\tilde{k}(t)\}$, die auf $\overline{V(t_0)}$ verschwindet und im Punkt τ gleich q_0 ist. Mit $\tilde{p} = p - \tilde{k}p$ ist dann $\tilde{p} = \{\tilde{p}(t)\}$ eine Vektorfunktion aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$, die für $t \in \overline{V(t_0)}$ gleich $p(t)$ und im Punkt τ gleich Null ist. Setzen wir ferner $v = \tilde{p}^*\tilde{p}$, so erhalten wir eine hermitesche Vektorfunktion $v = \{v(t)\}$ mit denselben Eigenschaften. Untersuchen wir dann $\varphi(v)$, wobei $\varphi(\lambda)$ wieder eine reelle stetige Funktion mit obigen Eigenschaften ist, und wenden wir die oben für k und $\overline{V(t_0)}$ durchgeführten Überlegungen jetzt für v und $T - U(t_0)$ an, so erhalten wir eine hermitesche Vektorfunktion $h = \{h(t)\}$ aus $\mathfrak{R}(T, R_t)$, die auf $\overline{V(t_0)}$ gleich $p(t)$ und auf $T - U(t_0)$ gleich Null ist.

Nun sei $\beta(t)$ eine beliebige reelle und auf T stetige Zahlenfunktion, die außerhalb von $V(t_0)$ verschwindet. Wie oben erwähnt, enthält $\mathfrak{R}(T, R_t)$ eine Vektorfunktion, die auf $\overline{U(t_0)}$ den Wert $\beta(t)\,p(t)$ annimmt. Multiplizieren wir sie mit $h = \{h(t)\}$, so erhalten wir eine Vektorfunktion, die auf T gleich $\{\beta(t)\,p(t)\}$ ist. Mit anderen Worten, es ist $\{\beta(t)\,p(t)\} \in \mathfrak{R}(T, R_t)$ für jede auf T stetige, außerhalb $V(t_0)$ verschwindende reelle Funktion $\beta(t)$.

Wir konstruieren jetzt die Vektorfunktion $p = \{p(t)\}$ und die entsprechende Umgebung $V(t_0)$ für jedes $t_0 \in T$. Aus diesen Umgebungen wählen wir eine endliche Überdeckung $V(t_1), \ldots, V(t_n)$ und bezeichnen mit $p_1, \ldots, p_n$ die entsprechenden Vektorfunktionen. Ist ferner $\beta_1(t), \ldots, \beta_n(t)$ die der Überdeckung $V(t_1), \ldots, V(t_n)$ entsprechende Zerlegung des Einselements durch

stetige reelle Funktionen, so enthält $\Re(T, R_t)$ die Vektorfunktionen

$$g_k = \{\alpha(t)\, \beta_k(t)\, x_0(t)\, p_k(t)\} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Setzen wir $g = g_1 + \cdots + g_n$, so ist $g \in \Re(T, R_t)$ und

$$g(t) - \alpha(t)\, x_0(t) = \sum_{k=1}^{n} [g_k(t) - \alpha(t)\, \beta_k(t)\, x_0(t)]$$
$$= \sum_{k=1}^{n} \alpha(t)\, \beta_k(t)\, x_0(t)\, [p_k(t) - e],$$

woraus sich wegen $y = x_0^* x_0$

$$[g(t) - \alpha(t)\, x_0(t)]^* [g(t) - \alpha(t)\, x_0(t)]$$
$$= |\alpha(t)|^2 \sum_{j,k=1}^{n} \beta_k(t)\, \beta_j(t)\, [p_k(t) - e]\, y(t)\, [p_j(t) - e] \tag{6}$$

ergibt. Wegen (4) ist jedoch

$$\left| [y(t)]^{\frac{1}{2}} [p_j(t) - e] \right|^2 = |y(t) - y(t)\, p_j(t)| < \varepsilon \quad \text{in} \quad V(t_j),$$

also

$$\beta_j(t) \left| [y(t)]^{\frac{1}{2}} [p_j(t) - e] \right| < \beta_j(t) \sqrt{\varepsilon} \quad \text{in ganz} \quad T.$$

Somit folgt aus (6)

$$|g(t) - \alpha(t)\, x_0(t)|^2 < \sup_{t \in T} |\alpha(t)|^2 \sum_{j,k=1}^{n} \varepsilon \beta_k(t)\, \beta_j(t) = \sup_{t \in T} |\alpha(t)|^2 \varepsilon.$$

Da $\Re(T, R_t)$ vollständig ist, muß folglich $\{\alpha(t) x_0(t)\} \in \Re(T, R_t)$ sein. Damit ist Theorem 5 bewiesen.

Bemerkung 4. In Theorem 5 kann der Raum T auch lokal bikompakt sein. Dieser Fall läßt sich nämlich auf den in Theorem 5 betrachteten dadurch zurückführen, daß man zum Raum T den unendlich fernen Punkt ∞ und zu den Algebren R_t die Algebra $R_\infty = (0)$ hinzufügt.

Kombinieren wir die Theoreme 4 und 5 mit Theorem 3, so gelangen wir zu dem folgenden Ergebnis, das die Verallgemeinerung des STONEschen Satzes für den nichtkommutativen Fall darstellt (vgl. § 2, Nr. 10, Theorem 1):

Theorem 6. *Es sei T ein lokal bikompakter* HAUSDORFF*scher Raum und R eine vollständige vollreguläre Algebra, die entweder ein Einselement enthält oder aus vollstetigen Operatoren eines* HILBERT*schen Raumes besteht. Ist ferner $\Re_\infty(T, R)$ die Algebra aller auf T stetigen und im Unendlichen verschwindenden Vektorfunktionen $x = \{x(t)\}$ mit Werten aus R und ist $\Re_1$ eine abgeschlossene symmetrische Teilalgebra von $\Re_\infty(T, R)$, die zu je zwei verschiedenen Punkten $t_1, t_2 \in T$ und beliebigen $x_1, x_2 \in R$ eine Funktion x mit $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ enthält, so stimmt $\Re_1$ mit $\Re_\infty(T, R)$ überein.*

5. Das kontinuierliche Analogon zum Schurschen Lemma. Ist jedes R_t eine BANACHsche symmetrische Algebra von Operatoren eines HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}_t$ und $\Re(T, R_t)$ eine symmetrische Algebra, so ist für jedes feste

$t_0 \in T$ die Zuordnung $x \to x(t_0)$ eine Darstellung der Algebra $\mathfrak{R}(T, R_t)$ im Raum $\mathfrak{H}_{t_0}$. Die Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphen machen es möglich, auf diese Darstellungen das SCHURsche Lemma zu übertragen, wobei diesen Darstellungen eine Reihe von Bedingungen auferlegt werden müssen, die für Darstellungen vieler wichtiger konkreter Algebren erfüllt sind (vgl. dazu etwa GELFAND und NEUMARK [7, S. 202] und NEUMARK [7,9]).

Vorbereitend beweisen wir den folgenden Satz:

I. *Ist $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ die Algebra aller vollstetigen Operatoren eines* HILBERT*schen Raumes $\mathfrak{H}$, so stimmt jede abgeschlossene symmetrische irreduzible Teilalgebra R von $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ mit $\mathfrak{C}(\mathfrak{H})$ überein.*

Beweis. Ist R^P die Gesamtheit aller Projektionsoperatoren $P \in R$, so ist jedes $P \in R$ offenbar endlichdimensional. Ist H ein hermitescher Operator aus R, so läßt sich H in der Gestalt $\sum_{k=1}^{\infty} \lambda_k P_k$ schreiben. Wählen wir eine stetige Funktion $f(\lambda)$, die im Punkt λ_{k_0} gleich Eins und in den übrigen Punkten λ_k gleich Null ist, so erhalten wir $P_{k_0} = f(H) \in R$. Folglich ist R eine minimale abgeschlossene Algebra, die R^P enthält, und somit ist R^P eine irreduzible Menge.

Nun sei $\{e_\alpha\}$ ein festes vollständiges Orthonormalsystem aus $\mathfrak{H}$. Ist $\mathfrak{C}'(\mathfrak{H})$ die Gesamtheit aller Operatoren, deren Matrix $\|a_{\alpha\beta}\|$ in diesem Orthonormalsystem die Bedingung $\sum_{\alpha,\beta} |a_{\alpha\beta}|^2 < \infty$ erfüllt, und setzen wir $R' = R \cap \mathfrak{C}'(\mathfrak{H})$, so ist R' eine HILBERTsche Algebra, die R^P enthält und deshalb irreduzibel ist. Nun ist aber jede HILBERTsche Algebra die orthogonale Summe ihrer minimalen abgeschlossenen zweiseitigen Ideale, die, da R' irreduzibel ist, nur aus einem Ideal bestehen kann. Also ist R' einer Matrizenalgebra $X(\mathfrak{A})$ vollisomorph (vgl. § 25, Nr. 5). Dieser Isomorphismus $X(\mathfrak{A}) \to R'$ ist eine irreduzible Darstellung der Algebra $X(\mathfrak{A})$. Aus den Überlegungen beim Beweis von Theorem 2 aus §22, Nr. 2, können wir schließen, daß R' und somit auch R^P alle Operatoren der Projektion auf endlichdimensionale Teilräume enthält. Folglich ist $R = \mathfrak{C}(\mathfrak{H})$.

Theorem 7. *Es sei T ein lokal bikompakter* HAUSDORFF*scher Raum, $\mathfrak{C}$ die Gesamtheit aller vollstetigen Operatoren eines* HILBERT*schen Raumes $\mathfrak{H}$ und $\mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$ die Gesamtheit aller auf T stetigen und im Unendlichen verschwindenden Vektorfunktionen mit Werten aus $\mathfrak{C}$. Ferner sei R_1 eine abgeschlossene symmetrische Teilalgebra von $R_\infty(T, \mathfrak{C})$, die den folgenden Bedingungen genügt:*

a) *Für alle $t_0 \in T$ ist die Zuordnung $x \to x(t_0)$ eine irreduzible Darstellung der Algebra $\mathfrak{R}_1$;*

b) *für alle $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, sind die Darstellungen $x \to x(t_1)$, $x \to x(t_2)$ nicht äquivalent.*

Dann ist $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$.

Beweis. Infolge a) ist $\mathfrak{R}_{1t}$ eine irreduzible Teilalgebra von $\mathfrak{C}$. Als Bild der vollständigen vollregulären Algebra $\mathfrak{R}_1$ bei einem symmetrischen Homomorphismus ist $\mathfrak{R}_{1t}$ abgeschlossen und stimmt demzufolge mit $\mathfrak{C}$ überein (vgl. Satz I und § 24, Nr. 3, Folgerung).

Wir zeigen nun, daß für beliebige $x_1, x_2 \in \mathfrak{C}$ und $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, eine Vektorfunktion $x = x(t) \in \mathfrak{R}_1$ derart existiert, daß $x(t_1) = x_1$, $x(t_2) = x_2$ ist. Dann wird die Behauptung unseres Theorems aus Nr. 3, Theorem 6, folgen. Zum Beweis bezeichnen wir mit I_1 die Gesamtheit aller Vektorfunktionen $x = x(t) \in \mathfrak{R}_1$, die der Bedingung $x(t_1) = 0$ genügen, und wir setzen $\mathfrak{C}_1 = I_{1t_2}$. Dann ist

$$\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}.$$

Im entgegengesetzten Fall wäre nämlich $\mathfrak{C}_1$ ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal von $\mathfrak{C}$ und daher $\mathfrak{C}_1 = (0)$ (vgl. § 22, Nr. 1, Satz V). Dann würde aber aus $x(t_1) = 0$, $x \in \mathfrak{R}_1$, auch $x(t_2) = 0$ folgen. Die Zuordnung $x(t_1) \to x(t_2)$ wäre also für $x \in \mathfrak{R}_1$ eindeutig und somit eine Darstellung der von der Nullalgebra verschiedenen Algebra $\mathfrak{C}$. Auf Grund von § 22, Nr. 2, Theorem 2, wäre diese Darstellung äquivalent der identischen Darstellung $x(t_1) \to x(t_1)$. Somit würden entgegen b) die Darstellungen $x \to x(t_1)$ und $x \to x(t_2)$ von $\mathfrak{R}_1$ äquivalent sein. Also ist $\mathfrak{C}_1 = \mathfrak{C}$. Diese Beziehung bedeutet, daß für jedes $x_2 \in \mathfrak{C}$ eine Funktion $x_2(t) \in \mathfrak{R}_1$ mit $x_2(t_1) = 0$, $x_2(t_2) = x_2$ existiert. Analog existiert eine Funktion $x_1(t) \in \mathfrak{R}_1$ mit $x_1(t_1) = x_1$, $x_1(t_2) = 0$. Dann genügt $x(t) = x_1(t) + x_2(t)$ den gestellten Forderungen. Damit ist das Theorem bewiesen.

Nun sei $\mathfrak{H}$ ein separabler HILBERTscher Raum, T ein lokal bikompakter HAUSDORFFscher Raum und μ ein Maß auf T.

Zur Vereinfachung der Darlegungen setzen wir in diesem Abschnitt von nun an voraus, daß der unendlich ferne Punkt von T eine abzählbare Basis von Umgebungen $U_1, U_2, \ldots$ besitzt. Offenbar folgt daraus, daß die Vereinigung abzählbar vieler bikompakter Mengen $Q_1 = T - U_1$, $Q_2 = T - U_2, \ldots$ den Raum T ausschöpft:

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n = T. \tag{1}$$

Man kann (1) durch eine schwächere Forderung ersetzen, indem man nur verlangt, daß T gleich der Vereinigung $T_0 \cup \bigcup_{\alpha} T_\alpha$ von (eventuell nicht abzählbar vielen) sich nicht überschneidenden summierbaren Mengen T_α und einer lokalen Nullmenge T_0 ist, so daß jede summierbare Menge höchstens abzählbar viele Mengen T_α schneidet (vgl. § 6, Nr. 16). Die folgenden Ergebnisse bleiben dabei gültig, wenn man in ihnen die Ausdrücke „Menge vom Maß Null“ und „fast überall“ durch „lokale Nullmenge“ bzw. „lokal fast überall“ ersetzt (vgl. § 6, Nr. 9). Wir überlassen es dem Leser, die folgenden Beweise auf diesen Fall zu übertragen.

Eine Vektorfunktion $\xi = \{\xi(t)\}$, $t \in T$, mit Werten aus $\mathfrak{H}$ nennen wir *μ-meßbar* (oder einfach *meßbar*), wenn für jedes $\eta \in \mathfrak{H}$ die Zahlenfunktion $\langle \xi(t), \eta \rangle$ ebenfalls μ-meßbar ist. Ist $\mathscr{H}$ die Gesamtheit aller μ-meßbaren Vektorfunktionen $\xi = \{\xi(t)\}$, $t \in T$, deren Werte aus $\mathfrak{H}$ sind und die der Bedingung[1])

[1]) Dabei sieht man zwei Vektorfunktionen $\xi(t)$, $\eta(t) \in \mathscr{H}$ als nicht verschieden an, wenn $\int_T |\xi(t) - \eta(t)|^2 d\mu = 0$ ist.

$\int\limits_T |\xi(t)|^2 d\mu < \infty$ genügen, und setzen wir

$$\alpha\xi = \{\alpha\xi(t)\}, \quad \xi + \eta = \{\xi(t) + \eta(t)\},$$
$$\langle \xi, \eta \rangle = \int \langle \xi(t), \eta(t) \rangle \, d\mu$$

für $\xi = \{\xi(t)\}$, $\eta = \{\eta(t)\} \in \mathscr{H}$, so ist $\mathscr{H}$ ein HILBERTscher Raum. Der Beweis seiner Vollständigkeit verläuft analog dem der Vollständigkeit von L^2 (vgl. § 6, Nr. 11). Wir nennen $\mathscr{H}$ das *topologische direkte Integral*[1]) *des Raumes* $\mathfrak{H}$ *nach dem Maß* μ und schreiben $\int\limits_T \mathfrak{H}\sqrt{d\mu}$.

Ist T diskret und das Maß jedes Punktes gleich Eins, so stimmt $\int\limits_T \mathfrak{H}\sqrt{d\mu}$ offenbar mit der gewöhnlichen direkten Summe $\sum\limits_T \oplus \mathfrak{H}$ überein (vgl. § 5, Nr. 6).

Wir betrachten jetzt eine Operatorfunktion $A = \{A(t)\}$, wobei $A(t)$ ein beschränkter Operator in $\mathfrak{H}$ ist. Die Operatorfunktion $A = \{A(t)\}$ heißt *μ-meßbar*, wenn

a) sie für alle $t \in T$ definiert ist, eventuell mit Ausnahme einer Menge vom μ-Maß Null;

b) für jede Vektorfunktion $\xi = \{\xi(t)\} \in \mathscr{H}$ die Vektorfunktion $\{A(t)\xi(t)\}$ für alle $t \in T$ definiert ist, eventuell mit Ausnahme einer Menge vom μ-Maß Null, und zu $\mathscr{H}$ gehört.

II. *Ist $\{A(t)\}$ eine meßbare Operatorfunktion, so ist $|A(t)|$ eine meßbare Zahlenfunktion.*

Ist ξ_n nämlich eine abzählbare, in $\mathfrak{H}$ dichte Menge, so ist $|A(t)| = \sup\limits_n \frac{|A(t)\xi_n|}{|\xi_n|}$, d. h., $|A(t)|$ ist als obere Grenze der Folge der meßbaren Funktionen $\frac{|A(t)\xi_n|}{|\xi_n|}$ ebenfalls meßbar (vgl. § 6, Nr. 10, Satz VI).

III. *Ist $\{A(t)\}$ eine meßbare Operatorfunktion, so definiert die Beziehung $A\{\xi(t)\} = \{A(t)\xi(t)\}$ genau dann einen beschränkten Operator A von $\mathscr{H}$, wenn $|A(t)|$ eine wesentlich beschränkte Funktion ist. In diesem Fall ist $|A| = \| A(t) \|_\infty$.*[2])

Beweis. Wir setzen $c = \| |A(t)| \|_\infty$. Ist $c < \infty$, so gilt

$$|A\xi|^2 = \int |A(t)\,\xi(t)|^2 d\mu \leqq c^2 \int |\xi(t)|^2 d\mu = c^2 |\xi|^2.$$

Folglich ist A ein beschränkter Operator, und es ist

$$|A| \leqq c. \tag{2}$$

Ist dagegen A beschränkt und ξ_n eine abzählbare, in $\mathfrak{H}$ dichte Menge, so ist

$$S = \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n, \tag{3}$$

---

[1]) Eine andere, allgemeinere Definition des topologischen direkten Integrals wird in § 41, Nr. 2, gegeben.

[2]) Bezüglich der Schreibweise $\|x(t)\|_\infty$ vgl. § 6, Nr. 13.

wenn wir mit S_n bzw. S die Menge derjenigen Punkte t bezeichnen, für die die Ungleichung

$$|A(t)\,\xi_n| > |A|\,|\xi_n| \tag{4}$$

bzw.

$$|A(t)| > |A| \tag{5}$$

gilt. In der Tat: Ist $t \notin S$, d. h., gilt die Ungleichung (5) nicht, so ist (4) für kein n erfüllt, und somit gilt $t \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$. Ist dagegen $t \notin \bigcup\limits_{n=1}^{\infty} S_n$, so gilt $|A(t)\xi_n| \leqq |A|\,|\xi_n|$ für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$; also ist $|A(t)| \leqq |A|$, denn $\{\xi_n\}$ ist in $\mathfrak{H}$ dicht. Folglich ist $t \notin S$. Damit ist (3) bewiesen.

Wir zeigen nun, daß jedes S_n das μ-Maß Null hat. Dann ist wegen (3) auch S eine solche Menge, und es ist

$$c \leqq |A|. \tag{6}$$

Es sei $\alpha(t)$ die charakteristische Funktion der Menge S_n und $\beta(t)$ eine beliebige Zahlenfunktion, die der Bedingung $\int\limits_T |\beta(t)|^2 d\mu < \infty$ genügt. Dann ist $\xi_n(t) = \beta(t)\,\alpha(t)\,\xi_n \in \mathscr{H}$, und falls $\mu(S_n) > 0$ ist, gilt

$$|A\{\xi_n(t)\}|^2 = \int\limits_{S_n} |A(t)\,\xi_n|^2\,|\beta(t)|^2\,d\mu > |A|^2 \int\limits_{S_n} |\xi_n|^2\,|\beta(t)|^2\,d\mu. \tag{7}$$

Diese Ungleichung widerspricht jedoch der Definition der Norm von A. Demnach ist $\mu(S_n) = 0$ und die Ungleichung (6) bewiesen. Durch Kombination von (2) und (6) erhält man $|A| = c = \||A(t)|\|_\infty$.

IV. *Jeder beschränkte Operator A in $\mathscr{H} = \int\limits_T \mathfrak{H}\sqrt{d\mu}$, der mit allen Operatoren $L_\beta = \{\beta(t)\,1\}$, $\beta(t) \in C_\infty(T)$, vertauschbar ist, hat die Gestalt $A = \{A(t)\}$. Dabei ist $\{A(t)\}$ eine meßbare, wesentlich beschränkte Operatorfunktion.*

Beweis. Es sei $\{e_n\}$ ein vollständiges Orthonormalsystem aus $\mathfrak{H}$ und $\alpha_m(t)$ die charakteristische Funktion der Menge Q_m in (1). Setzen wir

$$\xi_{nm} = \{\alpha_m(t)\,e_n\}, \quad A^*\xi_{nm} = \eta_{nm} = \{\eta_{nm}(t)\}$$

und für eine beliebige Vektorfunktion $\zeta = \{\zeta(t)\} \in \mathscr{H}$ außerdem $A\zeta = \zeta' = \{\zeta'(t)\}$, so ist

$$\langle \zeta, \eta_{nm} \rangle = \langle \zeta, A^*\xi_{nm} \rangle = \langle A\zeta, \xi_{nm} \rangle = \langle \zeta', \xi_{nm} \rangle.$$

Der Operator $L_{\alpha_m} = \{\alpha_m(t)\,1\}$ läßt sich durch Operatoren L_β, $\beta \in C_\infty(t)$, approximieren und ist deshalb auch mit A und A^* vertauschbar. Also gilt

$$\langle \zeta, L_{\alpha_m}\eta_{nm} \rangle = \langle \zeta', L_{\alpha_m}\xi_{nm} \rangle = \langle \zeta', \xi_{nm} \rangle,$$

d. h.

$$\int\limits_T \langle \zeta(t), \eta_{nm}(t) \rangle\,\alpha_m(t)\,d\mu = \int\limits_T \langle \zeta'(t), e_n \rangle\,\alpha_m(t)\,d\mu. \tag{8}$$

Wir definieren in $\mathfrak{H}$ einen Operator $B(t)$, indem wir $B(t)\,e_n = \eta_{nm}(t)$ für $t \in Q_m$ setzen und ihn dann auf endliche Linearkombinationen der Vektoren e_n linear

erweitern. Dann läßt sich (8) in der Form

$$\int_T \langle \zeta(t),\ B(t)\, e_n \rangle\, \alpha_m(t)\, d\mu = \int_T \langle \zeta'(t),\ e_n \rangle\, \alpha_m(t)\, d\mu \tag{9}$$

schreiben. Nach Voraussetzung ist $A L_\beta = L_\beta A$ und somit $A L_\beta \zeta = L_\beta A \zeta = L_\beta \zeta'$, so daß man in (9) dann $\zeta(t)$ und $\zeta'(t)$ durch $\beta(t)\zeta(t)$ bzw. $\beta(t)\zeta'(t)$ ersetzen kann. So erhalten wir

$$\int_T \langle \zeta(t),\ B(t)\, e_n \rangle\, \beta(t)\, \alpha_m(t)\, d\mu = \int_T \langle \zeta'(t),\ e_n \rangle\, \beta(t)\, \alpha_m(t)\, d\mu$$

für alle $\beta(t) \in C_\infty(T)$. Daraus folgt

$$\langle \zeta(t),\ B(t)\, e_n \rangle = \langle \zeta'(t),\ e_n \rangle \tag{10}$$

mit Ausnahme einer Menge S_n vom μ-Maß Null. Dann wird außerhalb der Menge $\bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$, die ebenfalls vom μ-Maß Null ist, die Beziehung (10) für alle $n = 1, 2, 3, \ldots$ erfüllt, so daß $\zeta(t) \in \mathfrak{D}_{B^*(t)}$ und $B^*(t)\, \zeta(t) = \zeta'(t)$.

Setzen wir[1] $A(t) = B^*(t)$, so ergibt sich $A\{\zeta(t)\} = \{A(t)\zeta(t)\}$ für alle $\{\zeta(t)\} \in \mathscr{H}$. Auf Grund von Satz III ist $\{A(t)\}$ eine wesentlich beschränkte Operatorfunktion. Damit ist der Satz bewiesen.

Nun setzen wir voraus, daß für jedes $t \in T$ eine Darstellung $x \to A_x(t)$ einer BANACHschen symmetrischen Algebra R im Raum $\mathfrak{H}$ gegeben ist. Ist für jedes $x \in R$ die Operatorfunktion $A_x = \{A_x(t)\}$ μ-meßbar und wesentlich beschränkt, so ist A_x ein Operator von $\mathscr{H}$, und die Zuordnung $x \to A_x$ ist die Darstellung der Algebra R im Raum $\mathscr{H}$. Man nennt sie das *topologische direkte Integral der Darstellungen* $x \to A_x(t)$ *nach dem Maß* μ und schreibt

$$x \to \int_T \oplus A_x(t)\, d\mu.$$

Theorem 8 (Kontinuierliches Analogon des SCHURschen Lemmas). *Die Darstellung $x \to A_x$ der BANACHschen symmetrischen Algebra R sei das topologische direkte Integral $x \to \int_T \oplus A_x(t)\, d\mu$ der Darstellungen $x \to A_x(t)$ von R in einem separablen Raum $\mathfrak{H}$, und es seien die folgenden Bedingungen erfüllt:*

a) *$A_x(t)$ ist für jedes $x \in R$ eine im Unendlichen verschwindende und (im Sinne der Operatornorm) auf T stetige Operatorfunktion;*

b) *für alle $x \in R$ und $t \in T$ ist der Operator $A_x(t)$ vollstetig;*

c) *jede Darstellung $x \to A_x(t)$ ist irreduzibel;*

---

[1]) Auf den ersten Blick scheint es, als ob man sofort $\zeta'(t) = A(t)\zeta(t)$ setzen könnte. Jedoch kann $\zeta'(t_0)$ im allgemeinen Fall von allen Werten der Vektorfunktion $\{\zeta(t)\}$ und nicht nur von ihrem Wert $\zeta'(t_0)$ in einem gegebenen Punkt t_0 abhängen (vgl. § 5, Nr. 15, wo Entsprechendes für einen diskreten Raum T gilt). Die oben bewiesene Formel $B^*(t)\zeta(t) = \zeta'(t)$ besagt, daß für einen mit allen Operatoren L_β vertauschbaren Operator A der Wert $\zeta'(t_0)$ tatsächlich nur von $\zeta(t_0)$ abhängt und daß für $t \notin \bigcup_{n=1}^{\infty} S_n$ der Vektor $B(t)e_n$ von der Wahl der Menge Q_m, die t enthält, unabhängig ist.

d) *für alle* $t_1, t_2 \in T$, $t_1 \neq t_2$, *sind die Darstellungen* $x \to A_x(t_1)$, $x \to A_x(t_2)$ *nicht äquivalent.*

Dann hat jeder beschränkte Operator B *von* $\mathscr{H} = \int\limits_T \mathfrak{H} \sqrt{d\mu}$, *der mit allen Operatoren* A_x, $x \in R$, *vertauschbar ist, die Gestalt* $B = \{\beta(t) 1\}$ *mit* $\beta(t) \in L^\infty(T)$.

Beweis. Ist $\mathfrak{R}_1$ das Bild von R bei der Abbildung $x \to A_x$, so ist $\mathfrak{R}_1$ auch eine BANACHsche symmetrische Teilalgebra von $\mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$, die allen in Theorem 7 gestellten Bedingungen genügt. Somit ist $\mathfrak{R}_1 = \mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$. Der Operator B ist also mit allen Operatoren aus $\mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$ vertauschbar. Es sei $\{\varphi_n\}$ ein vollständiges orthonormiertes System in $\mathfrak{H}$ und P_n der Projektionsoperator auf den von $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ aufgespannten Teilraum. Dann gilt $P_n \xi \to \xi$ für $n \to \infty$ für alle ξ aus $\mathfrak{H}$ im Sinne der Norm in $\mathfrak{H}$. Wir definieren durch $\mathfrak{P}_n \xi = \{P_n \xi(t)\}$ für $\xi = \xi(t) \in \mathscr{H}$ einen Operator $\mathfrak{P}_n$ in $\mathscr{H}$. Es ist leicht zu sehen, daß $\mathfrak{P}_n$ ein Projektionsoperator in $\mathscr{H}$ ist und daß $\mathfrak{P}_n \xi \to \xi$ für $n \to \infty$ für alle $\xi \in \mathscr{H}$ im Sinne der Norm von $\mathscr{H}$ gilt. Da $L_\beta \mathfrak{P}_n = \{\beta(t) P_n\} \in \mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$ für jede Funktion $\beta(t)$ aus $C_\infty(T)$ gilt, ist der Operator B mit allen Operatoren $L_\beta \mathfrak{P}_n$ vertauschbar, also $B L_\beta \mathfrak{P}_n = L_\beta \mathfrak{P}_n B$. Durch Grenzübergang $n \to \infty$ ergibt sich die Vertauschbarkeit von B mit allen Operatoren $L_\beta = \{\beta(t) 1\}$, $\beta(t) \in C_\infty(T)$.

Auf Grund von Satz IV können wir hieraus schließen, daß $B = \{B(t)\}$ ist; dabei ist $B(t)$ eine wesentlich beschränkte meßbare Operatorfunktion. Die Vertauschbarkeit von B mit den Operatoren $A = \{A(t)\} \in \mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$ bedeutet, daß

$$A(t) B(t) = B(t) A(t) \tag{11}$$

für fast alle t gilt.

Ist nun $\alpha(t)$ eine auf T stetige positive Funktion, die für $t \to \infty$ gegen 0 geht, und C ein beliebiger vollstetiger Operator auf $\mathfrak{H}$, so gehört $\{\alpha(t) C\}$ zu $\mathfrak{R}_\infty(T, \mathfrak{C})$. Also ist

$$\alpha(t) C B(t) = \alpha(t) B(t) C \tag{12}$$

und wegen $\alpha(t) > 0$ auch $C B(t) = B(t) C$ für alle t außerhalb einer μ-Nullmenge N. Dann muß aber für alle $t \notin N$

$$B(t) = \beta(t) 1, \quad B = \{\beta(t) 1\} \tag{13}$$

gelten, und aus Satz III folgt die wesentliche Beschränktheit von $\beta(t)$.

Folgerung 1. *Es sei die Darstellung* $x \to A_x$ *die gleiche wie in Theorem* 8. *Dann ist jeder Teilraum* $\mathfrak{M}$ *von* $\mathscr{H} = \int\limits_T \mathfrak{H} \sqrt{d\mu}$, *der bezüglich aller Operatoren* A_x *invariant ist, die Gesamtheit aller Vektoren* $\xi = \{\xi(t)\} \in \mathscr{H}$, *die der Forderung*

$$\xi(t) = 0 \quad \textit{für fast alle} \quad t \in \Delta$$

genügen. Dabei ist Δ *eine feste* μ*-meßbare Menge von* T.

Beweis. Es sei P der Operator der Projektion auf den invarianten Teilraum $\mathfrak{M}$. Dann ist P mit allen A_x vertauschbar und hat demzufolge die Gestalt $P = \{\beta(t) 1\}$ mit $\beta(t) \in L^\infty(T)$. Wegen $P^2 = P$ gilt $\beta^2(t) = \beta(t)$ für fast alle t, so daß

$$\beta(t) = 0 \quad \text{oder} \quad 1 \quad \text{für fast alle} \quad t \in T \tag{14}$$

ist. Wir setzen $\Delta = \{t : \beta(t) = 0\}$; dann ist wegen der μ-Meßbarkeit von $\beta(t)$ die Menge Δ ebenfalls μ-meßbar. Der Raum $\mathfrak{M}$ ist gleich der Gesamtheit aller Vektoren $\xi = \{\xi(t)\}$, für welche $P\xi = \xi$, also $\beta(t)\xi(t) = \xi(t)$ ist. Infolge (14) führt dies auf die Bedingung $\xi(t) = 0$ für $t \in \Delta$.

Folgerung 2. *Es sei die Darstellung $x \to A_x$ die gleiche wie in Theorem* 8 *und $\mathfrak{M}$ ein Teilraum von $\mathscr{H} = \int\limits_T \mathfrak{H}\sqrt{d\mu}$, der bezüglich aller Operatoren A_x invariant ist. Enthält $\mathfrak{M}$ einen Vektor $\xi = \{\xi(t)\}$ mit*

$$\xi(t) \neq 0 \quad \textit{für fast alle} \quad t \in T, \tag{15}$$

so ist $\mathfrak{M} = \mathscr{H}$.

Aus (15) folgt nämlich, daß Δ in diesem Fall eine Menge vom μ-Maß Null ist.

6. Der Strukturraum einer vollregulären Algebra. Es sei Π der Strukturraum einer vollständigen vollregulären Algebra R (vgl. § 15, Nr. 3) und ferner $P \in \Pi$. Mit R_P bezeichnen wir die Quotientenalgebra R/P. Damit haben wir jedem Punkt $P \in \Pi$ eine Algebra R_P zugeordnet. Auf Grund von § 24, Nr. 3, Theorem 6, ist jedes R_P vollständig und vollregulär. Bezeichnen wir weiter mit $x(P)$ das Bild des Elements x aus R bei dem natürlichen Homomorphismus $R \to R_P$, so erhalten wir eine Vektorfunktion $x = x(P)$ mit Werten aus R_P. Offenbar hat die so festgesetzte Zuordnung $x \to \{x(P)\}$ die Eigenschaften

$$\alpha x \to \{\alpha x(P)\}, \quad x + y \to \{x(P) + y(P)\}, \quad xy \to \{x(P)\, y(P)\},$$
$$x^* = \{[x(P)]^*\}. \tag{1}$$

Außerdem ist

$$|x| = \sup_{P \in \Pi} |x(P)|. \tag{2}$$

Denn setzen wir vorübergehend $|x|_1 = \sup\limits_{P \in \Pi} |x(P)|$ und bezeichnen wir mit R_1 die Algebra der Vektorfunktionen $\{x(P)\}$ mit der Norm $|x|_1$, so ist die Zuordnung $x \to \{x(P)\}$ ein symmetrischer Isomorphismus der vollständigen vollregulären Algebra R in die vollständige vollreguläre Algebra R_1, der die Norm invariant lassen muß (vgl. § 24, Nr. 1, Theorem 3). Also ist $|x|_1 = |x|$.

Man kann auch zeigen (vgl. Kaplansky [13, S. 234]), daß $\sup |x(P)|$ in einem geeigneten Punkt $P_0 \in \Pi$ tatsächlich erreicht wird.

I. *Es sei x ein hermitesches Element einer vollständigen vollregulären Algebra R mit dem Strukturraum Π. Dann ist für jede abgeschlossene Menge S reeller Zahlen die Gesamtheit Q aller derjenigen Punkte $P \in \Pi$, für welche das Spektrum von $x(P)$ in S liegt, in Π abgeschlossen.*

Beweis. Es sei $P_0 \notin Q$. Dann gibt es im Spektrum von $x(P_0)$ einen Punkt $\alpha \notin S$. Ist $f(\lambda)$ eine stetige reelle Funktion, die auf S gleich Null und im Punkt α gleich Eins ist, so ist $y = f(x)$ ein Element von R, das auf Q verschwindet und im Punkt P_0 von Null verschieden ist. Daraus folgt $P_0 \notin hk(Q) = \bar{Q}$, also $\bar{Q} = Q$.

Theorem 9. *Der Strukturraum Π einer vollständigen vollregulären Algebra R ist genau dann ein Hausdorffscher Raum, wenn für jedes Element $x \in R$ die Funktion $|x(P)|$ auf Π stetig ist.*

Beweis. Es seien sämtliche Funktionen $|x(P)|$, $x \in R$, auf Π stetig. Wir zeigen, daß Π dann ein Hausdorffscher Raum ist. Für $P_1 \neq P_2$ existiert in R ein Element x, das zwar zu P_1, jedoch nicht zu P_2 gehört (oder umgekehrt), d. h., es ist $x(P_1) = 0$, $x(P_2) \neq 0$. Wir setzen $\varepsilon = \frac{1}{3}|x(P_2)|$ und bezeichnen mit U_1 bzw. U_2 die Mengen derjenigen Punkte P,

in denen $|x(P)| < \varepsilon$ bzw. $|x(P)| > 2\varepsilon$ ist. Infolge der Stetigkeit der Funktion $|x(P)|$ sind U_1 und U_2 elementfremde offene Mengen, die P_1 bzw. P_2 enthalten. Folglich ist Π ein HAUSDORFFscher Raum.

Wir beweisen jetzt die Umkehrung. Es sei Π ein HAUSDORFFscher Raum. Wir zeigen zuerst, daß die Funktion $|x(P)|$ in denjenigen Punkten P_0 stetig ist, in denen $x(P_0)$ verschwindet. Ist I die abgeschlossene Hülle der Menge aller Funktionen $y(P)$, $y \in R$, die in irgendeiner Umgebung von P_0 verschwinden, so ist I ein abgeschlossenes zweiseitiges Ideal von R, das mit P_0 übereinstimmt; denn es ist I der Durchschnitt aller I enthaltenden primitiven Ideale und ist $I \neq P_0$, so ist I auch in einem anderen primitiven Ideal P_1 enthalten. Da Π ein HAUSDORFFscher Raum ist, existiert eine Umgebung $U(P_0)$, deren abgeschlossene Hülle den Punkt P_1 nicht enthält, d. h., es ist $P_1 \notin hk(U(P_0))$. Dies bedeutet, daß R ein Element $y = y(P)$ enthält, das auf $U(P_0)$, aber nicht in P_1 verschwindet. Dann ist $y \in I \subset P_1$ und somit $y(P_1) = 0$. Der erhaltene Widerspruch zeigt, daß $I = P_0$. Mit anderen Worten, jedes Element $x \in R$, das im Punkt P_0 verschwindet, ist der Limes einer Folge von Elementen $x_n \in R$, die in einer Umgebung $U_n(P_0)$ verschwinden. Dann folgt aber aus der Ungleichung $|x - x_n| < \varepsilon$ für $n > N$, daß $|x(P)| < \varepsilon$ in U_N, d. h., die Funktion $|x(P)|$ ist im Punkt P_0 stetig. Daher läßt sich auf R der Satz V aus Nr. 4 anwenden (vgl. Nr. 4, Bemerkung 1).

Nun sei $|x(P_0)| = r < 0$. Wir können annehmen, daß x hermitesch ist; denn anderenfalls kann man es durch das Element $y = x^*x$ ersetzen, für welches $|y(P_0)| = |x(P_0)|^2 = r^2 > 0$ ist. Dann gilt auf Grund von Nr. 4, Satz V, die Ungleichung $|x(P)| < r + \varepsilon$ in einer Umgebung $U(P_0)$. Andererseits ist infolge von Satz I die Menge der Punkte P mit $|x(P)| \leqq r - \varepsilon$ abgeschlossen und daher die Menge der Punkte P mit $|x(P)| > r - \varepsilon$ offen.

B e m e r k u n g. Man kann zeigen (vgl. KAPLANSKY [13, S. 234]), daß der Strukturraum bikompakt ist, wenn die Bedingungen von Theorem 9 erfüllt sind. Die Behauptung dieses Satzes bleibt auch für eine vollständige vollreguläre Algebra R mit Einselement richtig, nur ist in diesem Fall der Strukturraum von R lokal bikompakt. Im Zusammenhang mit Theorem 9 ergibt sich das interessante Problem, einfache Bedingungen dafür zu finden, daß der Strukturraum einer vollregulären Algebra ein HAUSDORFFscher Raum ist. Bis heute sind darüber jedoch nur einzelne spezielle Resultate erzielt worden (vgl. KAPLANSKY [13]).

Die Ergebnisse aus § 23, Nr. 1 und 2, der Satz I aus § 23, Nr. 3, sowie Theorem 3 aus § 24 stammen von GELFAND und NEUMARK [1, 6] (vgl. auch NEUMARK [2]). Ein anderer Beweis von Theorem 3, der sich auf § 24, Theorem 1, stützt, wurde später von KAPLANSKY [9] gegeben. Satz II aus § 23, Nr. 3, und Theorem 2 aus § 23, Nr. 4, stammen von RAIKOW [6]. Theorem 1 aus § 23, Nr. 3, und seine Folgerung gab NEUMARK [2] an (diese Folgerung wurde gleichzeitig und von NEUMARK unabhängig von SEGAL [5] gefunden). Die Theoreme 1, 2 und 6 aus § 24 und ihre Folgerungen sowie die Ergebnisse der Nummern 1 bis 4 und 6 aus § 26 stammen von KAPLANSKY [9, 13], die Resultate von § 26, Nr. 5, von NEUMARK [7], die aus § 25, Nr. 5, von AMBROSE [2], einzelne Ergebnisse aus § 25 von KAPLANSKY [3] und BONSALL und GOLDIE [2]. Theorem 6 aus § 24 wurde, unabhängig von KAPLANSKY, von SEGAL [6] bewiesen.

Theorem 4 aus § 24 gibt Antwort auf eine von GELFAND und NEUMARK [1] gestellte Frage. Ein kurzer Beweis dieses Satzes, der sich auf Ergebnisse von KELLEY und VAUGHT [1] und Bemerkungen von KAPLANSKY stützt, findet sich im Referat von SCHATZ über die Arbeit von FUKAMIYA in den Math. Reviews 14, S. 884.

Theorem 5 aus § 25 wurde unter der Zusatzbedingung, daß die Algebra vollsymmetrisch ist, zuerst von GELFAND und NEUMARK [1] bewiesen.

KAPITEL VI

GRUPPENALGEBREN

§ 27. Topologische Gruppen

1. Definition einer Gruppe. Eine Gesamtheit $\mathfrak{G}$ von Elementen $g, h, \ldots$ nennen wir eine *Gruppe*, wenn in $\mathfrak{G}$ ein (im allgemeinen nichtkommutatives) Produkt $g_1 g_2$ von zwei Elementen g_1, g_2 aus $\mathfrak{G}$ definiert ist, das folgenden Bedingungen genügt:

α) Für je zwei Elemente $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ ist auch $g_1 g_2 \in \mathfrak{G}$;
β) es ist $(g_1 g_2) g_3 = g_1 (g_2 g_3)$ für beliebige $g_1, g_2, g_3 \in \mathfrak{G}$;
γ) in $\mathfrak{G}$ existiert genau ein Element e mit der Eigenschaft $eg = ge = g$ für alle $g \in \mathfrak{G}$; man nennt e das *Einselement* von $\mathfrak{G}$;
δ) für jedes $g \in \mathfrak{G}$ existiert in $\mathfrak{G}$ genau ein Element g^{-1} mit der Eigenschaft $gg^{-1} = g^{-1}g = e$; man nennt g^{-1} das *Inverse* zu g.

Offenbar ist dann auch g das Inverse zu g^{-1}.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *kommutativ*, wenn für alle $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ die Beziehung $g_1 g_2 = g_2 g_1$ gilt.

Die Abbildung $g \to g'$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ in die Gruppe $\mathfrak{G}'$ ist ein *Homomorphismus*, wenn

$$(g_1 g_2)' = g_1' g_2' \quad \text{für alle} \quad g_1, g_2 \in \mathfrak{G}.$$

Ist diese Abbildung eineindeutig, so nennt man sie einen *Isomorphismus*. Entsprechend heißen zwei Gruppen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{G}'$ *isomorph*, wenn ein Isomorphismus von $\mathfrak{G}$ auf $\mathfrak{G}'$ besteht. In der Gruppentheorie werden zwei isomorphe Gruppen als nicht wesentlich voneinander verschieden angesehen.

Die Menge aller Elemente $g \in \mathfrak{G}$, die bei dem Homomorphismus $g \to g'$ in das Einselement abgebildet werden, nennt man den *Kern* des Homomorphismus. Offenbar ist ein Homomorphismus genau dann ein *Isomorphismus*, wenn der Kern nur aus dem Einselement besteht.

Beispiele. 1. Die Gesamtheit R^1 aller reellen Zahlen ist die *additive Gruppe der reellen Zahlen*, wenn in R^1 die Addition als Verknüpfungsrelation definiert wird. Dabei ist die Zahl 0 das Einselement und die Zahl $-x$ das Inverse zu x.

Analog läßt sich die additive Gruppe C^1 der komplexen Zahlen definieren. Offenbar sind beide Gruppen kommutativ.

2. Die Gesamtheit R_0^1 aller von Null verschiedenen reellen Zahlen bildet die *multiplikative Gruppe der reellen Zahlen*, wenn man in R_0^1 die Multiplikation als Verknüpfungsrelation einführt. Dabei ist die Zahl 1 das Einselement und die Zahl $\frac{1}{x}$ das Inverse zu x.

Analog läßt sich die multiplikative Gruppe C_0^1 der komplexen Zahlen definieren. Beide Gruppen sind offenbar kommutativ.

3. Die Gesamtheit A_n aller komplexen Matrizen n-ter Ordnung, deren Determinante gleich Eins ist, bildet die *komplexe unimodulare Gruppe n-ter Ordnung*, wenn man in A_n die Matrizenmultiplikation als Verknüpfungsrelation definiert. Einselement dieser Gruppe ist die Einheitsmatrix, die Inverse zur Matrix a ist die Matrix a^{-1}. Die reelle unimodulare Gruppe läßt sich analog definieren. Diese Gruppen sind für $n \geqq 2$ nicht mehr kommutativ.

4. Es sei $\mathfrak{A}$ eine beliebige Menge. Jede eineindeutige Abbildung der Menge $\mathfrak{A}$ auf sich nennen wir eine *Transformation* S. Das Produkt $S_1 S_2$ zweier Abbildungen S_1, S_2 ist diejenige Abbildung, die man erhält, wenn man zuerst die Abbildung S_2 und danach die Abbildung S_1 ausführt. Man kann zeigen, daß die Gesamtheit aller Transformationen der gegebenen Menge $\mathfrak{A}$ eine Gruppe bilden. Ihr Einselement ist die identische Transformation, die jedes Element $\alpha \in \mathfrak{A}$ auf α abbildet.

5. Wir betrachten jetzt den Fall, daß $\mathfrak{A} = (-\infty, \infty)$ ist und S nur die Transformationen $x' = \alpha x + \beta$ ($\alpha > 0$, β reell) bezeichnet. Das Produkt $S_1 S_2$ zweier solcher Transformationen

$$S_1: \quad x' = \alpha_1 x + \beta_1,$$
$$S_2: \quad x' = \alpha_2 x + \beta_2$$

ist die Transformation

$$x' = \alpha_1(\alpha_2 x + \beta_2) + \beta_1 = \alpha_1\alpha_2 x + (\alpha_1\beta_2 + \beta_1).$$

Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet die *Gruppe der linearen Transformationen einer Geraden.*

6. Es sei $\mathfrak{A}$ eine Kreislinie. Wir betrachten alle möglichen Transformationen von $\mathfrak{A}$, die wir durch Drehung um den Mittelpunkt um einen beliebigen Winkel erhalten. Die Gesamtheit dieser Transformationen bildet die *Drehungsgruppe eines Kreises.* Diese Gruppe ist offenbar kommutativ. Als ihre Elemente kann man die Drehwinkel ansehen, wobei die Winkel, die sich um ein Vielfaches von 2π unterscheiden, ein und dasselbe Element der Gruppe bestimmen.

2. Untergruppen. Eine Menge $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$ heißt *Untergruppe* von $\mathfrak{G}$, wenn für zwei Elemente $g, h \in \mathfrak{G}_1$ auch $gh^{-1} \in \mathfrak{G}_1$ ist. Für $h = g$ folgt dann insbesondere $e \in \mathfrak{G}_1$, und daher folgt aus $g, h \in \mathfrak{G}_1$ auch $h^{-1} \in \mathfrak{G}_1$ und $gh \in \mathfrak{G}_1$. Da ferner in $\mathfrak{G}_1$ dieselben Verknüpfungsrelationen wie in $\mathfrak{G}$ gelten, ist $\mathfrak{G}_1$ ebenfalls eine Gruppe.

So sind z. B. die in den Beispielen 1 und 2 aus Nr. 1 angegebenen Gruppen R^1 bzw. R_0^1 Untergruppen von C^1 bzw. C_0^1.

Es sei H eine Untergruppe von $\mathfrak{G}$. Jede Menge Hg_0 (d. h. die Gesamtheit aller Elemente hg_0 mit $h \in H$) heißt *rechtsseitige Nebenklasse von $\mathfrak{G}$ bezüglich H*; analog läßt sich eine *linksseitige Nebenklasse* definieren. Dabei gehören zwei Elemente $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ genau dann einer rechtsseitigen Nebenklasse bezüglich H an, wenn $g_2 = hg_1$, also $g_2 g_1^{-1} \in H$ ist. Außerdem gehört jedes Element $g \in \mathfrak{G}$ zu einer rechtsseitigen Nebenklasse, nämlich zur Klasse Hg. Wir sehen also, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ in rechtsseitige Nebenklassen bezüglich H zerfällt. Wir bezeichnen nun mit $g^\wedge$ diejenige rechtsseitige Nebenklasse, die g enthält. Jedes Element g' aus der gegebenen Klasse ist ein *Repräsentant* dieser Klasse. Nach Multiplikation von rechts mit einem Element g_0 geht jede rechtsseitige Nebenklasse in eine andere rechtsseitige Nebenklasse über. Durch diese Multiplikation wird in der Gesamtheit dieser Klassen eine Transformation erzeugt.

Diese Transformation wollen wir mit $\overline{g_0}$ bezeichnen, und wir schreiben $g^{\wedge\prime} = g^{\wedge} g_0$, wenn $g^{\wedge\prime}$ diejenige Klasse ist, die aus $g^{\wedge}$ durch Multiplikation von rechts mit g_0 hervorgeht.

3. Definition und Eigenschaften einer topologischen Gruppe. Eine Menge $\mathfrak{G}$ von Elementen $g, h, \ldots$ heißt *topologische Gruppe*, wenn

α) $\mathfrak{G}$ eine Gruppe ist;

β) $\mathfrak{G}$ ein Hausdorffscher topologischer Raum ist;

γ) die Funktionen $f(g) = g^{-1}$ und $f(g, h) = gh$ (letztere in beiden Veränderlichen g und h) stetig sind.

So sind auch R^1, C^1, R_0^1, C_0^1, A_n in den Beispielen aus Nr. 1 topologische Gruppen, wenn man in ihnen auf die übliche Art eine Topologie definiert (vgl. die Beispiele aus § 2, Nr. 1 und 2).

Wir weisen darauf hin, daß man jede Gruppe $\mathfrak{G}$ als topologische Gruppe ansehen kann, indem man alle Mengen, die das Element g enthalten, als Umgebungen von g nimmt. Diese Topologie in $\mathfrak{G}$ nennen wir *diskret* und $\mathfrak{G}$ selbst eine *diskrete Gruppe.*

Ist $\mathfrak{G}$ eine topologische Gruppe, so ist die *Rechtsverschiebung* $g \to gg_0$ für jedes feste $g_0 \in \mathfrak{G}$ eine Homöomorphie der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf sich. Daher haben alle Umgebungen eines beliebigen Elements $g_0 \in \mathfrak{G}$ die Gestalt[1] Ug_0, wobei U Umgebung des Einselements e ist. Die analoge Behauptung gilt auch für *Linksverschiebungen* $g \to g_0 g$. Außerdem ist auch die Abbildung $g \to g^{-1}$ eine Homöomorphie der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf sich. Also ist mit U auch U^{-1} eine Umgebung von e.

I. *Jede Umgebung U des Einselements enthält eine symmetrische Umgebung V, d. h. eine Umgebung, die der Bedingung $V^{-1} = V$ genügt.*

Eine solche Umgebung ist nämlich $V = U \cap U^{-1}$.

II. *Jede Umgebung U des Einselements enthält eine Umgebung V mit $VV \subset U$.*

Beweis. Da das Produkt $g_1 g_2$ für $g_1 = e$, $g_2 = e$ stetig ist, existieren Umgebungen V_1, V_2 des Einselements, für welche $V_1 V_2 \subset U$ ist. Dann genügt die Umgebung $V = V_1 \cap V_2$ der Bedingung $VV \subset U$.

Analog gibt es für jedes natürliche n eine Umgebung V derart, daß $V^n \subset U$ ist; dabei ist V^n eine Abkürzung für $\underbrace{VV \cdots V}_{n\text{-mal}}$.

III. *Ist Q eine bikompakte Menge aus $\mathfrak{G}$ und U eine offene Menge, die Q enthält, so existiert eine Umgebung W des Einselements mit $WQ \subset U$.*

Beweis. Jedem $g \in Q$ entspricht eine Umgebung V des Einselements mit $Vg \subset U$ und eine Umgebung W des Einselements mit $W^2 \subset V$. Da Q bikompakt ist, existieren endlich viele Elemente $g_1, \ldots, g_n \in Q$ und Umgebungen $W_1, \ldots, W_n$ des Einselements derart, daß $W_1 g_1, \ldots, W_n g_n$ die Menge Q überdecken. Dann hat die Umgebung $W = W_1 \cap \ldots \cap W_n$ die geforderten

[1]) Ug_0 ist die Gesamtheit der Elemente gg_0 mit $g \in U$. Analog bezeichnet dann S^{-1} die Gesamtheit aller Elemente g^{-1}, $g \in S$, und ST die der Elemente $g_1 g_2$, $g_1 \in S$, $g_2 \in T$.

Eigenschaften; denn mit $g \in Q$ liegt g auch in $W_k g_k$ für ein $k = 1, 2, \ldots, n$, und somit ist $Wg \subset WW_k g_k \subset W_k^2 g_k \subset V g_k \subset U$.

IV. *Sind Q_1, Q_2 bikompakte Mengen aus $\mathfrak{G}$, so ist $Q_1 Q_2$ ebenfalls bikompakt.*

Denn $Q_1 Q_2$ ist das Bild der bikompakten Menge $Q_1 \times Q_2 \subset \mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$ bei der stetigen Abbildung $\{g_1, g_2\} \to g_1 g_2$ (vgl. § 2, Nr. 6, Satz IV).

Wir nennen eine topologische Gruppe *lokal bikompakt* (oder *bikompakt*), wenn sie einen lokal bikompakten (oder bikompakten) topologischen Raum bildet. So sind z. B. die Gruppen aus den Beispielen in Nr. 1 lokal bikompakt, wobei die Gruppe aus Beispiel 6 sogar bikompakt ist.

Mit $L = L(\mathfrak{G})$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller stetigen Zahlenfunktionen auf $\mathfrak{G}$, von denen jede außerhalb einer bikompakten Menge verschwindet.

V. *Ist $\mathfrak{G}$ lokal bikompakt, so ist jede Funktion $x(g) \in L(\mathfrak{G})$ gleichmäßig stetig, d. h., für jedes $\varepsilon > 0$ existiert eine Umgebung V des Einselements derart, daß $|x(g_1) - x(g_2)| < \varepsilon$ für $g_1 g_2^{-1} \in V$ ist.*

Beweis. Es verschwinde $x(g)$ außerhalb einer bikompakten Menge Q, und es sei U eine symmetrische Umgebung des Einselements mit bikompakter abgeschlossener Hülle. Die Menge W der Punkte g, für die $|x(gg_1) - x(g_1)| < \varepsilon$ für alle $g_1 \in UQ$ ist, ist offen (vgl. § 2, Nr. 12, Satz V) und enthält das Einselement. Ist $g \in U$, so verschwinden $x(gg_1)$ und $x(g_1)$ außerhalb UQ. Es ist also $|x(gg_1) - x(g_1)| < \varepsilon$ für $g \in V = W \cap U$.

Wir nennen eine Menge $\mathfrak{G}_1 \subset \mathfrak{G}$ eine *topologische Untergruppe* von $\mathfrak{G}$, wenn

a) $\mathfrak{G}_1$ eine Untergruppe der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist;
b) $\mathfrak{G}_1$ topologischer Teilraum des topologischen Raumes $\mathfrak{G}$ ist.

Eine topologische Untergruppe heißt *abgeschlossen*, wenn sie eine abgeschlossene Teilmenge des topologischen Raumes $\mathfrak{G}$ ist. So sind beispielsweise R^1 und R_0^1 abgeschlossene Untergruppen von C_1 bzw. C_0^1.

4. Invariantes Integral und invariantes Maß auf einer topologischen Gruppe. Es sei $\mathfrak{G}$ eine topologische Gruppe. Ist $x(g) \in L = L(\mathfrak{G})$, so gehören die Funktionen $x^h(g) = x(gh)$ und $x_h(g) = x(h^{-1}g)$ für jedes $h \in \mathfrak{G}$ ebenfalls zu L. Dies folgt unmittelbar daraus, daß die Abbildungen $g \to hg$ und $g \to gh$ Homöomorphien sind.

Ein Integral[1]) $I(x)$ auf $L(\mathfrak{G})$ nennen wir *rechtsinvariantes Integral* auf $\mathfrak{G}$, wenn

$$I(x^h) = I(x) \tag{1}$$

für alle $h \in \mathfrak{G}$ und alle $x \in L(\mathfrak{G})$ ist; analog definiert man ein *linksinvariantes Integral* auf $\mathfrak{G}$. Das durch das rechts- bzw. linksinvariante Integral definierte Maß heißt *rechts-* bzw. *linksinvariantes Maß*. Bezeichnen wir diese Maße mit μ_r bzw. μ_l, so können wir der Bedingung (1) die Form

$$\int x(gh)\, d\mu_r(g) = \int x(g)\, d\mu_r(g) \tag{1'}$$

[1]) Vgl. § 6.

oder für das Maß μ_l die Form

$$\int x(hg)\,d\mu_l(g) = \int x(g)\,d\mu_l(g) \tag{2}$$

geben. Offenbar besagen diese Bedingungen, daß

$$\mu_r(\Delta h) = \mu_r(\Delta), \quad \mu_l(h\Delta) = \mu_l(\Delta) \tag{3}$$

für jede meßbare Menge Δ und jedes $h \in \mathfrak{G}$ ist.

5. Das invariante Integral auf einer lokal bikompakten Gruppe. Wir setzen jetzt voraus, daß $\mathfrak{G}$ eine lokal bikompakte Gruppe ist, und zeigen dann, daß auf $\mathfrak{G}$ ein und bis auf einen konstanten Faktor nur ein rechtsinvariantes Integral existiert.

Wir bezeichnen mit L^+ die Gesamtheit aller nichtnegativen stetigen Funktionen auf $\mathfrak{G}$, von denen jede außerhalb einer bikompakten Menge verschwindet. Ferner seien f und φ aus L^+ und außerdem $\varphi \not\equiv 0$. Wir untersuchen dann alle möglichen endlichen Systeme von Elementen $g_i \in \mathfrak{G}$ und Zahlen $c_i \geqq 0$ mit der Eigenschaft

$$f(g) \leqq \sum c_i \varphi(g g_i) \quad \text{für alle} \quad g \in \mathfrak{G}; \tag{1}$$

mit $(f:\varphi)$ bezeichnen wir die untere Grenze der Summen $\sum_i c_i$ in diesen Systemen.

Solche Systeme existieren; denn ist $\varphi \not\equiv 0$, $\varphi \geqq 0$, so gibt es eine offene Menge U mit bikompakter abgeschlossener Hülle, auf der die untere Grenze m der Werte von φ positiv ist; f verschwinde außerhalb der bikompakten Menge Q. Dann läßt sich Q von endlich vielen Mengen $U g_i^{-1}$ überdecken, und ist $f(g) \leqq M$, so erhalten wir

$$f(g) \leqq \frac{M}{m} \sum_{i=1}^{k} \varphi(g g_i).$$

Hieraus ergibt sich

$$(f:\varphi) \leqq k \frac{M}{m}. \tag{2}$$

I. *Die Zahl $(f:\varphi)$ genügt den folgenden Bedingungen:*

a) $(f^h:\varphi) = (f:\varphi)$;
b) $(cf:\varphi) = c(f:\varphi)$ *für jedes* $c \geqq 0$;
c) $(f_1 + f_2:\varphi) \leqq (f_1:\varphi) + (f_2:\varphi)$;
d) $(f:\psi) \leqq (f:\varphi)(\varphi:\psi)$.

Beweis. Die Beziehungen a) bis c) gelten offenbar. Die Bedingung d) ist ebenfalls richtig; denn aus $f(g) \leqq \sum_i c_i \varphi(g g_i)$ und $\varphi(g) \leqq \sum_j d_j \psi(g h_j)$ folgt

$$f(g) \leqq \sum_{i,j} c_i d_j \psi(g g_i h_j).$$

II. *Ist $f \not\equiv 0$, so gilt $(f:\varphi) > 0$.*

Aus (1) folgt nämlich $\sup f \leqq \sup \varphi \sum_i c_i$ und somit $(f:\varphi) \geqq \dfrac{\sup f}{\sup \varphi}$.

Wir wählen jetzt eine feste, nicht identisch verschwindende Funktion $f_0 \in L^+$ und setzen

$$I_\varphi(f) = \frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)}.$$

Aus der Eigenschaft d) folgt

$$\frac{1}{(f_0:f)} \leqq \frac{(f:\varphi)}{(f_0:\varphi)} \leqq (f:f_0), \tag{3}$$

also

$$\frac{1}{(f_0:f)} \leqq I_\varphi(f) \leqq (f:f_0). \tag{4}$$

Außerdem erhalten wir aus den Eigenschaften a) bis c)

$$I_\varphi(f^h) = I_\varphi(f), \quad I_\varphi(cf) = cI_\varphi(f) \quad \text{für} \quad c \geqq 0,$$
$$I_\varphi(f_1 + f_2) \leqq I_\varphi(f_1) + I_\varphi(f_2). \tag{5}$$

Wir bezeichnen nun mit F_U die Gesamtheit aller Funktionen $f \in L^+$, die außerhalb U verschwinden.

III. *Ist $h_i \in L^+$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$ und $\sum_i h_i \leqq 1$, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U des Einselements derart, daß*

$$\sum_i I_\varphi(f h_i) \leqq I_\varphi(f)(1+\varepsilon) \tag{6}$$

für alle Funktionen $\varphi \in F_U$ ist.

Beweis. Auf Grund von Nr. 3, Satz V, sind die Funktionen h_i gleichmäßig stetig auf $\mathfrak{G}$. Demzufolge existiert eine Umgebung U des Einselements mit

$$|h_i(g) - h_i(g')| < \frac{\varepsilon}{n} \quad (i = 1, 2, \ldots, n) \quad \text{für alle} \quad g' \in Ug. \tag{7}$$

Es sei $\varphi \in F_U$ und $f(g) \leqq \sum_j c_j \varphi(g g_j)$. Da $\varphi(g g_j) = 0$ für $g \notin U g_j^{-1}$ ist, folgt

$$f(g) \leqq \sum_i{}' c_j \varphi(g g_j),$$

wobei sich die Summe nur aus den Summanden zusammensetzt, für die $g \in U g_j^{-1}$ ist. Nun gilt wegen (7) für diese g und g_j die Ungleichung $h_i(g) < h_i(g_j^{-1}) + \frac{\varepsilon}{n}$. Folglich ist

$$f(g)\, h_i(g) \leqq \sum_j{}' c_j \left[h_i(g_j^{-1}) + \frac{\varepsilon}{n}\right] \varphi(g g_j),$$

also

$$f(g)\, h_i(g) \leqq \sum_j c_j \left[h_i(g^{-1}) + \frac{\varepsilon}{n}\right] \varphi(g g_j)$$

für alle $g \in \mathfrak{G}$. Hieraus ergibt sich

$$(f h_i : \varphi) \leqq \sum_j c_j \left[h_i(g_j^{-1}) + \frac{\varepsilon}{n}\right]$$

oder, da $\sum_i h_i \leqq 1$ sein sollte,

$$\sum_i (f h_i : \varphi) \leqq \left(\sum_j c_j\right)(1 + \varepsilon). \tag{8}$$

Nun können wir die Koeffizienten c_j und die Elemente g_j so wählen, daß die Summe $\sum_j c_j$ beliebig nahe an $(f : \varphi)$ kommt; also folgt aus (8)

$$\sum_i (f h_i : \varphi) \leqq (f : \varphi)(1 + \varepsilon); \tag{9}$$

nach Division durch $(f_0 : \varphi)$ erhalten wir (6).

IV. *Für je endlich viele Funktionen $f_i \in L^+$ und alle $\varrho > 0, \Lambda > 0$ existiert eine Umgebung U des Einselements derart, daß*

$$I_\varphi\left(\sum_i \lambda_i f_i\right) \leqq \sum_i \lambda_i I_\varphi(f_i) \leqq I_\varphi\left(\sum_i \lambda_i f_i\right) + \varrho \tag{10}$$

für alle $\varphi \in F_U$ und alle nichtnegativen Zahlen $\lambda_i \leqq \Lambda$ ist.

Beweis. Offenbar braucht man wegen (5) nur die zweite der Ungleichungen zu beweisen. Es sei Q eine bikompakte Menge, außerhalb der alle Funktionen f_i verschwinden, und f' eine feste Funktion aus L^+, die ein positives Minimum auf Q hat.

Wir setzen $F = \sum_i \lambda_i f_i + \varepsilon f'$ und

$$h_i = \begin{cases} \dfrac{\lambda_i f_i}{F} & \text{auf } Q, \\ 0 & \text{außerhalb } Q. \end{cases}$$

Dann ist $h_i F = \lambda_i f_i$ und $\sum_i h_i \leqq 1$. Wenden wir nun Satz III auf diese h_i und auf F statt f an und ist U eine entsprechende Umgebung des Einselements, so gilt für alle Funktionen $\varphi \in F_U$ die Ungleichung

$$\sum_i \lambda_i I_\varphi(f_i) \leqq I_\varphi(F)\,(1+\varepsilon) = I_\varphi\Big(\sum_i \lambda_i f_i + \varepsilon f'\Big)\,(1+\varepsilon)$$
$$\leqq \Big[I_\varphi\Big(\sum_i \lambda_i f_i\Big) + \varepsilon I_\varphi(f')\Big]\,(1+\varepsilon). \tag{11}$$

Für hinreichend kleines ε erhalten wir die zweite der Ungleichungen (10), denn $I_\varphi(\sum_i \lambda_i f_i)$ ist wegen (4) und (5) für $\lambda_i \leqq \Lambda$ und feste f_i beschränkt.

V. *Es sei $f \in L^+$ und U eine Umgebung des Einselements mit der Eigenschaft*

$$|f(g) - f(g')| < \varepsilon \quad \textit{für} \quad g \in U g'. \tag{12}$$

Dann kann man für jede Funktion $\psi \in F_U$, $\psi \not\equiv 0$, und jedes $\alpha > \varepsilon$ endlich viele Elemente $g_i \in \mathfrak{G}$ und Zahlen $c_i > 0$ so wählen, daß die Ungleichung

$$\Big|f(g) - \sum_i c_i \psi(g g_i)\Big| < \alpha \quad \textit{für alle} \quad g \in \mathfrak{G} \tag{13}$$

erfüllt ist.

Beweis. Auf Grund der Voraussetzungen ist für alle $g, g' \in \mathfrak{G}$

$$[f(g) - \varepsilon]\,\psi(g g'^{-1}) \leqq f(g')\,\psi(g g'^{-1}) \leqq [f(g) + \varepsilon]\,\psi(g g'^{-1}). \tag{14}$$

Wir wählen nun eine Zahl $\eta > 0$ derart, daß die Ungleichung

$$(f : \psi^*)\,\eta < \alpha - \varepsilon \tag{15}$$

mit $\psi^*(g) = \psi(g^{-1})$ erfüllt ist, und eine Umgebung V des Einselements mit der Eigenschaft

$$|\psi(g) - \psi(g')| \leqq \eta \quad \text{für} \quad g \in g' V. \tag{16}$$

Es existieren endlich viele Elemente $g_i \in \mathfrak{G}$, so daß die $V g_i$ die Menge derjenigen Punkte überdecken, für die $f > 0$ ist. Weiterhin gibt es auf Grund von § 15, Nr. 2, Satz II, Funktionen $h_i \in L^+$ mit $h_i = 0$ außerhalb $V g_i$ und $\sum_i h_i = 1$ für $f > 0$. Dann gilt für alle $g, g' \in \mathfrak{G}$

$$h_i(g')\,f(g')\,[\psi(g g'^{-1}) - \eta] \leqq h_i(g')\,f(g')\,\psi(g g_i^{-1}) \leqq h_i(g')\,f(g')\,[\psi(g g'^{-1}) + \eta].$$

Summieren wir diese Ungleichungen über i, vergleichen wir das Ergebnis mit (14) und berücksichtigen wir die Beziehung $\psi(g) = \psi^*(g^{-1})$, so erhalten wir

$$[f(g) - \varepsilon]\,\psi^*(g' g^{-1}) - \eta f(g') \leqq \sum_i h_i(g')\,f(g')\,\psi^*(g_i g^{-1}) \leqq [f(g) + \varepsilon]\,\psi^*(g' g^{-1}) + \eta f(g'). \tag{16'}$$

Hieraus folgt[1])

$$[f(g) - \varepsilon]\,I_\varphi(\psi^*) - \eta I_\varphi(f) \leqq I_\varphi\Big(\sum_i \psi^*(g_i g^{-1})\,h_i f\Big) \leqq [f(g) + \varepsilon]\,I_\varphi(\psi^*) + \eta I_\varphi(f). \tag{17}$$

[1]) Wir beweisen die erste der Ungleichungen (17). Aus (16′) folgt

$$[f(g) - \varepsilon]\,\psi^*(g' g^{-1}) \leqq \eta f(g') + \sum_i h_i(g')\,f(g')\,\psi^*(g_i g^{-1}).$$

Hieraus erhalten wir, wenn wir (5) auf die Funktionen von g' anwenden,

$$[f(g) - \varepsilon]\,I_\varphi(\psi^*) \leqq \eta I_\varphi(f) + I_\varphi\Big(\sum_i \psi^*(g_i g^{-1})\,h_i f\Big)$$

für $f(g) - \varepsilon \geqq 0$. Für $f(g) - \varepsilon < 0$ gilt dies offenbar.

Da wegen (15) und Satz I, Bedingung d)

$$\frac{I_\varphi(f)}{I_\varphi(\psi^*)} \leqq (f:\psi^*) = \frac{\beta-\varepsilon}{\eta} \qquad (\beta < \alpha)$$

ist, ergibt sich aus (17), wenn wir dort durch $I_\varphi(\psi^*)$ dividieren,

$$f(g) - \beta \leqq I_\varphi\left(\sum_i \frac{\psi^*(g_i g^{-1})}{I_\varphi(\psi^*)} h_i f\right) \leqq f(g) + \beta. \tag{18}$$

Wir wenden jetzt Satz IV auf die Funktionen $f_i = h_i f$ und die Zahlen

$$\lambda_i = \frac{\psi^*(g_i g^{-1})}{I_\varphi(\psi^*)} \leqq (f_0:\psi^*) \sup \psi^* \qquad \text{[vgl. (4)]}, \qquad \varrho = \alpha - \beta$$

an. Nach diesem Satz existiert eine Umgebung U des Einselements derart, daß für $\varphi \in F_U$ die Ungleichung

$$I_\varphi\left(\sum_i \frac{\psi^*(g_i g^{-1})}{I_\varphi(\psi^*)} h_i f\right) \leqq \sum c_i \psi^*(g_i g^{-1}) \leqq I_\varphi\left(\sum_i \frac{\psi^*(g_i g^{-1})}{I_\varphi(\psi^*)} h_i f\right) + \alpha - \beta \tag{19 a}$$

mit

$$c_i = \frac{I_\varphi(h_i f)}{I_\varphi(\psi^*)} \tag{19 b}$$

gilt. Aus (18) und (19a) erhält man, wenn man $\psi^*(g) = \psi(g^{-1})$ berücksichtigt, die Ungleichung (13), in der die g_i die Rolle der g_i^{-1} spielen.

Theorem. *Auf jeder lokal bikompakten Gruppe* $\mathfrak{G}$ *existiert ein und bis auf einen konstanten Faktor nur ein rechtsinvariantes Integral.*

Beweis. Für eine feste Funktion f bilden die Zahlen $I_\varphi(f)$ eine halbgeordnete Menge $\{I_\varphi(f)\}$, wenn man annimmt, daß $I_{\varphi_1}(f)$ auf $I_{\varphi_2}(f)$ folgt für

$$\{g:\varphi_1(g)=0\} \supset \{g:\varphi_2(g)=0\}.$$

Wir beweisen jetzt, daß ein Grenzwert $\lim\limits_{\varphi} I_\varphi(f)$ der Menge $\{I_\varphi(f)\}$ existiert. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, daß es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U des Einselements gibt, die der Bedingung

$$|I_{\varphi_1}(f) - I_{\varphi_2}(f)| < \varepsilon \qquad \text{für alle} \quad \varphi_1,\ \varphi_2 \in F_U \tag{20}$$

genügt. Es sei V eine Umgebung des Einselements derart, daß

$$|f(g) - f(g')| < \varepsilon_1, \quad |f_0(g) - f_0(g')| < \varepsilon_1 \qquad \text{für} \quad g \in Vg' \tag{21}$$

ist, und $\psi \in F_V$, $\psi \neq 0$. Auf Grund von Satz V existieren endlich viele $c_i > 0$ und $g_i \in \mathfrak{G}$, so daß

$$\left|f(g) - \sum_i c_i \psi(g g_i)\right| < 2\varepsilon_1 \tag{22}$$

ist; dabei werden die c_i durch Formel (19b) definiert, wobei $\sum\limits_i h_i \leqq 1$ ist. Setzen wir dann $\omega(g) = |f(g) - \sum\limits_i c\,\psi(g g_i)|$ und wenden wir auf $\omega(g)$ die Ungleichungen (2) und (4) an, so erhalten wir mit (22) $I_\varphi(\omega) < \frac{2\varepsilon_1}{m} k(f_0)$, wobei m eine positive untere Schranke der Funktion $f_0(g)$ auf einer festen offenen Menge ist und $k(f_0)$ unabhängig von ε_1 gewählt werden kann. Denn setzt man $Q = \overline{\{g : f(g) > 0\}}$, so ist $\overline{V} g_i \cap Q \neq \emptyset$, und daher gilt $g_i \in \overline{V} Q$; hieraus folgt, daß $\omega(g) = 0$ ist außerhalb einer festen bikompakten Menge $\overline{V} Q^{-1} \overline{V} \cup Q$. Dann ergibt sich aber aus $f(g) \leqq \sum\limits_i c_i \psi(g g_i) + \omega(g)$ und $\sum\limits_i c_i \psi(g g_i) \leqq f(g) + \omega(g)$ die Ungleichung

$$I_\varphi(f) - \frac{2\varepsilon_1}{m} k(f_0) < I_\varphi\left(\sum_i c_i \psi^{g_i}\right) < I_\varphi(f) + \frac{2\varepsilon_1}{m} k(f_0). \tag{23}$$

Andererseits existiert auf Grund der Sätze III und IV eine Umgebung U des Einselements derart, daß für $\varphi \in F_U$

$$\sum_i I_\varphi(f h_i) \leqq I_\varphi(f)\,(1+\varepsilon_1)$$

und

$$I_\varphi\Big(\sum_i c_i \psi^{g_i}\Big) \leqq \sum_i c_i I_\varphi(\psi^{g_i}) = \Big(\sum_i c_i\Big) I_\varphi(\psi) \leqq I_\varphi\Big(\sum_i c_i \psi^{g_i}\Big) + \frac{\varepsilon_1}{m} \tag{24}$$

ist. Aus (23) und (24) erhalten wir

$$I_\varphi(f) - \varepsilon_2 < \Big(\sum_i c_i\Big) I_\varphi(\psi) < I_\varphi(f) + \varepsilon_2 \tag{25}$$

mit $\varepsilon_2 = \frac{3\varepsilon_1}{m} k(f_0)$. Eine analoge Ungleichung gilt auch für die Funktion f_0 statt f, wobei wir aber dieselbe Funktion ψ und dieselbe Umgebung U nehmen können. Bezeichnen wir mit c_i' die Koeffizienten c_i für f_0 und berücksichtigen wir $I_\varphi(f_0) = 1$, so finden wir

$$1 - \varepsilon_2 < \Big(\sum_i c_i'\Big) I_\varphi(\psi) < 1 + \varepsilon_2, \tag{26}$$

woraus sich zusammen mit (25)

$$\frac{\sum_i c_i}{\sum_i c_i'}(1-\varepsilon_2) - \varepsilon_2 \leqq I_\varphi(f) \leqq \frac{\sum_i c_i}{\sum_i c_i'}(1+\varepsilon_2) + \varepsilon_2$$

für alle $\varphi \in F_U$ ergibt. Hieraus folgt wegen (4) für $\varepsilon_2 \leqq \frac{1}{2}$

$$1 + \frac{\sum_i c_i}{\sum_i c_i'} \leqq \frac{I_\varphi(f)+1}{1-\varepsilon_2} \leqq 2[(f:f_0)+1]$$

und für $\varphi_1, \varphi_2 \in F_U$

$$|I_{\varphi_1}(f) - I_{\varphi_2}(f)| \leqq 2\varepsilon_2\Big(1 + \frac{\sum c_i}{\sum c_i'}\Big) = \frac{6\varepsilon_1}{m} k(f_0)\Big(1 + \frac{\sum c_i}{\sum c_i'}\Big) \leqq \frac{12\varepsilon_1}{m} k(f_0)\,[1 + (f:f_0)].$$

Da $\varepsilon_1 > 0$ beliebig klein gemacht werden kann, ist somit die Existenz von $\lim_\varphi I_\varphi(f)$ bewiesen.

Wir setzen

$$I(f) = \lim I_\varphi(f). \tag{27}$$

Aus (4) folgt $I(f) > 0$; außerdem ergibt sich aus den Beziehungen $I_\varphi(f^h) = I_\varphi(f)$ und Satz IV, daß $I(f)$ rechtsinvariant ist und

$$I(c_1 f_1 + c_2 f_2) = c_1 I(f_1) + c_2 I(f_2) \tag{28}$$

für alle $f_1, f_2 \in L^+$ und $c_1 \geqq 0$, $c_2 \geqq 0$ gilt. Setzen wir $I(f_1 - f_2) = I(f_1) - I(f_2)$ für $f_1, f_2 \in L^+$, so erhalten wir ein rechtsinvariantes Integral auf der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Somit bleibt nur noch zu beweisen, daß dieses Integral bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist.

Es sei $I'(f)$ ein rechtsinvariantes Integral auf $\mathfrak{G}$. Ist $f(g) \leqq \sum_i \alpha_i \psi(g g_i)$, so ist $I'(f)$ höchstens gleich $(\sum_i \alpha_i)\, I'(\psi)$ und daher

$$I'(f) \leqq (f:\psi)\, I'(\psi). \tag{29}$$

Es sei $f_1 \in L^+$ und $Q_1 = \overline{\{g : f_1(g) > 0\}}$; wendet man (22) auf f_1 an, so erhält man

$$f_1(g) + 2\varepsilon_1 f'(g) \geqq \sum_i c_i \psi(g g_i), \tag{30}$$

wobei f' eine feste Funktion aus L^+ ist, die auf der festen bikompakten Menge $\overline{V}Q_1^{-1}\overline{V} \cup Q_1$ gleich 1 ist. Aus (3) folgt, daß

$$I'(f_1) + 2\varepsilon_1 I'(f') \geqq \left(\sum_i c_i\right) I'(\psi) \geqq (f_1 : \psi) I'(\psi)$$

und daher

$$\frac{I'(f_1)}{I'(f)} + 2\varepsilon_1 \frac{I'(f')}{I'(f)} \geqq \frac{(f_1 : \psi)}{(f : \psi)} = \frac{I_\psi(f_1)}{I_\psi(f)}$$

ist. Der Grenzübergang zuerst nach $\psi \in F_U$ und dann nach $\varepsilon_1 \to 0$ liefert

$$\frac{I'(f_1)}{I'(f)} \geqq \frac{I(f_1)}{I(f)}.$$

Vertauscht man hier f_1 und f, so erhält man, daß auch

$$\frac{I'(f_1)}{I'(f)} \leqq \frac{I(f_1)}{I(f)}$$

und daher $\frac{I'(f_1)}{I'(f)} = \frac{I(f_1)}{I(f)}$ ist. Also gilt $I'(f) = C\,I(f)$ für alle $f \in L^+$ und daher für alle $f \in L$, wobei C eine Konstante ist. Damit ist der Satz bewiesen.[1])

VI. *Das rechtsinvariante Maß jeder offenen Menge U ist positiv, das jeder bikompakten Menge Q ist endlich.*

Beweis. Es sei V eine offene Menge, deren abgeschlossene Hülle bikompakt und in U enthalten ist, und f eine Funktion aus L^+, die außerhalb V verschwindet und den Bedingungen $f \not\equiv 0$, $f \leqq 1$ unterworfen ist. Dann gilt $\mu_r(U) \geqq I(f) > 0$. Ferner ist für $f \in L^+$ und $f = 1$ auf Q

$$\mu_r(Q) \leqq I(f) < \infty.$$

Ist

$$I_r(x) = \int x(g)\, d\mu_r(g)$$

ein rechtsinvariantes Integral auf einer lokal bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist

$$I_r'(x) = \int x(hg)\, d\mu_r(g)$$

ebenfalls ein rechtsinvariantes Integral, und somit gilt

$$\int x(hg)\, d\mu_r(g) = \lambda(h) \int x(g)\, d\mu_r(g); \tag{31}$$

dabei ist $\lambda(h)$ eine gewisse Zahlenfunktion. Man sieht leicht, daß

$$\lambda(h_1 h_2) = \lambda(h_1)\lambda(h_2), \qquad \lambda(e) = 1$$

ist. Außerdem folgt aus den Eigenschaften der Funktionen $x(g) \in L$ (vgl. Nr. 3, Satz V) und des Funktionals $I_r(x)$ die Stetigkeit von $\lambda(h)$.

Wir setzen

$$I_l(x) = \int x(g)\lambda(g)\, d\mu_r(g)$$

---

[1]) Der hier angegebene Beweis stammt von H. Cartan [1].

und erhalten so ein linksinvariantes Integral $I_l(x)$; denn wenden wir (31) auf $x(g)\lambda(g)$ statt auf $x(g)$ an, so finden wir

$$\lambda(h)\int x(hg)\lambda(g)\,d\mu_r(g)=\int x(hg)\lambda(hg)\,d\mu_r(g)=\lambda(h)\int x(g)\lambda(g)\,d\mu_r(g),$$

also

$$\int x(hg)\lambda(g)\,d\mu_r(g)=\int x(g)\lambda(g)\,d\mu_r(g),$$

woraus nach geeigneter Normierung der Maße die Beziehung

$$\frac{d\mu_l(g)}{d\mu_r(g)}=\lambda(g)$$

folgt.

Außerdem ist

$$\int x(g^{-1})\,d\mu_r(g)=\int x(g)\lambda(g)\,d\mu_r(g); \tag{32}$$

denn setzen wir $x(g^{-1})=\tilde{x}(g)$, so ist

$$\int x(g_0g^{-1})\,d\mu_r(g)=\int \tilde{x}(gg_0^{-1})\,d\mu_r(g)=\int \tilde{x}(g)\,d\mu_r(g)=\int x(g^{-1})\,d\mu_r(g),$$

woraus ersichtlich ist, daß die linke Seite von (32) ein linksinvariantes Integral ist; folglich gilt

$$\int x(g^{-1})\,d\mu_r(g)=c\int x(g)\lambda(g)\,d\mu_r(g).$$

Wenden wir diese Gleichung auf die Funktionen $x(g)$ an, die nur in einer Umgebung $|\lambda(g)-1|<\varepsilon$ von Null verschieden sind und den Bedingungen $x(g^{-1})=x(g)$, $\int x(g)\,d\mu_r(g)=1$ genügen, so erhalten wir $c=1$.

VII. *Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist genau dann bikompakt, wenn ihre invarianten Maße endlich sind.*

Beweis. Ist $\mathfrak{G}$ bikompakt, so ist $1\in L(\mathfrak{G})$ und demnach $\mu_l(\mathfrak{G})=I_l(1)<\infty$ und $\mu_r(\mathfrak{G})=I_r(1)<\infty$. Ist dagegen $\mathfrak{G}$ nicht bikompakt, so existiert eine Umgebung V des Einselements mit bikompakter abgeschlossener Hülle derart, daß $\mathfrak{G}$ nicht durch endlich viele Verschiebungen der Umgebung V bedeckt werden kann. Folglich gibt es unendlich viele Elemente $g_n\in\mathfrak{G}$, für welche g_n nicht in $\bigcup\limits_{k=1}^{n-1} g_kV$ enthalten ist. Ist U eine symmetrische Umgebung des Einselements mit der Eigenschaft $UU\subset V$, so schneiden sich die Mengen g_nU nicht und haben das gleiche positive linksinvariante Maß. Somit ist $\mu_l(\mathfrak{G})=\infty$. Analog läßt sich zeigen, daß $\mu_r(\mathfrak{G})$ ebenfalls unendlich groß ist.

Die Gruppe $\mathfrak{G}$ heißt *unimodular*, wenn $\lambda(g)\equiv 1$ ist. Ist eine Gruppe unimodular, so ist ein rechtsinvariantes Integral auch linksinvariant, und das auf ihr definierte Maß heißt *zweiseitig invariant* oder schlechthin *invariant*. Für ein invariantes Maß gelten somit die Gleichungen (1′) und (2) aus Nr. 4, und (32) erhält die Form

$$\int x(hg)\,d\mu(g)=\int x(gh)\,d\mu(g)=\int x(g^{-1})\,d\mu(g).$$

Offenbar ist jede kommutative Gruppe unimodular. Außerdem gilt der folgende Satz.

VIII. *Jede bikompakte Gruppe ist unimodular.*

Setzt man nämlich $x(g) \equiv 1$ in (31) ein, so erhalten wir

$$\mu_r(\mathfrak{G}) = \lambda(h)\mu_r(\mathfrak{G}), \qquad \lambda(h) \equiv 1.$$

Nun sei U eine symmetrische Umgebung des Einselements derart, daß $\overline{U}$ bikompakt ist. Wir setzen $\mathfrak{G}_0 = \bigcup_{n=1}^{\infty} \overline{U}^n$, also gleich der Vereinigung abzählbar vieler bikompakter Mengen $\overline{U}^n$. Offenbar ist $\mathfrak{G}_0$ Untergruppe von $\mathfrak{G}$ und gleichzeitig offen und abgeschlossen. Denn aus $g_0 \in \mathfrak{G}_0$ folgt $g_0 \in \overline{U}^n$ für ein gewisses n; $g_0 U$ ist eine Umgebung des Elements g_0 und ferner $g_0 U \subset \overline{U}^{n+1} \subset \mathfrak{G}_0$; somit ist $\mathfrak{G}_0$ offen. Andererseits ist $\overline{\mathfrak{G}}_0 \subset U\mathfrak{G}_0 = \mathfrak{G}_0$ und folglich $\mathfrak{G}_0$ abgeschlossen.

Hat $\mathfrak{G}_0$ diese Eigenschaften, so ist $\mathfrak{G}$ die Vereinigung (eventuell nicht abzählbar vieler) sich nicht überschneidender rechtsseitiger Nebenklassen $\{\mathfrak{G}_0 g_\alpha\}$ (vgl. Nr. 2), deren jede eine gleichzeitig abgeschlossene und offene Menge bildet. Ist A eine beliebige offene Menge, so ist $V = \bigcup_\alpha V_\alpha$, wobei die $V_\alpha = V \cap \mathfrak{G}_0 g_\alpha$ offene Mengen sind. Nun ist infolge Satz VI das Maß einer nichtleeren offenen Menge positiv. Außerdem gilt $\mu(V) = \sum_\alpha \mu(V_\alpha)$ (vgl. § 6, Nr. 5, Satz I). Folglich kann die Menge V, wenn sie summierbar ist, nur höchstens abzählbar viele Mengen $\mathfrak{G}_0 g_\alpha$ schneiden. Andererseits existiert für jede summierbare Menge $A \subset \mathfrak{G}$ eine offene summierbare Menge $V \supset A$ (vgl. § 6, Nr. 8, Satz IX). Also kann auch jede summierbare Menge nur höchstens abzählbar viele Mengen $\mathfrak{G}_0 g_\alpha$ schneiden.

Da $\mathfrak{G}_0 g_\alpha = \bigcup_{n=1}^{\infty} (\overline{U}^{n+1} g_\alpha - \overline{U}^n g_\alpha) \cup \overline{U} g_\alpha$ ist und jede der Mengen $\overline{U}^{n+1} g_\alpha - \overline{U}^n g_\alpha$, $\overline{U} g_\alpha$ summierbar ist, ist jedes $\mathfrak{G}_0 g_\alpha$ die Vereinigung höchstens abzählbar vieler, sich nicht schneidender Mengen, von denen eine eine Nullmenge ist und die übrigen bikompakt sind (vgl. § 6, Nr. 8, Satz X). Wir erhalten also den folgenden Satz.

IX. *Jede lokal bikompakte Gruppe genügt den Bedingungen der Bemerkung* 1 *aus* § 6, *Nr.* 16.

Beispiele.

1. In der Gruppe R^1 hat das invariante Integral die Gestalt $\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$; denn es ist $\int_{-\infty}^{\infty} x(t + t_0)\,dt = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,dt$. Analog hat das invariante Integral in der Gruppe C^1 die Form $\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$, $\zeta = \xi + i\eta$. In den Gruppen R_0^1 und C_0^1 ist

$$\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\frac{dt}{t} \quad \text{bzw.} \quad \int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty} x(\xi, \eta)\frac{d\xi\,d\eta}{|\xi + i\eta|^2}$$

das invariante Integral.

2. Es sei K die Gruppe der reellen Dreiecksmatrizen zweiter Ordnung,

$$K = \left\{ \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & \mu \\ 0 & \lambda \end{bmatrix} \right\} \quad (\lambda > 0).$$

Das links- und das rechtsinvariante Integral auf K sind dann bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt und werden durch die Formeln

$$I_l(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda, \mu)\, d\lambda\, d\mu \quad \text{bzw.} \quad I_r(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda, \mu)\, |\lambda|^{-2}\, d\lambda\, d\mu$$

definiert.

§ 28. Definition und Eigenschaften der Gruppenalgebren

1. Definition der Gruppenalgebra. Wir untersuchen zunächst den Fall, daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ aus endlich vielen Elementen besteht. Eine derartige Gruppe heißt *endlich*. Wir bezeichnen mit $R(\mathfrak{G})$ die Gesamtheit aller formalen Linearkombinationen der Elemente von $\mathfrak{G}$. Jede solche Linearkombination ist durch die Koeffizienten der Elemente von $\mathfrak{G}$ bestimmt. Ist $x(g)$ der Koeffizient von $g \in \mathfrak{G}$, so können wir sagen, daß $R(\mathfrak{G})$ aus allen möglichen Summen $x = \sum_g x(g) g$ besteht, wobei $x(g)$ alle möglichen Funktionen auf $\mathfrak{G}$ durchläuft und die Summe über alle Elemente $g \in \mathfrak{G}$ zu erstrecken ist. Zwei Linearkombinationen $x = \sum_g x(g) g$ und $y = \sum_g y(g) g$ sind genau dann gleich, wenn $x(g) \equiv y(g)$ ist. Insbesondere ist $x = 0$ genau dann, wenn $x(g) \equiv 0$ ist.

Wir definieren in $R(\mathfrak{G})$ die Multiplikation mit einer Zahl, die Addition und die Multiplikation, indem wir

$$\lambda x = \sum_g [\lambda x(g)] g, \qquad x + y = \sum_g [x(g) + y(g)] g,$$

$$xy = \sum_{g_1} \sum_{g_2} x(g_1) y(g_2) g_1 g_2 \tag{1}$$

setzen, wobei $x = \sum_g x(g) g$, $y = \sum_g y(g) g$ ist. Dann ist $R(\mathfrak{G})$ eine Algebra, deren Einselement gleich dem von $\mathfrak{G}$ ist, d. h. gleich der Kombination $x = \sum_g x(g) g$ mit $x(e) = 1$ und $x(g) = 0$ für $g \neq e$.

Die Algebra $R(\mathfrak{G})$ heißt *Gruppenalgebra* der endlichen Gruppe $\mathfrak{G}$.

Wir können auch anstelle der Linearkombinationen $x = \sum_g x(g) g$ die Funktionen $x = x(g)$ selbst betrachten und $R(\mathfrak{G})$ als Gesamtheit dieser Funktionen ansehen. Dann werden die Multiplikation mit einer Zahl und die Addition wie gewöhnlich durch

$$\lambda x = \lambda x(g), \qquad x + y = x(g) + y(g)$$

definiert. Die Formel für die Multiplikation in $R(\mathfrak{G})$ erhält man aus (1), wenn man dort $g_1 g_2 = g$ setzt und die Reihenfolge der Summation ändert. Es ergibt sich

$$xy = \sum_g \left(\sum_{g_1} x(g_1) y(g_1^{-1} g) \right) g$$

und als Multiplikationsgesetz in $R(\mathfrak{G})$

$$xy(g) = \sum_{g_1} x(g_1)\, y(g_1^{-1} g). \tag{1'}$$

Die durch die Formel (1′) definierte Multiplikation heißt gewöhnlich *Faltung*.[1])

Jetzt können wir die Definition der Gruppenalgebra auch auf beliebige lokal bikompakte Gruppen übertragen. Es sei $\mathfrak{G}$ eine lokal bikompakte Gruppe, μ ihr linksinvariantes Maß und $L^1 = L^1(\mathfrak{G})$ der durch dieses Maß definierte Raum (vgl. § 6, Nr. 7), d. h. die Gesamtheit aller μ-meßbaren Funktionen $a = a(g)$, für die $\|a\|_1 = \int |a(g)|\, d\mu(g) < \infty$ ist. Dann ist L^1 ein BANACHscher Raum mit den Verknüpfungsrelationen

$$\lambda a = \lambda a(g), \qquad a + b = a(g) + b(g).$$

Wir können L^1 auch als normierte Algebra ansehen, wenn wir die Multiplikation in L^1 in Analogie zu (1′) durch die Formel

$$(a \cdot b)(g) = \int a(g_1)\, b(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1)$$

definieren. Ehe wir diese Definition zugrunde legen können, müssen wir zeigen daß $(a \cdot b)(g)$ ebenfalls zu L^1 gehört und daß $\|a \cdot b\|_1 \leqq \|a\|_1 \cdot \|b\|_1$ ist. Außerdem muß

$$\begin{gathered} \alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b, \qquad a \cdot (\alpha b) = \alpha(a \cdot b), \qquad (a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c), \\ (a + b) \cdot c = a \cdot c + b \cdot c, \qquad a \cdot (b + c) = a \cdot b + a \cdot c \end{gathered} \tag{2}$$

für alle $a, b, c \in L^1$ und alle komplexen Zahlen α gelten (vgl. § 7, Nr. 1). Aus dem Satz von FUBINI[2]) und der Linksinvarianz des Maßes folgt

$$\begin{aligned} \|a \cdot b\|_1 &= \int \left| \int a(g_1)\, b(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) \right| d\mu(g) \\ &\leqq \int \left[\int |a(g_1)|\, |b(g_1^{-1} g)|\, d\mu(g_1) \right] d\mu(g) \\ &= \int \left[\int |b(g_1^{-1} g)|\, d\mu(g) \right] |a(g_1)|\, d\mu(g_1) \\ &= \int \left[\int |b(g)|\, d\mu(g) \right] |a(g_1)|\, d\mu(g_1) \\ &= \|b\|_1 \cdot \int |a(g_1)|\, d\mu(g_1) \\ &= \|b\|_1 \cdot \|a\|_1 . \end{aligned}$$

Hiermit lassen sich die Beziehungen (2) leicht nachweisen.

---

[1]) Handelt es sich um die Faltung und nicht um die gewöhnliche Multiplikation der Funktionen x, y, so werden wir $x \cdot y$ statt xy schreiben.

[2]) In diesem Fall folgt aus der Existenz des Doppelintegrals die des Integrals über den Produktraum. Um dies zu beweisen, nehmen wir an, daß $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a, b \in L^1(\mathfrak{G})$, ist. Dann existieren Funktionen a_1, b_1 (bzw. a_2, b_2), die die Grenzwerte nichtfallender (bzw. nichtwachsender) Folgen von oben (bzw. von unten) halbstetiger Funktionen darstellen, so daß $a_1 \leqq a \leqq a_2$, $b_1 \leqq b \leqq b_2$ und $I_l(a_1) = I_l(a) = I_l(a_2)$ und $I_l(b_1) = I_l(b) = I_l(b_2)$ ist. Ist J

Wir setzen

$$a^*(g) = \lambda^{-1}(g)\overline{a(g^{-1})}$$

mit $a(g) \in L^1$. Dann folgt aus § 27, Nr. 5, Formel (32),

$$\begin{aligned}\| a^* \|_1 &= \int |a^*(g)|\, d\mu(g) = \int |a(g^{-1})|\, \lambda^{-1}(g)\, d\mu(g) \\ &= \int |a(g^{-1})|\, d\mu_r(g) = \int |a(g)|\, \lambda(g)\, d\mu_r(g) \\ &= \int |a(g)|\, d\mu(g) = \| a \|_1 < \infty,\end{aligned}$$

so daß $a^* \in L^1$ und $\|a^*\|_1 = \|a\|_1$ ist. Es läßt sich leicht zeigen, daß auch alle übrigen Axiome der Involution und ebenfalls die Beziehung $(xy)^* = y^* x^*$ erfüllt sind. Folglich ist der Raum $L^1(\mathfrak{G})$ mit dieser Definition der Involution eine BANACHsche symmetrische Algebra.

Die Algebra $L^1(\mathfrak{G})$ enthält genau dann ein Einselement, wenn die Gruppe $\mathfrak{G}$ diskret ist.

Beweis. Ist $\mathfrak{G}$ diskret, so bilden die einzelnen Elemente von $\mathfrak{G}$ Mengen, die das gleiche positive invariante Maß besitzen, das wir gleich Eins setzen können. Das Einselement der Algebra $L^1(\mathfrak{G})$ ist dann die Funktion

$$e(g) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad g = e, \\ 0 & \text{für} \quad g \neq e. \end{cases}$$

Enthält dagegen $L^1(\mathfrak{G})$ ein Einselement $e(g)$, so können wir zunächst zeigen, daß dann die Maße der nichtleeren offenen Mengen eine positive untere Schranke besitzen. Anderenfalls würde nämlich eine Umgebung U des Einselements von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft $\int_U |e(g)|\, d\mu_l(g) < \varepsilon$ existieren (vgl. § 6, Nr. 10, Satz XI). Dann würden wir aber, wenn wir eine symmetrische Umgebung V des Einselements von $\mathfrak{G}$ wählen, die der Bedingung $V^2 \subset U$ genügt,

---

das dem Maß $\mu_l \times \mu_l$ entsprechende Integral auf $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$, so gilt

$$a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1} g_2), \quad a_2(g_1)\, b_2(g_1^{-1} g_2) \in L^1(\mathfrak{G}_1 \times \mathfrak{G}_2),$$

$$a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1} g_2) \leqq a(g_1)\, b(g_1^{-1} g_2) \leqq a_2(g_1)\, b_2(g_1^{-1} g_2)$$

und

$$J_l(a_1(g_1)\, b_1(g_1^{-1} g_2)) = J_l(a_2(g_1)\, b_2(g_1^{-1} g_2)) = I_l(a)\, I_l(b);$$

denn die Funktion $a_1(g_1) b_1(g_1^{-1} g_2)$ ist der Grenzwert einer nichtfallenden Folge von unten halbstetiger Funktionen und $a_2(g_1) b_2(g_1^{-1} g_2)$ der einer nichtwachsenden Folge von oben halbstetiger Funktionen auf $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$. Daher ergibt sich für diese Funktionen aus der Existenz des Doppelintegrals die des Integrals über $\mathfrak{G} \times \mathfrak{G}$. Somit gilt

$$J_l(a(g_1)\, b(g_1^{-1} g_2)) = I_l(a)\, I_l(b).$$

Die Behauptung ist also für $a \geqq 0$, $b \geqq 0$, $a, b \in L_1(\mathfrak{G})$, bewiesen. Man erkennt leicht, daß sie auch für beliebige $a, b \in L^1(\mathfrak{G})$ richtig ist.

als charakteristische Funktion von V eine Funktion $\xi_V(g)$ erhalten, für die

$$\begin{aligned}\xi_V(g) = (e\cdot\xi_V)(g) &= \int e(g')\,\xi_V(g'^{-1}g)\,d\mu_l(g')\\ &= \int_{gV} e(g')\,d\mu_l(g')\\ &\leqq \int_U |e(g')|\,d\mu_l(g') < \varepsilon \quad (g\in V)\end{aligned}$$

ist. Das widerspricht jedoch der Forderung $\xi_V(g) = 1$.

Somit ist das Maß jeder nichtleeren Menge größer als ein gewisses positives a. Dann kann aber eine offene Menge, deren abgeschlossene Hülle bikompakt ist, nur endlich viele Elemente enthalten; denn anderenfalls wäre ihr Maß größer als na für jedes natürliche n. Also ist jeder einzelne Punkt eine offene Menge und die Gruppe $\mathfrak{G}$ diskret.

Somit können wir, abgesehen vom Fall einer diskreten Gruppe, annehmen, daß $L^1(\mathfrak{G})$ kein Einselement enthält. Fügen wir zu $L^1(\mathfrak{G})$ ein Einselement hinzu, so erhalten wir eine BANACHsche symmetrische Algebra mit Einselement, die wir mit $R(\mathfrak{G})$ bezeichnen und die *Gruppenalgebra* der Gruppe $\mathfrak{G}$ nennen.

2. Eigenschaften der Gruppenalgebra.

I. *Für $x(g)\in L^1(\mathfrak{G})$ sind die Elemente*

$$x^{g_0}(g) = x(gg_0), \qquad x_{g_0}(g) = x(g_0^{-1}g)$$

aus $L^1(\mathfrak{G})$ stetige Funktionen von g_0 im Sinne der Norm in $L^1(\mathfrak{G})$.

Beweis. Auf Grund von § 27, Nr. 3, Satz V, gilt die Behauptung für alle Funktionen $x(g)\in L(\mathfrak{G})$. Andererseits ist $L(\mathfrak{G})$ dicht in $L^1(\mathfrak{G})$ (vgl. § 6, Nr. 7). Deshalb wählen wir zunächst ein $x'(g)\in L(\mathfrak{G})$ mit $\|x-x'\|_1<\frac{\varepsilon}{3}$, dann eine Umgebung U des Einselements derart, daß $\|x'_g-x'\|_1<\frac{\varepsilon}{3}$ für $g\in U$ ist, und erhalten

$$\|x_g-x\|_1 \leqq \|x_g-x'_g\|_1+\|x'_g-x'\|_1+\|x'-x\|_1<\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}+\frac{\varepsilon}{3}=\varepsilon.$$

II. *Die Algebra $L^1(\mathfrak{G})$ enthält eine Menge, die das Einselement approximiert.*

Beweis. Jeder Umgebung U des Einselements entspricht eine nichtnegative Funktion $z_U(g)\in L^1(\mathfrak{G})$, die außerhalb U verschwindet und für die $\int z_U(g)\,d\mu(g) = 1$ gilt. Die Funktionen z_U bilden die Menge, die das Einselement approximiert. In der Tat, für $x(g)\in L^1(\mathfrak{G})$ ist

$$(z_U\cdot x)(g) = \int z_U(g_1)\,x(g_1^{-1}g)\,d\mu(g_1),$$

d. h.

$$z_U\cdot x = \int z_U(g_1)\,x_{g_1}\,d\mu(g_1).$$

Hieraus folgt

$$\|z_U\cdot x - x\|_1 \leqq \int z_U(g_1)\,\|x_{g_1}-x\|_1\,d\mu(g_1) = \int_U z_U(g_1)\,\|x_{g_1}-x\|_1\,d\mu(g_1).$$

Wählen wir nun eine Umgebung U derart, daß $\|x_{g_1} - x\|_1 < \varepsilon$ für $g_1 \in U$ ist (vgl. Satz I), so finden wir

$$\|z_U \cdot x - x\|_1 \leqq \varepsilon \int_U z_U(g_1)\, d\mu(g_1) = \varepsilon.$$

Analog läßt sich beweisen, daß $\|x \cdot z_U - x\|_1$ gegen Null strebt. Der Beweis hierfür ist etwas schwieriger, da es notwendig ist, die Funktion $\lambda(g)$ einzuführen (vgl. § 27, Nr. 5). Wir überlassen den Beweis dem Leser.

Bemerkungen. 1. Die Sätze I und II bleiben auch dann richtig, wenn wir den Raum $L^1(\mathfrak{G})$ durch den Raum $L^2(\mathfrak{G})$ ersetzen (dazu brauchen wir nur U mit bikompakter abgeschlossener Hülle $\overline{U}$ zu wählen). Insbesondere ist dann für jede Funktion $x(g) \in L^2(\mathfrak{G})$

$$\|x - x \cdot z_U\|_2 < \varepsilon$$

bei passender Wahl der Umgebung U des Einselements.

2. Ist $x(g) \in L(\mathfrak{G})$, so existiert für jedes $\varepsilon > 0$ eine Umgebung U mit der Eigenschaft

$$|(z_U \cdot x)(g) - x(g)| < \varepsilon \quad \text{für alle} \quad g \in \mathfrak{G};$$

denn wählen wir U derart, daß $\overline{U}$ bikompakt und $|x(g_1^{-1}g) - x(g)| < \varepsilon$ für $g_1 \in U$ ist (vgl. § 27, Nr. 3, Satz V), so erhalten wir

$$|(z_U \cdot x)(g) - x(g)| = \left|\int_U z_U(g_1)\,[x(g_1^{-1}g) - x(g)]\, d\mu(g_1)\right|$$
$$< \varepsilon \int_U z_U(g_1)\, d\mu(g_1) = \varepsilon.$$

III. *Für* $x_1, x_2 \in L^2(\mathfrak{G})$ *ist* $(x_1 \cdot x_2)(g_0)$ *eine stetige Funktion von* g_0.

Beweis. Auf Grund der Bemerkung 1 ist das Element

$$(\tilde{x}_2)_{g_0} = \tilde{x}_2(g_0^{-1}g) = x_2(g^{-1}g_0)$$

eine stetige Funktion von g_0 im Sinne der Norm in $L^2(\mathfrak{G})$, und somit ist auch das Skalarprodukt

$$\begin{aligned}\langle x_1, (\tilde{x}_2)_{g_0}\rangle &= \int x_1(g)\,(\tilde{x}_2)_{g_0}(g)\, d\mu_l(g)\\ &= \int x_1(g)\, x_2(g^{-1}g_0)\, d\mu_l(g)\\ &= (x_1 \cdot x_2)(g_0)\end{aligned}$$

eine stetige Funktion von g_0.

IV. *Ein abgeschlossener Teilraum I von $L^1(\mathfrak{G})$ ist genau dann Links- bzw. Rechtsideal von $L^1(\mathfrak{G})$, wenn er gegenüber Links- bzw. Rechtsverschiebungen invariant ist.*

Beweis. Es sei z_U wie im Beweis von Satz II definiert. Ist I ein Linksideal von $L^1(\mathfrak{G})$, so ist auch $z_{U g_0} x \in I$. Nun ist

$$\begin{aligned}z_{U g_0} \cdot x(g) &= \int z_U(g_0^{-1}g')\, x(g'^{-1}g)\, d\mu(g')\\ &= \int z_U(g')\, x(g'^{-1}g_0^{-1}g)\, d\mu(g') = (z_U \cdot x)_{g_0}(g).\end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen Satz II

$$z_{U_g} \cdot x = (z_U \cdot x)_g \to x_g.$$

Folglich ist $x_g \in I$, d. h., I ist invariant gegenüber Linksverschiebungen.

Ist umgekehrt I gegenüber jeder Linksverschiebung invariant und ist $x \in I$, so setzen wir zunächst voraus, daß $z' \in L(\mathfrak{G})$ außerhalb einer bikompakten Menge Q verschwindet. Dann ist die Funktion $z'(g_1)x_{g_1}$ stetig bezüglich der Norm in L^1 (wegen Satz I) und außerhalb Q gleich Null, und wir können zeigen, daß

$$z' \cdot x = \int_{\mathfrak{G}} z'(g_1) x_{g_1} d\mu_l(g_1) = \int_Q z'(g_1) x_{g_1} d\mu_l(g_1)$$

Limes (bezüglich der Norm) von endlichen Summen

$$\sum_k z'(g_k) x_{g_k} \in I$$

ist. Wegen der Abgeschlossenheit von I muß $z' \cdot x \in I$ sein. Nun ist $L(\mathfrak{G})$ dicht in $L^1(\mathfrak{G})$ (vgl. § 6, Nr. 7), so daß für jede Funktion $z \in L^1(\mathfrak{G})$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $z' \in L(\mathfrak{G})$ mit $\|z' - z\|_1 < \varepsilon$ existiert. Dann folgt

$$\|z' \cdot x - z \cdot x\|_1 < \varepsilon \|x\|_1$$

und somit $z \cdot x \in I$. Analog läßt sich der Satz für ein Rechtsideal beweisen.

V. *Die Gruppenalgebra einer lokal bikompakten topologischen Gruppe ist eine reduzierte Algebra.*

Beweis. Für jede Funktion $a \in L^1(\mathfrak{G})$ definieren wir einen Operator A_a des Hilbertschen Raumes $L^2(\mathfrak{G})$, indem wir

$$A_a \xi = a \cdot \xi \quad \text{für} \quad \xi \in L^2(\mathfrak{G}) \tag{1}$$

setzen. Wir zeigen, daß A_a beschränkt ist. Dazu setzen wir $T_{g_1}\xi = \xi(g_1^{-1}g)$. Der Operator T_{g_1} ist unitär, denn er bildet $L^2(\mathfrak{G})$ eineindeutig auf sich selbst ab und ist isometrisch wegen

$$\|T_{g_1}\xi\|_2^2 = \int |\xi(g_1^{-1}g)|^2 d\mu(g) = \int |\xi(g)|^2 d\mu(g) = \|\xi\|_2^2.$$

Die Formel (1) läßt sich auch in der Form

$$A_a \xi = \int a(g_1) T_{g_1} \xi \, d\mu(g_1)$$

schreiben, woraus

$$\|A_a\xi\|_2 \leqq \int |a(g_1)| \, \|T_{g_1}\xi\|_2 d\mu(g_1) = \int |a(g_1)| d\mu(g_1) \cdot \|\xi\|_2 = \|a\|_1 \cdot \|\xi\|_2$$

folgt. Also ist A_a beschränkt und $|A_a| \leqq \|a\|_1$. Man kann leicht zeigen, daß die Zuordnung $a \to A_a$ eine Darstellung der Algebra $L^1(\mathfrak{G})$ ist.

Wir setzen

$$\lambda e + a \to \lambda 1 + A_a$$

und erhalten eine Darstellung der ganzen Algebra $R(\mathfrak{G})$. Daher ist

$$f(\lambda e + a) = \lambda \langle \xi, \xi \rangle + \langle A_a \xi, \xi \rangle$$

für jede Funktion $\xi \in L^2(\mathfrak{G})$ ein positives Funktional über $R(\mathfrak{G})$.

Es sei $f(a^* a) = 0$ für jedes positive Funktional. Dann ist insbesondere $\|A_a \xi\|_2 = 0$ für alle $\xi \in L^2(\mathfrak{G})$. Dies bedeutet, daß für jede Funktion $\xi(g) \in L^2(\mathfrak{G})$

$$\int a(g_1)\, \xi(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) = 0$$

für fast alle $g \in \mathfrak{G}$ ist. Hieraus können wir schließen, daß $a(g) = 0$ fast überall auf $\mathfrak{G}$ ist, indem wir für ξ die charakteristische Funktion einer beliebigen symmetrischen Menge einsetzen. Ist also $a \neq 0$, so existiert unter den Funktionalen $f(x) = \langle A_x \xi, \xi \rangle$ ein solches, für das $f(a^* a) \neq 0$ ist. Somit ist die Algebra $R(\mathfrak{G})$ reduziert.

Gleichzeitig haben wir damit folgenden Satz bewiesen:

VI. *Mit* $x_1(g) \in L^1(\mathfrak{G})$ *und* $x_2(g) \in L^2(\mathfrak{G})$ *ist auch* $x_1 \cdot x_2 \in L^2(\mathfrak{G})$.

VII. *Die Gruppenalgebra einer lokal bikompakten Gruppe ist halbeinfach.*

Das Radikal ist nämlich stets in dem reduzierenden Ideal enthalten (vgl. § 18, Nr. 2, Satz VII), das wegen Satz V gleich (0) ist.

§ 29. Unitäre Darstellungen einer lokal bikompakten Gruppe. Ihr Zusammenhang mit den Darstellungen der Gruppenalgebra

1. Unitäre Darstellungen einer Gruppe. Wir nennen jeden Homomorphismus einer Gruppe $\mathfrak{G}$ in die Gruppe der unitären Operatoren eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ eine *unitäre Darstellung* von $\mathfrak{G}$. Eine unitäre Darstellung ist also eine Abbildung $g \to U_g$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ in die Gruppe der unitären Operatoren U, für welche

$$U_{g_1} U_{g_2} = U_{g_1 g_2}, \quad U_e = 1$$

gilt. Es sei $\mathfrak{G}$ eine lokal bikompakte Gruppe. Eine unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$ heißt *schwach meßbar*, wenn die Funktion

$$\varphi(g) = \langle U_g \xi, \eta \rangle$$

für alle Vektoren $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$ meßbar ist, und *stetig* für $g = g_0$, wenn

$$|U_g \xi - U_{g_0} \xi| \to 0 \quad \text{für} \quad g \to g_0$$

und alle Vektoren $\xi \in \mathfrak{H}$ strebt.

Ist die Darstellung für $g = e$ stetig, so ist sie auch für alle g stetig. Dies folgt aus der Gleichung

$$|U_g \xi - U_{g_0} \xi| = |U_{g_0}(U_{g_0^{-1} g} \xi - \xi)| = |(U_{g_0^{-1} g} \xi - \xi)|.$$

2. Der Zusammenhang zwischen den Darstellungen der Gruppe und der Gruppenalgebra. Es sei $x \to A_x$ eine Darstellung der Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$ im Raum $\mathfrak{H}$. Mit $\mathfrak{N}$ bezeichnen wir die Gesamtheit aller Vektoren ξ, für die

$$A_a \xi = 0 \quad \text{für alle} \quad a \in L^1(\mathfrak{G})$$

gilt. $\mathfrak{N}$ ist ein invarianter Teilraum; denn ist $x = \lambda e + a_1$, $a_1 \in L^1(\mathfrak{G})$, so gilt

$$ax = a(\lambda e + a_1) = \lambda a + a a_1 \in L^1(\mathfrak{G})$$

und folglich

$$A_a A_x \xi = A_{ax} \xi = 0,$$

d. h., aus $\xi \in \mathfrak{N}$ ergibt sich $A_x \xi \in \mathfrak{N}$ für alle $x \in R(\mathfrak{G})$; also ist $\mathfrak{N}$ ein invarianter Teilraum. In $\mathfrak{N}$ hat die Darstellung die triviale Form

$$A_{\lambda e + y} = \lambda 1. \tag{1}$$

Diese Darstellung nennen wir die *ausgeartete* Darstellung. Ist $\mathfrak{N} \neq (0)$, so brauchen wir die Darstellung nur in $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ zu betrachten. Im folgenden werden wir stets $\mathfrak{N} = (0)$ voraussetzen. Dann können wir sagen, daß die gegebene Darstellung $x \to A_x$ keine ausgeartete Darstellung enthält.

Theorem 1. *Jeder Darstellung $x \to A_x$ einer Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$ ohne ausgeartete Darstellung entspricht eine stetige unitäre Darstellung $g \to U_g$ der Gruppe $\mathfrak{G}$. Umgekehrt entspricht jeder schwach stetigen unitären Darstellung $g \to U_g$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ eine Darstellung $x \to A_x$ ihrer Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$, die keine ausgeartete Darstellung enthält. Diese Darstellungen sind durch die Formel*

$$A_{\lambda e + a} = \lambda 1 + \int a(g)\, U_g\, d\mu(g)$$

miteinander verknüpft.[1])

Beweis. Es genügt, den Satz für eine zyklische Darstellung zu beweisen, denn jede Darstellung ist die direkte Summe zyklischer Darstellungen. Es sei also $x \to A_x$ eine zyklische Darstellung der Algebra $R(\mathfrak{G})$. Mit ξ_0 bezeichnen wir einen zyklischen Vektor dieser Darstellung. Ist $a = a(g) \in L^1(\mathfrak{G})$ und setzen wir $a_{g_0} = a(g_0^{-1} g)$, so ist offenbar auch a_{g_0} aus $L^1(\mathfrak{G})$.

Ferner gilt

$$(b_{g_0})^* \cdot a_{g_0} = b^* \cdot a \tag{2}$$

für je zwei Elemente $a, b \in L^1(\mathfrak{G})$; denn es bestehen wegen § 27, Nr. 5, Formel (32), und der Linksinvarianz des Maßes die Beziehungen

$$\begin{aligned} b^* \cdot a &= \int \overline{b(g_1^{-1})}\, \lambda(g_1^{-1})\, a(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) = \int \overline{b(g_1)}\, a(g_1 g)\, d\mu(g_1) \\ &= \int \overline{b(g_0^{-1} g_1)}\, a(g_0^{-1} g_1 g)\, d\mu(g_1) = \int \overline{b_{g_0}(g_1)}\, a_{g_0}(g_1 g)\, d\mu(g_1) \\ &= b_{g_0}^* \cdot a_{g_0}. \end{aligned}$$

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}'$ die Gesamtheit aller Elemente ξ der Form $\xi = A_a \xi_0$, $a \in L^1(\mathfrak{G})$; dann ist $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ dicht. Denn anderenfalls existiert ein Vektor $\xi_1 \neq 0$, der zu $\mathfrak{H}'$ orthogonal ist, d. h., es gilt

$$\langle \xi_1, A_a \xi_0 \rangle = 0$$

für alle $a \in L^1(\mathfrak{G})$. Setzen wir hier $a = b^* \cdot x$ mit $x \in R(\mathfrak{G})$, $b \in L^1(\mathfrak{G})$, so erhalten wir

$$\langle A_b \xi_1, A_x \xi_0 \rangle = \langle \xi_1, A_{b^* \cdot x} \xi_0 \rangle = 0.$$

[1]) Bezüglich der Integration von Operatorfunktionen vgl. § 6, Nr. 19.

Der Vektor $A_b\xi_1$ ist also zu allen Vektoren $A_x\xi_0$, $x \in R(\mathfrak{G})$, orthogonal. Da ξ_0 ein zyklischer Vektor ist, bilden die Vektoren $A_x\xi_0$ eine in $\mathfrak{H}$ dichte Menge. Folglich ist $A_b\xi_1 = 0$ für alle $b \in L^1(\mathfrak{G})$, also $\xi_1 \in \mathfrak{N}$. Dies widerspricht jedoch der Voraussetzung $\mathfrak{N} = (0)$.

Somit ist $\mathfrak{H}'$ tatsächlich in $\mathfrak{H}$ dicht. Wir führen nun in $\mathfrak{H}'$ einen Operator U_{g_0} ein, indem wir für $\xi = A_a\xi_0$, $a \in L^1(\mathfrak{G})$,

$$U_{g_0}\xi = A_{a_{g_0}}\xi_0$$

setzen. Der Operator U_{g_0} bildet $\mathfrak{H}'$ auf sich selbst ab. Außerdem ist U_{g_0} isometrisch. Aus der Gleichung (2) folgt nämlich

$$\langle U_{g_0}\xi, U_{g_0}\xi\rangle = \langle A_{a_{g_0}}\xi_0, A_{a_{g_0}}\xi_0\rangle = \langle A_{a_{g_0}^* \cdot a_{g_0}}\xi_0, \xi_0\rangle$$
$$= \langle A_{a^* \cdot a}\xi_0, \xi_0\rangle = \langle A_a\xi_0, A_a\xi_0\rangle = \langle \xi, \xi\rangle.^{1)}$$

Daher kann der Operator U_{g_0} eindeutig zu einem unitären Operator des Raumes $\mathfrak{H}$ fortgesetzt werden.

Offenbar ist $a_{g_1 g_2} = (a_{g_2})_{g_1}$. Hieraus folgt $U_{g_1 g_2} = U_{g_1} U_{g_2}$. Also ist die Abbildung $g \to U_g$ eine unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ im Raum $\mathfrak{H}$.

Diese Darstellung ist stetig; denn wegen § 28, Nr. 2, Satz I, ist

$$\|a_{g_0} - a\|_1 = \int |a(g_0^{-1}g) - a(g)|\, d\mu(g) \to 0 \quad \text{für} \quad g_0 \to e.$$

Andererseits ist jede Darstellung einer Banachschen symmetrischen Algebra stetig (vgl. § 17, Nr. 3, Theorem 1), und es gilt demnach

$$|A_{a_{g_0}} - A_a| \to 0 \quad \text{für} \quad g_0 \to e.$$

Hieraus folgt

$$|A_{a_{g_0}}\xi_0 - A_a\xi_0| \to 0 \quad \text{für} \quad g_0 \to e,$$

d. h.

$$|U_{g_0}\xi - \xi| \to 0 \quad \text{für} \quad g_0 \to e$$

für alle Elemente ξ aus $\mathfrak{H}'$. Da $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ dicht und $|U_{g_0}| = 1$ ist, gilt diese Beziehung in ganz $\mathfrak{H}$.

Hiermit ist bewiesen, daß die Darstellung $g \to U_g$ für $g = e$ und damit für jedes g stetig ist.

Nun zeigen wir, wie sich aus dieser Darstellung von $\mathfrak{G}$ die ursprüngliche Darstellung der Gruppenalgebra ergibt.

Es sei $a_0(g) \in L^1(\mathfrak{G})$, und wir setzen

$$B_{a_0} = \int a_0(g)\, U_g\, d\mu(g).$$

Wir zeigen, daß $A_{a_0} = B_{a_0}$ ist. Dazu setzen wir

$$f(x) = \langle A_x\xi_0, \xi_0\rangle.$$

Dann ist für $\xi = A_a\xi_0$, $\eta = A_b\xi_0$ und $a, b \in L^1(\mathfrak{G})$

$$\langle B_{a_0}\xi, \eta\rangle = \int a_0(g_1)\langle U_{g_1}\xi, \eta\rangle d\mu(g_1) = \int a_0(g_1)\langle U_{g_1}A_a\xi_0, A_b\xi_0\rangle d\mu(g_1)$$
$$= \int a_0(g_1)\langle A_{b^*}A_{a_{g_1}}\xi_0, \xi_0\rangle d\mu(g_1) = \int a_0(g_1) f(b^* \cdot a_{g_1})\, d\mu(g_1).$$

---

[1]) Aus $\langle U_{g_0}\xi, U_{g_0}\xi\rangle = \langle \xi, \xi\rangle$ ergibt sich leicht, daß der Operator U_{g_0} unabhängig ist von der Wahl des Elements a mit $\xi = A_a\xi_0$. — *Anm. d. Red.*

Da f ein stetiges Funktional in $L^1(\mathfrak{G})$ ist, wird der letzte Ausdruck gleich $f\left(b^* \cdot \int a_0(g_1) a_{g_1} d\mu(g_1)\right)$. Andererseits ist

$$\int a_0(g_1) a_{g_1} d\mu(g_1) = \int a_0(g_1) a(g_1^{-1} g) d\mu(g_1) = a_0 \cdot a.$$

Daher ist

$$\langle B_{a_0}\xi, \eta\rangle = f(b^* a_0 a) = \langle A_{b^* a_0 a}\xi_0, \xi_0\rangle = \langle A_{a_0} A_a \xi_0, A_b \xi_0\rangle = \langle A_{a_0}\xi, \eta\rangle.$$

Da die Vektoren ξ, η in $\mathfrak{H}$ eine dichte Menge bilden, folgt hieraus $A_{a_0} = B_{a_0}$.

Somit ist $A_{a_0} = \int a_0(g) U_g d\mu(g)$ und

$$A_{\lambda e + a} = \lambda 1 + \int a(g) U_g d\mu(g). \tag{3}$$

Wir haben somit bewiesen, daß jeder Darstellung der Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$ eine Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ entspricht, aus der sich diese Darstellung von $R(\mathfrak{G})$ mit Hilfe von Formel (3) ergibt.

Jetzt nehmen wir an, U_g sei eine schwach stetige unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$. Setzen wir für $a \in L^1(\mathfrak{G})$

$$\langle A_a\xi, \eta\rangle = \int a(g) \langle U_g\xi, \eta\rangle d\mu(g), \tag{4}$$

so wird durch diese Gleichung ein beschränkter Operator A_a in $\mathfrak{H}$ definiert, denn es ist

$$\left|\int a(g)\langle U_g\xi, \eta\rangle d\mu(g)\right| \leqq \int |a(g)| d\mu(g) \cdot |\xi| \cdot |\eta|.$$

Man sieht leicht, daß die Zuordnung $a \to A_a$ eine Darstellung von $L^1(\mathfrak{G})$ ist. Setzen wir

$$A_{\lambda e + a} = \lambda 1 + A_a, \qquad a \in L^1(\mathfrak{G}),$$

so gelangen wir zu einer Darstellung von $R(\mathfrak{G})$. Dabei ist $\mathfrak{N} = (0)$, d. h., die Darstellung $x \to A_x$ enthält nicht die ausgeartete Darstellung. Denn aus $\xi \neq 0$ folgt $\langle \xi, \xi\rangle \neq 0$. Wählen wir dann eine Umgebung V des Einselements von $\mathfrak{G}$ derart, daß $\overline{V}$ bikompakt, $\mu(V) \leqq 1$ und $|\langle U_g\xi, \xi\rangle - \langle \xi, \xi\rangle| < \frac{1}{2}\langle \xi, \xi\rangle$ für $g \in V$ ist, und ist ferner $a(g)$ die charakteristische Funktion der Menge V, so gilt

$$|\langle A_a\xi, \xi\rangle - \langle \xi, \xi\rangle| < \langle \xi, \xi\rangle,$$

also $A_a\xi \neq 0$. Damit ist Theorem 1 bewiesen.

Auf Grund dieses Satzes entspricht der eben konstruierten Darstellung von $R(\mathfrak{G})$ eine stetige unitäre Darstellung U'_g von $\mathfrak{G}$ mit

$$A_a = \int a(g) U'_g d\mu(g), \qquad a \in L^1(\mathfrak{G}).$$

Dann ist aber

$$\langle A_a\xi, \eta\rangle = \int a(g) \langle U'_g\xi, \eta\rangle d\mu(g).$$

Ein Vergleich dieser Beziehung mit (4) ergibt

$$\int a(g)\langle U_g\xi, \eta\rangle d\mu(g) = \int a(g)\langle U'_g\xi, \eta\rangle d\mu(g).$$

Diese Gleichung gilt für eine beliebige summierbare Funktion $a(g)$. Somit ist für alle g

$$\langle U_g\xi, \eta\rangle = \langle U'_g\xi, \eta\rangle.$$

Hieraus erhalten wir die

Folgerung 1. *Jede schwach stetige unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist stetig.*

Bemerkung. In Theorem 1 läßt sich die Algebra $R(\mathfrak{G})$ durch $L^1(\mathfrak{G})$ ersetzen. Dabei ist die Darstellung $a \to A_a$ der Algebra $L^1(\mathfrak{G})$ natürlich eine ausgeartete Darstellung, wenn A_a für alle $a \in L^1(\mathfrak{G})$ verschwindet.

3. Der Vollständigkeitssatz. Für eine unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ kann man genauso wie für die Darstellung einer Algebra den Begriff des invarianten Teilraums, der Irreduzibilität und der Äquivalenz einführen.

Von der Richtigkeit des folgenden Satzes können wir uns leicht überzeugen:

Ein Teilraum $\mathfrak{M}$ ist genau dann gegenüber einer unitären Darstellung $g \to U_g$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ invariant, wenn er gegenüber der entsprechenden Darstellung $x \to A_x$ der Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$ invariant ist.

Hieraus folgt, daß *eine unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ genau dann irreduzibel ist, wenn die entsprechende Darstellung der Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$ irreduzibel ist.*

Weiter läßt sich nachweisen, daß *zwei unitäre Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ genau dann äquivalent sind, wenn die entsprechenden Darstellungen der Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$ äquivalent sind.*

Diese Sätze erlauben es, die Ergebnisse aus § 17, Nr. 1, 2, 6, und § 21 auf unitäre Darstellungen von Gruppen zu übertragen. Dabei wird die direkte Summe von unitären Darstellungen einer Gruppe analog zur direkten Summe von Darstellungen einer Algebra definiert.

Wir nennen ein System von Darstellungen von $\mathfrak{G}$ *vollständig*, wenn für jedes Element $g_0 \neq e$ aus $\mathfrak{G}$ eine Darstellung $g \to U_g$ dieses Systems existiert, für die $U_{g_0} \neq 1$ ist.

Theorem 2. *Jede lokal bikompakte Gruppe besitzt ein vollständiges System irreduzibler unitärer Darstellungen.*

Beweis. Es existiert ein Element $a(g) \in L^1(\mathfrak{G})$ mit $a_{g_0} - a \neq 0$.[1]) Infolge § 19, Nr. 4, Theorem 3, gibt es dann eine irreduzible Darstellung $x \to A_x$ der Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$, für welche $A_{a_{g_0}-a} \neq 0$, also $A_{a_{g_0}} \neq A_a$ ist. Deshalb existiert ein Vektor ξ_0, der der Bedingung

$$A_{a_{g_0}}\xi_0 \neq A_a\xi_0 \tag{1}$$

genügt. Setzen wir $A_a\xi_0 = \xi$, $A_{a_{g_0}}\xi_0 = U_{g_0}\xi$, so erhalten wir aus (1)

$$U_{g_0}\xi \neq \xi.$$

Somit genügt die mit Hilfe der Darstellung $x \to A_x$ von $R(\mathfrak{G})$ konstruierte irreduzible unitäre Darstellung $g \to U_g$ den gestellten Forderungen.

---

[1]) Es genügt beispielsweise, als Funktion $a(g)$ die charakteristische Funktion einer Umgebung V des Einselements zu wählen. Dabei sei $\overline{V}$ bikompakt und $g_0 V \cap V = \emptyset$.

4. Beispiele.

1. *Unitäre Darstellungen der Gruppe der linearen Transformationen einer Geraden.* Es sei $\mathfrak{G}_r$ die Gruppe der linearen Transformationen $y = \alpha x + \beta$ der reellen Achse, wobei α eine beliebige positive und β eine beliebige reelle Zahl ist (vgl. § 27, Nr. 1, Beispiel 5). Diese Gruppe enthält die beiden folgenden kommutativen Untergruppen: a) die Gruppe τ der Verschiebungen $x \to x + \beta$; ihre Elemente bezeichnen wir mit t_β; b) die Gruppe $\mathfrak{S}$ der Dehnungen $x \to \alpha x$; ihre Elemente seien s_α.

Jedes andere Element von G_r läßt sich als Produkt eines Elements aus τ mit einem Element aus $\mathfrak{S}$ darstellen. Daher ergibt sich eine Darstellung von $\mathfrak{G}_r$, wenn die Operatoren T_β und S_α bekannt sind, die den Elementen t_β und s_α dieser Untergruppen entsprechen.

Die Gruppe $\mathfrak{G}_r$ besitzt eine Reihe eindimensionaler Darstellungen, die sich ergeben, wenn man

$$T_\beta = 1, \qquad S_\alpha = \chi(\alpha)\, 1$$

setzt, wobei $\chi(\alpha) = \alpha^{i\varrho}$ und ϱ beliebig reell ist. Den verschiedenen Werten von ϱ entsprechen nichtäquivalente Darstellungen dieser Reihe.

Nun konstruieren wir mehrdimensionale Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}_r$. Dazu bezeichnen wir mit H_+ die Gesamtheit aller im Intervall $0 \leq \lambda < \infty$ quadratisch integrablen Funktionen $\varphi(\lambda)$ mit der üblichen Definition des Skalarprodukts. Jedem Element $g: x \to \alpha x + \beta$ aus G_r entspreche der Operator

$$U_g^+ \varphi(\lambda) = e^{i\lambda\beta} \varphi(\lambda\alpha)\, \alpha^{\frac{1}{2}}$$

des Raumes H_+. Insbesondere ist

$$T_\beta^+ \varphi(\lambda) = e^{i\lambda\beta} \varphi(\lambda), \qquad S_\alpha^+ \varphi(\lambda) = \varphi(\lambda\alpha)\, \alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Man sieht leicht, daß U_g^+ ein unitärer Operator aus H_+ und $g \to U_g^+$ eine Darstellung von $\mathfrak{G}_r$ ist. Diese Darstellung ist irreduzibel. Um dies zu zeigen, wählen wir einen Operator A aus H_+, der mit allen Operatoren U_g^+ vertauschbar ist. Wir haben zu zeigen, daß A Vielfaches des Einselements ist. Da A mit allen T_β^+, d. h. mit allen Operatoren der Multiplikation mit $e^{i\lambda\beta}$ vertauschbar ist, läßt sich A auch mit allen Linearkombinationen dieser Operatoren und ihren Grenzwerten (im Sinne der schwachen Topologie in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$; vgl. § 8, Nr. 3, Beispiel 2), d. h. mit jedem Operator vertauschen, der die Multiplikation mit einer wesentlich beschränkten Funktion vermittelt.[1]) Dann ist jedoch A selbst ein Operator, der die Multiplikation mit einer wesentlich beschränkten meßbaren Funktion

---

[1]) Der Raum $L^\infty(-\infty, \infty)$ ist nämlich zum Raum $L^1(-\infty, \infty)$ konjugiert (vgl. § 6, Nr. 16), wobei die Linearkombinationen der Funktionen $e^{i\lambda\beta}$ eine in $L^\infty(-\infty, \infty)$ dichte Menge im Sinne der schwachen Topologie bilden. Das folgt daraus, daß die Beziehung $\int_{-\infty}^{\infty} x(\lambda) e^{i\lambda\beta} d\lambda = 0$ für $x(\lambda) \in L^1(-\infty, \infty)$ und alle reellen β nur im Fall $x = 0$ gilt (vgl. § 3, Nr. 11, Satz II). Folglich existiert für jede Funktion $f(\lambda) \in L^\infty(-\infty, \infty)$ und beliebige $\varepsilon > 0$ und $x(\lambda) \in L^1(-\infty, \infty)$ eine Linearkombination $f_1(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{i\lambda\beta_\nu}$ mit der Eigenschaft $\left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda) - f_1(\lambda))\, x(\lambda)\, d\lambda \right| < \varepsilon$. Setzen wir hier $x(\lambda) = y(\lambda)\overline{z(\lambda)}$ mit $y, z \in L^2(-\infty, \infty)$, so erhalten wir $\left| \int_{-\infty}^{\infty} (f(\lambda) - f_1(\lambda))\, y(\lambda)\overline{z(\lambda)}\, d\lambda \right| < \varepsilon$.

Dies bedeutet, daß der Operator der Multiplikation mit $f(\lambda)$ der Grenzwert (im Sinne der schwachen Topologie) der Operatoren ist, die die Multiplikation mit $f_1(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu e^{i\lambda\beta_\nu}$ vermitteln.

vermittelt (vgl. § 26, Nr. 5, Satz IV),

$$A\varphi(\lambda) = \omega(\lambda)\varphi(\lambda),$$

wobei $\omega(\lambda)$ wesentlich beschränkt und meßbar ist. Hieraus folgt

$$A S_\alpha^+ \varphi(\lambda) = \omega(\lambda)\varphi(\lambda\alpha)\alpha^{\frac{1}{2}},$$

$$S_\alpha^+ A\varphi(\lambda) = \omega(\lambda\alpha)\varphi(\lambda\alpha)\alpha^{\frac{1}{2}}.$$

Die Vertauschbarkeit der Operatoren S_α^+ und A ergibt $\omega(\lambda\alpha) = \omega(\lambda)$ für fast alle λ. Dies ist aber nur für $\omega(\lambda) = \text{const}$ möglich. Folglich ist A der Operator, der die Multiplikation mit einer Konstanten, also mit einem Vielfachen des Einselements ausführt. Damit ist die Irreduzibilität der Darstellung $g \to U_g^+$ bewiesen.

Analog läßt sich auch die Gesamtheit H_- aller meßbaren, im Intervall $-\infty < \lambda \leq 0$ quadratisch integrablen Funktionen $\varphi(\lambda)$ untersuchen. Setzen wir

$$U_g^- \varphi(\lambda) = e^{i\lambda\beta}\varphi(\lambda\alpha)\alpha^{\frac{1}{2}},$$

so erhalten wir eine irreduzible Darstellung $g \to U_g^-$ von $\mathfrak{G}_r$.

Man kann zeigen, daß jede irreduzible unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}_r$ äquivalent ist einer der eindimensionalen Darstellungen von $\mathfrak{G}_r$ oder einer der Darstellungen U_g^+, U_g^-. Außerdem läßt sich jede unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}_r$ in eine direkte kontinuierliche Summe von Darstellungen zerlegen, die diesen irreduziblen Darstellungen äquivalent sind (für die Beweise dieser Sätze vgl. GELFAND und NEUMARK [3]).

Gehen wir von der Funktion $\varphi(\lambda)$ zu ihrer Fouriertransformierten

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\lambda) e^{i\lambda x} d\lambda$$

über, so werden die Räume H_+, H_- auf die Räume $\mathfrak{H}^+$, $\mathfrak{H}^-$ der auf der Achse $-\infty < x < +\infty$ quadratisch integrablen Funktionen $f(x)$ abgebildet, die Grenzwerte von Funktionen darstellen, welche in der oberen bzw. unteren Halbebene analytisch sind. Dabei werden in jedem dieser Räume die Operatoren U_g^+ und U_g^- durch dieselbe Formel gegeben, und zwar durch

$$U_g^{\pm} f(x) = \alpha^{\frac{1}{2}} f(\alpha^{-1}(x + \beta)).$$

2. *Unitäre Darstellungen der* LORENTZ-*Gruppe*. Wir bezeichnen mit $\mathfrak{G}_2$ die Gruppe aller Matrizen $g = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ zweiter Ordnung mit komplexen Elementen und $\det g = 1$. Jeder Matrix g entspreche die Matrix

$$a = \begin{bmatrix} \operatorname{Re}(\alpha\bar{\delta} + \bar{\gamma}\beta) & -\operatorname{Im}(\alpha\bar{\delta} - \gamma\beta) & \operatorname{Re}(\alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta}) & \operatorname{Re}(\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta}) \\ \operatorname{Im}(\alpha\bar{\delta} + \bar{\gamma}\beta) & \operatorname{Re}(\alpha\bar{\delta} - \bar{\gamma}\beta) & \operatorname{Im}(\alpha\bar{\gamma} - \beta\bar{\delta}) & \operatorname{Im}(\alpha\bar{\gamma} + \beta\bar{\delta}) \\ \operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta}) & -\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta} - \gamma\bar{\delta}) & \dfrac{\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}}{2} & \dfrac{\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} - \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta}}{2} \\ \operatorname{Re}(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta}) & -\operatorname{Im}(\alpha\bar{\beta} + \gamma\bar{\delta}) & \dfrac{\alpha\bar{\alpha} - \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} - \delta\bar{\delta}}{2} & \dfrac{\alpha\bar{\alpha} + \beta\bar{\beta} + \gamma\bar{\gamma} + \delta\bar{\delta}}{2} \end{bmatrix}$$

vierter Ordnung mit reellen Elementen. Man kann leicht zeigen, daß die Abbildung $g \to a$ ein Homomorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ auf die Gruppe aller Matrizen a ist, die die quadratische

Form $\xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 - \xi_4^2$ invariant lassen und den Bedingungen $\det a = 1$, $a_{44} \geqq 1$ genügen (vgl. etwa NEUMARK [8, § 4]). Dies ist die LORENTZ-*Gruppe*. Der Kern des Homomorphismus besteht aus den Matrizen

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

und daher werden nur die Matrizen $\begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{bmatrix}$ und $\begin{bmatrix} -\alpha & -\beta \\ -\gamma & -\delta \end{bmatrix}$ auf ein und dieselbe Matrix a abgebildet.

Hieraus folgt, daß jeder unitären Darstellung $a \to U_a$ der LORENTZ-Gruppe eine unitäre Darstellung $g \to U_g$ von $\mathfrak{G}_2$ entspricht. Es genügt nämlich, $U_g = U_a$ zu setzen, wobei a das Bild von g ist. Umgekehrt entspricht jeder unitären Darstellung $g \to U_g$ von $\mathfrak{G}_2$ eine eindeutige oder zweideutige[1]) unitäre Darstellung der LORENTZ-Gruppe. Daher können wir an Stelle der Darstellungen der LORENTZ-Gruppe die Darstellungen von $\mathfrak{G}_2$ betrachten, die in folgender Form geschrieben werden können.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{H}$ die Gesamtheit aller meßbaren Funktionen $f(z) = f(x + iy)$, die im Komplexen quadratisch integrabel sind, und führen in $\mathfrak{H}$ wie gewöhnlich eine Addition, eine Multiplikation mit einer Zahl und ein Skalarprodukt ein. Dann ist $\mathfrak{H}$ ein HILBERTscher Raum. Wir setzen für $f(z) \in \mathfrak{H}$

$$U_g f(z) = |\beta z + \delta|^{n + i\varrho - 2} (\beta z + \delta)^{-n} f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right); \tag{1}$$

dabei sei n eine beliebige ganze und ϱ eine beliebige reelle Zahl. Dann ist U_g ein unitärer Operator aus $\mathfrak{H}$. Es ist nämlich

$$|U_g f|^2 = \int |U_g f(z)|^2 dx\, dy = \int |\beta z + \delta|^{-4} \left| f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)\right|^2 dx\, dy,$$

$$|f|^2 = \int |f(z_1)|^2 dx_1\, dy_1 = \int |\beta z + \delta|^{-4} \left| f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right)\right|^2 dx\, dy$$

(die letzte Gleichung erhält man mit Hilfe der Substitution $z_1 = \dfrac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}$), d. h., es ist $|U_g f|^2 = |f|^2$; außerdem bildet U_g den Raum $\mathfrak{H}$ eineindeutig auf sich selbst ab; also ist U_g unitär. Man sieht leicht, daß $g \to U_g$ eine unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}_2$ ist. Somit ist jede dieser Darstellungen von $\mathfrak{G}_2$ durch ein Zahlenpaar (n, ϱ) bestimmt. Die Gesamtheit dieser Darstellungen bildet die *Hauptserie der Darstellungen* der Gruppe $\mathfrak{G}_2$.

Alle Darstellungen der Hauptserie sind irreduzibel.

Zum Beweis gehen wir von den Funktionen $f(z)$ zu ihren Fouriertransformierten bezüglich x und y über und erhalten

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi} \int f(z)\, e^{i \operatorname{Re}(\bar{z} w)}\, dx\, dy.$$

Bezeichnen wir ferner mit s_β und t_δ die Elemente $\begin{bmatrix} 1 & \beta \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ bzw. $\begin{bmatrix} \frac{1}{\delta} & 0 \\ 0 & \delta \end{bmatrix}$ von $\mathfrak{G}_2$ und ist U_g ein Operator im Raum der Funktionen $\varphi(w)$, so folgt aus der allgemeinen Formel (1)

$$U_{s_\beta} \varphi(w) = e^{-i \operatorname{Re} \bar{\beta}(w)} \varphi(w),$$

$$U_{t_\delta} \varphi(w) = |\delta|^{n + i\varrho + 2} \delta^{-n} \varphi(w \bar{\delta}^2).$$

---

[1]) Dies bedeutet, daß jedem Element $g \in \mathfrak{G}_2$ zwei Operatoren $U_g^{(k)}$ $(k = 1, 2)$ entsprechen, wobei $U_{g_1}^{(k)} U_{g_2}^{(l)} = U_{g_1 g_2}^{(j)}$ für alle $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}_2$, $k, l = 1, 2$ und ein gewisses von k und l abhängiges $j = 1, 2$ ist.

Jeder beschränkte Operator A, der mit allen Operatoren U_g vertauschbar ist, läßt sich insbesondere mit allen Operatoren U_{s_β} und U_{t_δ} vertauschen. Daraus ergibt sich wie in Beispiel 1, daß A ein Operator ist, der die Multiplikation mit einem Vielfachen des Einselements, also mit einer Konstanten vermittelt. Damit ist die Irreduzibilität der Darstellung U_g bewiesen.

Die Gruppe $\mathfrak{G}_2$ besitzt noch andere irreduzible unitäre Darstellungen, die den Darstellungen der Hauptserie nicht äquivalent sind und die man folgendermaßen beschreiben kann.

Es sei ϱ eine reelle Zahl aus dem Intervall $0 < \varrho \leqq 2$ und $\mathfrak{H}'_\varrho$ die Gesamtheit derjenigen Funktionen $f(z) = f(x + iy)$, die der Bedingung

$$\int |z_1 - z_2|^{-2+\varrho} |f(z_1)| \, |f(z_2)| \, dx_1 \, dy_1 \, dx_2 \, dy_2 < \infty$$

genügen. In $\mathfrak{H}'_\varrho$ sei eine Addition und eine Multiplikation mit einer Zahl wie üblich definiert und das Skalarprodukt durch

$$\langle f_1, f_2 \rangle_\varrho = \int |z_1 - z_2|^{-2+\varrho} f_1(z_1) \overline{f_2(z_2)} \, dx_1 \, dy_1 \, dx_2 \, dy_2$$

gegeben. Dann sind für $0 < \varrho < 2$ alle Axiome des Skalarprodukts erfüllt. Zum Beweis brauchen wir nur zu zeigen, daß das Skalarprodukt positiv definit, d. h.

$$\langle f, f \rangle_\varrho \geqq 0$$

ist. Gehen wir von der Funktion $f(z)$ zu ihrer Fouriertransformierten

$$\varphi(w) = \frac{1}{2\pi} \int f(z) \, e^{i \operatorname{Re}(\bar{z} w)} \, dx \, dy$$

über, so ist[1])

$$\langle f, f \rangle_\varrho = 2^{-1+\varrho} \frac{\Gamma\left(\frac{\varrho}{2}\right)}{\Gamma\left(1 - \frac{\varrho}{2}\right)} \int |w|^{-\varrho} |\varphi(w)|^2 \, du \, dv \quad (w = u + iv).$$

Somit ist $\mathfrak{H}'_\varrho$ ein euklidischer Raum. Seine vollständige Hülle bezeichnen wir mit $\mathfrak{H}_\varrho$. In ihr führen wir den Operator

$$U'_g f(z) = |\beta z + \delta|^{-2-\varrho} f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) \tag{2}$$

ein. Wir können leicht nachweisen, daß U'_g den Raum $\mathfrak{H}'_\varrho$ isometrisch auf sich abbildet. Aus diesem Grund können wir U'_g eindeutig zu einem unitären Operator auf ganz $\mathfrak{H}_\varrho$ fortsetzen. Bezeichnen wir diesen Operator wieder mit U'_g, so ist die Zuordnung $g \to U'_g$ eine unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ im Raum $\mathfrak{H}_\varrho$. Jedem Wert ϱ aus dem Intervall $0 < \varrho < 2$ entspricht eine solche Darstellung. Man nennt sie die *Darstellungen der ergänzenden Serie* der Gruppe $\mathfrak{G}_2$.

Alle Darstellungen der ergänzenden Serie sind irreduzibel.

Der Beweis verläuft analog dem der Irreduzibilität der Darstellungen der Hauptserie.

Die Darstellungen der ergänzenden Serie schließen sich auf natürliche Art an die Darstellungen für $n = 0$, $\varrho = 0$ an. Die Formel (2) für U'_g ergibt sich formal aus der Beziehung (1) für U_g, wenn $n = 0$ ist und wir $i\varrho$ durch ϱ ersetzen. Für $\varrho = 2$ erhalten wir

$$\langle f_1, f_2 \rangle_2 = \int f_1(z) \, dx \, dy \int \overline{f_2(z) \, dx \, dy}.$$

---

[1]) Eine ausführliche Herleitung dieser Formel vgl. bei Neumark [8, § 7].

Somit ist f gleich Null für $\int f(z)\,dx\,dy = 0$. Also ist der Raum $\mathfrak{H}_2$ eindimensional, und seine Elemente werden eindeutig durch die Zahlen

$$\xi = \int f(z)\,dx\,dy$$

definiert. Dabei ist

$$U_g' \xi = \int |\beta z + \delta|^{-4} f\left(\frac{\alpha z + \gamma}{\beta z + \delta}\right) dx\,dy = \int f(z)\,dx\,dy = \xi,$$

d. h., U_g' ist der Einheitsoperator.

Somit ist also für $\varrho = 2$ der Raum $\mathfrak{H}_\varrho$ eindimensional, und jedem Element der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ entspricht der Einheitsoperator. Darstellungen solcher Art heißen *Einheitsdarstellungen*.

Man kann zeigen, daß jede von der Einheitsdarstellung verschiedene irreduzible unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ einer der Darstellungen der Hauptserie oder der ergänzenden Serie äquivalent ist.[1]) Außerdem ist jede unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}_2$ eine kontinuierliche direkte Summe dieser irreduziblen Darstellungen (vgl. GELFAND und NEUMARK [4]).

Wir weisen noch darauf hin, daß die Darstellungen der Hauptserie, die den Zahlenpaaren (n, ϱ) und $(-n, -\varrho)$ entsprechen, äquivalent sind. In allen übrigen Fällen sind verschiedene Darstellungen der Hauptserie und der ergänzenden Serie paarweise nicht äquivalent.

Nun bezeichnen wir mit $\mathfrak{V}$ die Gesamtheit aller unitären Matrizen der Gruppe $\mathfrak{G}_2$. Dann ist $\mathfrak{V}$ offenbar eine Untergruppe von $\mathfrak{G}_2$. Die Darstellungen der Hauptserie mit $n = 0$ besitzen die folgende Eigenschaft.

Im Raum $\mathfrak{H}$ der Darstellung $g \to U_g$ existiert ein Vektor $f_0 = f_0(z)$, der gegenüber allen Operatoren U_v, $v \in \mathfrak{V}$, invariant ist.

Zunächst bemerken wir, daß jede Matrix $v \in \mathfrak{V}$ die Gestalt

$$v = \begin{bmatrix} \alpha & \beta \\ -\bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{bmatrix} \quad \text{mit} \quad |\alpha|^2 + |\beta|^2 = 1$$

hat. Auf Grund von (1) ergibt die Bedingung für die Invarianz von $f_0(z)$ die Beziehung

$$|\beta z + \bar{\alpha}|^{-2+i\varrho} f_0\left(\frac{\alpha z - \bar{\beta}}{\beta z + \bar{\alpha}}\right) = f_0(z),$$

woraus sich für $z = 0$

$$|\alpha|^{-2+i\varrho} f_0\left(-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}\right) = c$$

mit $c = f_0(0)$ ergibt. Setzen wir $-\frac{\bar{\beta}}{\bar{\alpha}}$ gleich z, so ist

$$|\alpha|^2 = \frac{|\alpha|^2}{|\alpha|^2 + |\beta|^2} = \frac{1}{1 + \left|\frac{\beta}{\alpha}\right|^2} = \frac{1}{1 + |z|^2}.$$

Also ist

$$f_0(z) = c(1 + |z|^2)^{-1 + i\frac{\varrho}{2}}.$$

Wir sehen, daß *für eine gegebene Darstellung in $\mathfrak{H}$ ein und bis auf einen konstanten Faktor nur ein invarianter Vektor $f_0(z)$ existiert.*

---

[1]) Die Verallgemeinerung dieses Resultats für nicht unitäre Darstellungen ist bei NEUMARK [6] zu finden.

Wählen wir $c = \frac{1}{\sqrt{\pi}}$, so erhalten wir den normierten Vektor

$$f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + |z|^2)^{-1 + i\frac{\varrho}{2}}.$$

Wir setzen jetzt

$$\varphi(g) = \langle U_g f_0, f_0 \rangle.$$

Dies ist die *der gegebenen Darstellung $g \to U_g$ entsprechende Kugelfunktion.* Um sie zu berechnen, müssen wir zunächst berücksichtigen, daß jede Matrix $g \in \mathfrak{G}_2$ in der Gestalt $g = vh$ dargestellt werden kann; dabei ist $v \in \mathfrak{V}$ und h eine positiv definite hermitesche Matrix. Ferner läßt sich h auf Diagonalform bringen, d. h., wir können $h = v_2^{-1} \varepsilon v_2$ schreiben, wobei ε die Diagonalmatrix

$$\begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}, \quad \lambda > 0,$$

und $v_2 \in \mathfrak{V}$ ist.

Die Matrix ε wird durch die Matrix g bis auf eine Vertauschung der Diagonalelemente definiert und ist folglich durch die Bedingung $\lambda \geqq 1$ eindeutig bestimmt, die wir im folgenden stets als erfüllt annehmen wollen. Somit haben wir schließlich

$$g = v_1 \varepsilon v_2, \qquad v_1, v_2 \in \mathfrak{V}.$$

Hieraus folgt wegen der Invarianz von f_0

$$\varphi(g) = \langle U_{v_1} U_\varepsilon U_{v_2} f_0, f_0 \rangle = \langle U_\varepsilon U_{v_2} f_0, U_{v_1}^* f_0 \rangle = \langle U_\varepsilon f_0, f_0 \rangle = \varphi(\varepsilon).$$

Es genügt also, $\varphi(\varepsilon)$ zu berechnen.

Mit

$$U_\varepsilon f_0(z) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + |z|^2 \lambda^{-4})^{-1 + i\frac{\varrho}{2}} \lambda^{-2 + i\varrho}$$

erhalten wir

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{1}{\pi} \int (1 + |z|^2 \lambda^{-4})^{-1 + i\frac{\varrho}{2}} \lambda^{-2 + i\varrho} (1 + |z|^2)^{-1 - i\frac{\varrho}{2}} \, dx\, dy$$

$$= \frac{1}{\pi} \lambda^{-2 + i\varrho} \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} (1 + r^2 \lambda^{-4})^{-1 + i\frac{\varrho}{2}} (1 + r^2)^{-1 - i\frac{\varrho}{2}} r\, dr\, d\theta$$

$$= \lambda^{-2 + i\varrho} \int_0^{\infty} (1 + \xi \lambda^{-4})^{-1 + i\frac{\varrho}{2}} (1 + \xi)^{-1 - i\frac{\varrho}{2}} \, d\xi.$$

Setzen wir im letzten Integral

$$x = \frac{1 - \lambda^4}{1 + \xi},$$

so ergibt sich

$$\varphi(\varepsilon) = \lambda^{-i\varrho + 2} (1 - \lambda^4)^{-1} \int_0^{1 - \lambda^4} (1 - x)^{-1 + i\frac{\varrho}{2}} \, dx$$

$$= -\frac{2\lambda^{-i\varrho + 2} (1 - \lambda^4)^{-1}}{i\varrho} (\lambda^{2i\varrho} - 1) = \frac{2}{i\varrho} \frac{\lambda^{i\varrho} - \lambda^{-i\varrho}}{\lambda^2 - \lambda^{-2}}.$$

Für das Folgende ist es bequem, den Parameter $t = \ln \lambda$ zu wählen. Dann nimmt $\varphi(\varepsilon)$ nämlich die Gestalt

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{2 \sin \varrho t}{\varrho \sinh 2t} \tag{3}$$

an.

Analog könnte man zeigen, daß im Raum $\mathfrak{H}_\varrho$ der Darstellung $g \to U'_g$ der ergänzenden Serie ein bezüglich U'_v, $v \in \mathfrak{V}$, invarianter Vektor existiert. Die entsprechende Kugelfunktion hat dann die Gestalt

$$\varphi(\varepsilon) = \frac{2 \sinh \varrho t}{\varrho \sinh 2t}.$$

Übrigens werden wir dies im folgenden nicht benutzen.[1])

3. *Beispiel einer nicht vollsymmetrischen Gruppenalgebra.* Wir bezeichnen mit $R(\mathfrak{G}_2)$ die Gruppenalgebra der in Beispiel 2 betrachteten Gruppe $\mathfrak{G}_2$ und zeigen, daß $R(\mathfrak{G}_2)$ eine nicht vollsymmetrische Algebra ist.

Es sei $L^1(\mathfrak{G}_2)$ die Gesamtheit aller auf $\mathfrak{G}_2$ summierbaren Funktionen $a(g)$ und $\mathfrak{A}'$ die Gesamtheit der Funktionen $a(g) \in L^1(\mathfrak{G}_2)$, die der Bedingung[2])

$$a(vg) = a(gv) = a(g) \quad \text{für alle} \quad v \in \mathfrak{V}$$

genügen. $\mathfrak{A}'$ ist eine Teilalgebra von $R(\mathfrak{G}_2)$. Um dies nachzuweisen, brauchen wir nur zu zeigen, daß für $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}'$ die Funktion

$$a(g) = \int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1)$$

ebenfalls zu $\mathfrak{A}'$ gehört (dabei bezeichnet $d\mu$ das Differential des zweiseitig invarianten Maßes auf $\mathfrak{G}_2$). Dies folgt aber aus den Gleichungen

$$a(gv) = \int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1} g v)\, d\mu(g_1) = \int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) = a(g),$$

$$a(vg) = \int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1} v g)\, d\mu(g_1) = \int a_1(v g_1)\, a_2(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) = a(g).$$

Daher ist die Gesamtheit der Elemente der Form $\lambda e + a$, $a \in \mathfrak{A}'$, eine (offenbar abgeschlossene) ein Einselement enthaltende Teilalgebra $\mathfrak{A}$ von $R(\mathfrak{G}_2)$. Die Teilalgebra $\mathfrak{A}$ ist kommutativ. Dazu brauchen wir nur zu zeigen, daß für $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}'$

$$\int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) = \int a_2(g_1)\, a_1(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) \tag{4}$$

ist. Bezeichnen wir die zur Matrix g hermitesch konjugierte Matrix mit g^*, so ist $a(g^*) = a(g)$ für jede Funktion $a(g) \in \mathfrak{A}'$; denn setzen wir $g = v_1 \varepsilon v_2$, so erhalten wir

$$a(g^*) = a(v_2^{-1} \varepsilon v_1^{-1}) = a(\varepsilon) = a(v_1 \varepsilon v_2) = a(g).$$

Außerdem gilt für jede Funktion $a(g) \in L^1(\mathfrak{G}_2)$

$$\int a(g)\, d\mu(g) = \int a(g^*)\, d\mu(g).$$

Dies folgt aus der Beziehung

$$d\mu(g) = \frac{d\mu(\beta)\, d\mu(\gamma)\, d\mu(\delta)}{|\delta|^2},$$

wenn wir der Matrix g die Parameter β, γ, δ zuordnen; dabei ist allgemein $d\mu(z) = dx\,dy$ für $x = \operatorname{Re} z$, $y = \operatorname{Im} z$. Diese Beziehung für $d\mu(g)$ ergibt sich leicht durch direkte Berechnung der Funktionaldeterminante der Transformation $g \to g g_0$ der Variablen β, γ, δ. Diese Bemerkungen besagen, daß für $a_1, a_2 \in \mathfrak{A}'$

$$\int a_1(g_1)\, a_2(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) = \int a_1(g_1^*) a_2(g^* g_1^{*\,-1})\, d\mu(g_1) = \int a_1(g_1)\, a_2(g^* g_1^{-1})\, d\mu(g_1)$$

---

[1]) Für Verallgemeinerung dieser Resultate auf Darstellungen verschiedener Klassen von Gruppen, insbesondere der allgemeinen Theorie der Kugelfunktionen siehe Mackey [2] und Godement [9].

[2]) Wir behalten hier die Bezeichnungen aus Beispiel 2 bei.

gilt. Da das letzte Integral eine Funktion aus $\mathfrak{A}'$ ist, ist es gleich

$$\int a_1(g_1)\, a_2(g g_1^{-1})\, d\mu(g_1) = \int a_1(g_1^{-1})\, a_2(g g_1)\, d\mu(g_1) = \int a_1(g_1^{-1} g)\, a_2(g_1)\, d\mu(g_1).$$

Damit ist (4) und infolgedessen auch die Kommutativität von $\mathfrak{A}$ bewiesen.

Wir zeigen nun, daß $\mathfrak{A}$ nicht vollsymmetrisch ist. Auf Grund von § 14, Nr. 1, genügt es zu zeigen, daß in $\mathfrak{A}$ nichtsymmetrische maximale Ideale existieren.

Wir wollen zunächst sämtliche maximalen Ideale von $\mathfrak{A}$ bestimmen. Dazu zerlegen wir das Integral über g in Integrale über v_1, ε und v_2. Es sei Γ die Gesamtheit aller unitären Diagonalmatrizen zweiter Ordnung und $\overline{\mathfrak{B}}$ die Gesamtheit aller rechten Nebenklassen $\overline{v}$ von $\mathfrak{B}$ bezüglich Γ. Die Multiplikation mit v_0 führt auf eine Transformation im Raum $\overline{\mathfrak{B}}$. Mit $\overline{v}v_0$ bezeichnen wir die Klasse, in die dabei die Nebenklasse $\overline{v}$ übergeht.

In der Darstellung $g = v_1 \varepsilon v_2$ werden die Matrizen v_1 und v_2 durch die Matrix g nicht eindeutig bestimmt; denn es ist $g = v_1 \tau^{-1} \varepsilon \tau v_2$ mit $\tau \in \Gamma$ ebenfalls eine Darstellung dieser Form. Normieren wir v_2 so, daß $\alpha \geqq 0$ ist, und suchen wir aus jeder Klasse $\overline{v}_2$ den dadurch bestimmten Repräsentanten v_2 heraus, so werden die Matrizen v_1 und ε durch die Matrix g eindeutig definiert, wobei v_1 die ganze Gruppe $\mathfrak{B}$ durchläuft und v_2 mit der Klasse $\overline{v}_2$ identifiziert werden kann.

Nun sei $d\mu_0(\overline{v}_2)$ ein differenzierbares Maß[1] in $\overline{\mathfrak{B}}$, und es seien außerdem $d\mu(v_1)$, $d\mu(\varepsilon)$ invariante Maße der Gruppe $\mathfrak{B}$ bzw. der multiplikativen Gruppe der positiven Zahlen. Ferner wählen wir $d\mu(v_1)$ so, daß $\mu(\mathfrak{B}) = 1$ ist. Dann ergibt sich offenbar

$$\int f(g)\, d\mu(g) = \int f(v_1 \varepsilon v_2)\, \omega(v_1, \varepsilon, \overline{v}_2)\, d\mu(v_1)\, d\mu(\varepsilon)\, d\mu_0(\overline{v}_2), \tag{5}$$

wobei $\omega(v_1, \varepsilon, \overline{v}_2)$ die Funktionaldeterminante des Übergangs von g zu $v_1, \varepsilon, \overline{v}_2$ ist. Infolge der Linksinvarianz von $d\mu(g)$ gilt

$$\int f(vg)\, d\mu(g) = \int f(g)\, d\mu(g),$$

d. h.

$$\int f(v v_1 \varepsilon v_2)\, \omega(v_1, \varepsilon, \overline{v}_2)\, d\mu(v_1)\, d\mu(\varepsilon)\, d\mu_0(\overline{v}_2)$$
$$= \int f(v_1 \varepsilon v_2)\, \omega(v_1, \varepsilon, \overline{v}_2)\, d\mu(v_1)\, d\mu(\varepsilon)\, d\mu_0(\overline{v}_2). \tag{6}$$

Wegen der Linksinvarianz von $d\mu(v_1)$ ist das erste Integral gleich

$$\int f(v_1 \varepsilon v_2)\, \omega(v^{-1} v_1, \varepsilon, \overline{v}_2)\, d\mu(v_1)\, d\mu(\varepsilon)\, d\mu_0(\overline{v}_2).$$

Somit folgt aus (6), daß $\omega(v^{-1}v_1, \varepsilon, \overline{v}_2) = \omega(v_1, \varepsilon, \overline{v}_2)$ fast überall bezüglich v_1 gilt, denn $f(g)$ ist eine beliebige Funktion. Somit hängt ω nicht von v_1 ab, so daß wir $\omega = \omega(\varepsilon, \overline{v}_2)$ setzen können. Infolge der Rechtsinvarianz von $d\mu(g)$ gilt ferner

$$\int f(gv)\, d\mu(g) = \int f(g)\, d\mu(g),$$

d. h.

$$\int f(v_1 \varepsilon v_2')\, \omega(\varepsilon, \overline{v}_2)\, d\mu(v_1)\, d\mu(\varepsilon)\, d\mu_0(\overline{v}_2)$$
$$= \int f(v_1 \varepsilon v_2)\, \omega(\varepsilon, \overline{v}_2)\, d\mu(v_1)\, d\mu(\varepsilon)\, d\mu_0(\overline{v}_2), \tag{7}$$

wobei v_2' ein normierter Repräsentant der Klasse $\overline{v}_2$ ist. Nehmen wir im zweiten Integral die Variablensubstitution $\overline{v}_2 \to v_2'$, also $\overline{v}_2 \to \overline{v}_2 v$ vor und bezeichnen wir mit $\lambda(\overline{v}_2, v)$ die

[1]) Das Maß μ_0 auf $\overline{\mathfrak{B}}$ heißt *differenzierbar*, wenn $d\mu_0(\overline{v}g_0)$ differenzierbar bezüglich $d\mu_0(\overline{v})$ für alle $g_0 \in \mathfrak{G}_2$ ist.

Funktionaldeterminante dieser Transformation, so können wir das zweite Integral in der Gestalt

$$\int f(v_1 \varepsilon v_2') \, \omega(\varepsilon, \bar{v}_2 v) \, \lambda(\bar{v}_2, v) \, d\mu(v_1) \, d\mu(\varepsilon) \, d\mu_0(\bar{v}_2)$$

schreiben. Somit folgt aus (7)

$$\omega(\varepsilon, \bar{v}_2) = \omega(\varepsilon, \bar{v}_2 v) \, \lambda(\bar{v}_2, v).$$

Wir geben $\bar{v}_2$ den festen Wert $\bar{v}_2^0$ und setzen dann $\bar{v}_2^0 v = \bar{v}$. Hiermit erhalten wir

$$\omega(\varepsilon, \bar{v}) = \omega(\varepsilon) \, \lambda^{-1}(v)$$

mit

$$\omega(\varepsilon) = \omega(\varepsilon, \bar{v}_2^0), \qquad \lambda(v) = \lambda(\bar{v}_2^0, v).$$

Mit $d\mu(\bar{v}_2) = \lambda^{-1}(v) \, d\mu_0(\bar{v}_2)$ geht die Gleichung (5) in

$$\int f(g) \, d\mu(g) = \int f(v_1 \varepsilon v_2) \, \omega(\varepsilon) \, d\mu(v_1) \, d\mu(\varepsilon) \, d\mu(\bar{v}_2)$$

über. Insbesondere ist für $a \in \mathfrak{A}'$

$$\| a \|_1 = \int | a(g) | \, d\mu(g) = \int | a(\varepsilon) | \, \omega(\varepsilon) \, d\mu(\varepsilon), \tag{8}$$

denn die Konstante $\int d\mu(v_2)$ kann man als Faktor zu ω nehmen.

Ferner bestimmen wir das Multiplikationsgesetz in $\mathfrak{A}'$. Dazu betrachten wir eine der Hauptdarstellungen $g \to U_g$ der Gruppe $\mathfrak{G}_2$ für $n = 0$. Es sei f_0 ein normierter Vektor, der gegenüber allen Operatoren U_v, $v \in \mathfrak{V}$, invariant ist. Setzen wir

$$f = \int U_v \, U_\varepsilon f_0 \, d\mu(v),$$

so ist f ebenfalls invariant gegenüber allen Operatoren U_v, denn es ist

$$U_{v_0} f = U_{v_0} \int U_v \, U_\varepsilon f_0 \, d\mu(v) = \int U_{v_0 v} \, U_\varepsilon f_0 \, d\mu(v) = \int U_v \, U_\varepsilon f_0 \, d\mu(v) = f.$$

Daher unterscheidet sich f von f_0 nur durch einen konstanten Faktor,

$$f = c f_0.$$

Um diesen Faktor näher zu bestimmen, überlegen wir uns, daß

$$\begin{aligned} c = \langle f, f_0 \rangle &= \int \langle U_v \, U_\varepsilon f_0, f_0 \rangle \, d\mu(v) = \int \langle U_\varepsilon f_0, U_{v^{-1}} f_0 \rangle \, d\mu(v) \\ &= \langle U_\varepsilon f_0, f_0 \rangle \int d\mu(v) = \langle U_\varepsilon f_0, f_0 \rangle = \varphi(\varepsilon) \end{aligned}$$

ist, d. h., c stimmt mit der der gegebenen Darstellung entsprechenden Kugelfunktion überein.

Es gilt also die Formel

$$\int U_v \, U_\varepsilon f_0 \, d\mu(v) = \varphi(\varepsilon) f_0.$$

Hieraus folgt für $a \in \mathfrak{A}'$

$$\begin{aligned} A_a f_0 = \int a(g) \, U_g f_0 \, d\mu(g) &= \int a(\varepsilon) \, \omega(\varepsilon) \, U_v \, U_\varepsilon f_0 \, d\mu(v) \, d\mu(\varepsilon) \\ &= \int a(\varepsilon) \, \omega(\varepsilon) \, \varphi(\varepsilon) \, d\mu(\varepsilon) \, f_0; \end{aligned}$$

f_0 ist also ein Eigenvektor des Operators A_a der entsprechenden Darstellung der Algebra $\mathfrak{A}$. Daraus ergibt sich

$$A_{a_1 a_2} f_0 = A_{a_1} A_{a_2} f_0 = \int a_1(\varepsilon) \, \omega(\varepsilon) \, \varphi(\varepsilon) \, d\mu(\varepsilon) \int a_2(\varepsilon) \, \omega(\varepsilon) \, \varphi(\varepsilon) \, d\mu(\varepsilon) \, f_0.$$

Die Zuordnung

$$\lambda e + a \sim \lambda + \int a(\varepsilon)\,\omega(\varepsilon)\,\varphi(\varepsilon)\,d\mu(\varepsilon) \tag{9}$$

ist also ein Homomorphismus der Algebra $\mathfrak{A}$ in den Körper der komplexen Zahlen.

Die Matrix $\varepsilon = \begin{bmatrix} \lambda^{-1} & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$, $\lambda \geqq 1$, läßt sich mit Hilfe des Parameters $t = \ln \lambda$ angeben. Wegen $\lambda \geqq 1$ ist $t \geqq 0$. Wir setzen

$$f(t) = \frac{a(\varepsilon)\,\omega(\varepsilon)}{\sinh 2t}$$

und bilden damit $\mathfrak{A}'$ auf die Gesamtheit R_0' aller Funktionen $f(t)$ ab, die wegen (8) der Bedingung

$$\|f\| = \int |f(t)| \sinh 2t\,dt < \infty$$

genügen, wobei $\|f\| = \|a\|$ ist. Wir übertragen auf R_0' sämtliche Operationen aus $\mathfrak{A}'$ und wollen sehen, wie sie sich in R_0' ausdrücken lassen. Offenbar sind die Addition und die Multiplikation mit einer Zahl wie gewöhnlich definiert. Um das Multiplikationsgesetz in R_0' zu finden, überlegen wir uns, daß sich wegen (3) die Zuordnung (9) jetzt in der Gestalt

$$f(t) \to \int_0^\infty f(t)\,\frac{2\sin \varrho t}{\varrho}\,dt \tag{10}$$

schreiben läßt. Diese Zuordnung ist somit ein Homomorphismus der Algebra R_0' in den Körper der komplexen Zahlen. Hieraus folgt, daß das Multiplikationsgesetz in R_0' die Form

$$f(u) = \int_0^\infty \int_{|t-u|}^{t+u} f_1(s)\,f_2(t)\,ds\,dt$$

besitzt, denn es ist

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty f(u)\,\frac{2\sin \varrho u}{\varrho}\,du &= \int_0^\infty \left(\int_0^\infty \int_{|t-u|}^{t+u} f_1(s)\,f_2(t)\,ds\,dt \right) \frac{2\sin \varrho u}{\varrho}\,du \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(s)\,f_2(t) \left(\int_{|s-t|}^{s+t} \frac{2\sin \varrho u}{\varrho}\,du \right) ds\,dt \\
&= \int_0^\infty \int_0^\infty f_1(s)\,f_2(t)\,\frac{4\sin \varrho s \cdot \sin \varrho t}{\varrho^2}\,ds\,dt \\
&= \int_0^\infty f_1(s)\,\frac{2\sin \varrho s}{\varrho}\,ds \int_0^\infty f_2(t)\,\frac{2\sin \varrho t}{\varrho}\,dt.
\end{aligned} \tag{11}$$

Da (10) ein Homomorphismus von R_0' ist, stimmt der letzte Ausdruck mit $\int_0^\infty (f_1 \cdot f_2)(u)\,\frac{2\sin \varrho u}{\varrho}\,du$ überein. Somit folgt aus (11) die Beziehung $f = f_1 \cdot f_2$, denn die Funktionen $\sin \varrho u$ bilden ein vollständiges System.

Zum Schluß bemerken wir, daß die Involution in R_0' durch die Formel $f^*(t) = \overline{f(t)}$ definiert wird. Dies ergibt sich aus

$$a^*(g) = \overline{a(g^{-1})} = \overline{a(u_2^{-1}\varepsilon^{-1}u_1^{-1})} = \overline{a(\varepsilon)}.$$

Aus den Formeln für $f_1 \cdot f_2$ und f^* erhalten wir, daß $\mathfrak{A}$ der in § 20, Nr. 3, Beispiel 2, betrachteten Algebra R_0 vollisomorph ist. Daher stimmen die maximalen Ideale der Algebren R_0 und $\mathfrak{A}$ überein. Da aber, wie wir sahen, R_0 nichtsymmetrische maximale Ideale besitzt, kann $\mathfrak{A}$ nicht vollsymmetrisch sein.

Wir zeigen nun, daß $R(\mathfrak{G}_2)$ keine vollsymmetrische Algebra ist. Besitzt das Element $e + a$, $a \in \mathfrak{A}'$, ein Inverses in $R(\mathfrak{G}_2)$, so gehört dieses Inverse zu $\mathfrak{A}$, d. h., es hat die Form $e + b$ mit $b \in \mathfrak{A}'$. Denn ist $e + b$, $b \in L^1(\mathfrak{G}_2)$, invers zu $e + a$, $a \in \mathfrak{A}'$, so ist

$$(e + a)(e + b) = e,$$

also $b = -a - a \cdot b$, d. h.

$$b(g) = -a(g) - \int a(g_1) b(g_1^{-1}g)\, d\mu(g_1).$$

Dann gilt für $v \in \mathfrak{B}$

$$\begin{aligned} b(vg) &= -a(vg) - \int a(g_1) b(g_1^{-1}vg)\, d\mu(g_1) \\ &= -a(g) - \int a(vg_1) b(g_1^{-1}g)\, d\mu(g_1) \\ &= -a(g) - \int a(g_1) b(g_1^{-1}g)\, d\mu(g_1) = b(g), \end{aligned}$$

denn nach Voraussetzung liegt a in $\mathfrak{A}'$. Analog können wir zeigen, daß $b(gv) = b(g)$ ist, wenn wir die Gleichung $(e + b)(e + a) = e$ benutzen. Folglich ist $b \in \mathfrak{A}'$, $e + b \in \mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ nicht vollsymmetrisch ist, existiert in $\mathfrak{A}$ ein Element a derart, daß $e + a^*a$ in $\mathfrak{A}$ und infolge des eben Erwähnten auch in $R(\mathfrak{G}_2)$ kein Inverses besitzt.

Also ist $R(\mathfrak{G}_2)$ nicht vollsymmetrisch.

§ 30. Positiv definite Funktionen

1. Positiv definite Funktionen und ihr Zusammenhang mit den unitären Darstellungen. Eine auf einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gegebene Funktion $\varphi(g)$ heißt *positiv definit*, wenn

$$\sum_{k,l=1}^{n} \varphi(g_l^{-1}g_k)\, \lambda_k \bar{\lambda}_l \geqq 0 \tag{1}$$

für alle endlichen Systeme $g_1, \ldots, g_n$ von Elementen der Gruppe $\mathfrak{G}$ und alle komplexen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ist.

Jede positiv definite Funktion genügt den Bedingungen

$$\varphi(e) \geqq 0, \tag{2}$$

$$\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}, \tag{3}$$

$$|\varphi(g)| \leqq \varphi(e). \tag{4}$$

Setzen wir nämlich $n = 1$, $g_1 = e$, $\lambda_1 = 1$ in (1) ein, so erhalten wir (2). Für $n = 2$, $g_1 = g$, $g_2 = e$, $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = \lambda$ ergibt sich aus (1)

$$\varphi(e) + \varphi(g)\,\bar{\lambda} + \varphi(g^{-1})\,\lambda + \varphi(e)\,|\lambda|^2 \geqq 0; \tag{5}$$

also ist $\varphi(g)\bar{\lambda} + \varphi(g^{-1})\lambda$ für jedes komplexe λ reell; mit $\lambda = 1$ und $\lambda = i$ erhalten wir, daß $\varphi(g) + \varphi(g^{-1})$ und $i(\varphi(g^{-1}) - \varphi(g))$ reelle Zahlen sind; dies ist aber nur für $\varphi(g^{-1}) = \overline{\varphi(g)}$ möglich. Nun beweisen wir noch die Ungleichung (4). Wegen (2) können nur die beiden folgenden Fälle auftreten: a) $\varphi(e) = 0$, dann folgt aus (5), wenn wir $\lambda = -\varphi(g)$ setzen, $2|\varphi(g)|^2 = 0$, $\varphi(g) = 0$; b) $\varphi(e) > 0$, dann erhalten wir aus (5), wenn wir $\lambda = -\frac{\varphi(g)}{\varphi(e)}$ setzen, $\varphi(e) - \frac{|\varphi(g)|^2}{\varphi(e)} \geqq 0$, also $|\varphi(g)|^2 \leqq (\varphi(e))^2$. Damit ist (4) in beiden Fällen bewiesen.

Ist eine unitäre Darstellung $g \to U_g$ einer Gruppe $\mathfrak{G}$ gegeben, so läßt sich eine positiv definite Funktion dadurch konstruieren, daß wir

$$\varphi(g) = \langle U_g \xi_0, \xi_0 \rangle$$

setzen, wobei ξ_0 ein fester Vektor aus dem Raum der Darstellung ist. Es ist nämlich

$$\sum_{k,l=1}^{n} \varphi(g_l^{-1} g_k) \lambda_k \bar{\lambda}_l = \sum_{k,l=1}^{n} \langle U_{g_l}^{-1} U_{g_k} \xi_0, \xi_0 \rangle \lambda_k \bar{\lambda}_l$$
$$= \left\langle \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_{g_k} \xi_0, \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_{g_k} \xi_0 \right\rangle \geqq 0.$$

Ist dabei die Darstellung $g \to U_g$ stetig, so ist es auch die Funktion $\varphi(g)$.

Es sei umgekehrt $\varphi(g) \not\equiv 0$ eine beliebige positiv definite Funktion. Ihr entspricht eine unitäre Darstellung $g \to U_g$ von $\mathfrak{G}$ mit $\varphi(g) = \langle U_g \xi_0, \xi_0 \rangle$. Um dies zu beweisen, setzen wir $\mathfrak{L}$ gleich der Gesamtheit aller Funktionen $x(g)$ auf $\mathfrak{G}$, die nur für endlich viele g von Null verschiedene Werte annehmen. In $\mathfrak{L}$ definieren wir eine Addition und eine Multiplikation mit einer Zahl wie üblich. Dann ist $\mathfrak{L}$ ein linearer Raum. Ferner definieren wir in $\mathfrak{L}$ eine Bilinearform

$$\langle x, y \rangle = \sum_{g,h \in \mathfrak{G}} \varphi(h^{-1} g)\, x(g)\, \overline{y(h)}.$$

Da $\varphi(g)$ positiv definit ist, gelten die Beziehungen (1) und (2). Folglich ist

$$\overline{\langle y, x \rangle} = \langle x, y \rangle \quad \text{und} \quad \langle x, x \rangle \geqq 0.$$

Man kann aber zeigen, daß $\langle x, x \rangle$ auch für $x \not\equiv 0$ verschwinden kann. Ist $\mathfrak{N}$ die Gesamtheit aller $x \in \mathfrak{L}$, für welche $\langle x, x \rangle = 0$ ist, so ist $\mathfrak{N}$ ein Teilraum von $\mathfrak{L}$, und $\langle x, y \rangle$ definiert das Skalarprodukt $\langle \xi, \eta \rangle$ im Quotientenraum $\mathfrak{H}' = \mathfrak{L}/\mathfrak{N}$ durch die Formel

$$\langle \xi, \eta \rangle = \langle x, y \rangle, \quad x \in \xi, \quad y \in \eta$$

(vgl. § 5, Nr. 1, Satz I). Somit ist die vollständige Hülle $\mathfrak{H}$ von $\mathfrak{H}'$ bezüglich der Norm $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi \rangle}$ ein Hilbertscher Raum.

Jedem Element $g_0 \in \mathfrak{G}$ entspricht ein Operator T_{g_0} vermöge der Beziehung $T_{g_0} x(g) = x(g_0^{-1} g)$. Dann bildet T_{g_0} den Raum $\mathfrak{L}$ auf sich ab, und es ist

$$\langle T_{g_0} x, T_{g_0} y \rangle = \sum_{g,h} \varphi(h^{-1} g)\, x(g_0^{-1} g)\, \overline{y(g_0^{-1} h)}$$
$$= \sum_{g,h} \varphi(h^{-1} g_0^{-1} g_0 g)\, x(g)\, \overline{y(h)} = \langle x, y \rangle.$$

Folglich ist $\mathfrak{N}$ invariant bezüglich T_{g_0}, und T_{g_0} ist also ein Operator in $\mathfrak{H}'$ mit der Eigenschaft $\langle T_{g_0}\xi, T_{g_0}\eta\rangle = \langle\xi, \eta\rangle$, bildet also $\mathfrak{H}'$ isometrisch auf $\mathfrak{H}'$ ab, d. h., T_{g_0} läßt sich eindeutig zu einem unitären Operator auf $\mathfrak{H}$ fortsetzen, den wir mit U_{g_0} bezeichnen. Dann ist die Zuordnung $g \to U_g$ eine unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Ist $x_0(g)$ die durch die Formeln

$$x_0(g) = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad g = e, \\ 0 & \text{für} \quad g \neq e \end{cases}$$

auf $\mathfrak{G}$ definierte Funktion und ξ_0 die Restklasse bezüglich $\mathfrak{N}$, die x_0 enthält, so gilt

$$\langle U_{g_0}\xi_0, \xi_0\rangle = \langle T_{g_0}x_0, x_0\rangle = \sum_{g,h} \varphi(h^{-1}g)\, x_0(g_0^{-1}g)\, \overline{x_0(h)} = \varphi(g_0).$$

Die Darstellung $g \to U_g$ genügt also allen an sie gestellten Forderungen. Wir erwähnen noch, daß ξ_0 ein zyklischer Vektor der Darstellung $g \to U_g$ ist.

Ist $\varphi(g)$ stetig, so ist auch die mit ihrer Hilfe konstruierte Darstellung $g \to U_g$ stetig. Ist nämlich $\varphi(g)$ stetig, so ist für feste $\xi, \eta \in \mathfrak{H}'$ und $x \in \xi$, $y \in \eta$ der Ausdruck

$$\begin{aligned}\langle U_{g_0}\xi, \eta\rangle = \langle T_{g_0}x, y\rangle &= \sum_{g,h} \varphi(h^{-1}g)\, x(g_0^{-1}g)\, \overline{y(h)} \\ &= \sum_{g,h} \varphi(h^{-1}g_0 g)\, x(g)\, \overline{y(h)}\end{aligned}$$

eine stetige Funktion von g_0. Da $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ dicht und $|U_{g_0}| = 1$ ist, folgt hieraus die Stetigkeit der Funktion $\langle U_g\xi, \eta\rangle$ für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$.

Somit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

Theorem 1. *Jeder stetigen unitären Darstellung $g \to U_g$ einer topologischen Gruppe $\mathfrak{G}$ und einem Vektor $\xi_0 \neq 0$ aus dem Raum der Darstellung entspricht eine stetige positiv definite Funktion $\varphi(g) = \langle U_g\xi_0, \xi_0\rangle$. Umgekehrt entspricht jeder stetigen positiv definiten Funktion $\varphi(g) \not\equiv 0$ eine stetige unitäre zyklische Darstellung $g \to U_g$ von $\mathfrak{G}$ mit einem zyklischen Vektor ξ_0 derart, daß $\varphi(g) = \langle U_g\xi_0, \xi_0\rangle$ ist.*

2. Der Zusammenhang der positiv definiten Funktionen mit den positiven Funktionalen einer Gruppenalgebra. Es sei $\mathfrak{G}$ eine lokal bikompakte Gruppe. Das positive Funktional $f_0(x)$ der Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$, das durch die Beziehung

$$f_0(\lambda e + a) = \lambda c$$

definiert ist, wobei c eine positive Konstante ist, heißt *ausgeartetes Funktional.* Ein positives Funktional $f(x)$ einer Gruppenalgebra heißt *regulär,* wenn das ausgeartete Funktional ihm nicht untergeordnet ist.

Hilfssatz. *Eine zyklische Darstellung $x \to A_x$ einer Gruppenalgebra enthält genau dann keine ausgeartete Darstellung, wenn das sie definierende positive Funktional $f(x) = \langle A_x\xi_0, \xi_0\rangle$ regulär ist.*

Beweis. Die Darstellung $x \to A_x$ enthalte eine ausgeartete Darstellung, und es sei $\mathfrak{N}$ der zugehörige invariante Teilraum. Setzen wir

$$\xi_0 = \xi_1 + \xi_2, \quad \xi_1 \in \mathfrak{N}, \quad \xi_2 \in \mathfrak{H} - \mathfrak{N},$$

so erhalten wir

$$f(x) = \langle A_x \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle A_x \xi_1, \xi_1 \rangle + \langle A_x \xi_2, \xi_2 \rangle.$$

Folglich ist das ausgeartete Funktional $f_0(x) = \langle A_x \xi_1, \xi_1 \rangle$ dem Funktional $f(x)$ untergeordnet.

Nun sei umgekehrt das ausgeartete Funktional $f_0(x)$ dem Funktional $f(x)$ untergeordnet. Wegen § 19, Nr. 1, Theorem 1, ist

$$f_0(x) = \langle A_x B \xi_0, \xi_0 \rangle,$$

wobei B ein mit allen Operatoren A_x vertauschbarer positiv definiter Operator aus $\mathfrak{H}$ ist. Da für $a \in L^1(\mathfrak{G})$ auch $x^* a \in L^1(\mathfrak{G})$ für alle $x \in R(\mathfrak{G})$ ist und $f_0(x)$ auf $L^1(\mathfrak{G})$ verschwindet, folgt

$$0 = f_0(x^* a) = \langle A_x^* A_a B \xi_0, \xi_0 \rangle = \langle A_a B \xi_0, A_x \xi_0 \rangle.$$

Die Vektoren $A_x \xi_0$ bilden eine in $\mathfrak{H}$ dichte Menge, so daß

$$A_a B \xi_0 = 0 \quad \text{für alle} \quad a \in L^1(\mathfrak{G})$$

ist. Daher spannen die Vektoren der Gestalt $\lambda B \xi_0$ einen eindimensionalen invarianten Teilraum von $\mathfrak{H}$ auf, in welchem $x \to A_x$ eine ausgeartete Darstellung ist.

Es sei nun $g \to U_g$ eine mit Hilfe einer positiv definiten Funktion $\varphi(g)$ konstruierte stetige unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$. Dieser unitären Darstellung $g \to U_g$ entspricht eine Darstellung $x \to A_x$ der Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$, die keine ausgeartete Darstellung enthält. Der Darstellung $x \to A_x$ entspricht ihrerseits wieder ein reguläres positives Funktional

$$\begin{aligned} f(\lambda e + a) &= \lambda \langle \xi_0, \xi_0 \rangle + \langle A_a \xi_0, \xi_0 \rangle \\ &= \lambda \varphi(e) + \int a(g) \langle U_g \xi_0, \xi_0 \rangle \, d\mu(g) \\ &= \lambda \varphi(e) + \int a(g) \varphi(g) \, d\mu(g). \end{aligned}$$

Nun beweisen wir die Umkehrung. Einem regulären positiven Funktional $f(x)$ von $R(\mathfrak{G})$ entspricht eine zyklische Darstellung $x \to A_x$ von $R(\mathfrak{G})$, die keine ausgeartete Darstellung enthält, mit der Eigenschaft

$$f(\lambda e + a) = \lambda \langle \xi_0, \xi_0 \rangle + \langle A_a \xi_0, \xi_0 \rangle; \tag{1}$$

dabei ist ξ_0 ein zyklischer Vektor der Darstellung $x \to A_x$. Ist $g \to U_g$ eine stetige unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$, die der Darstellung $x \to A_x$ entspricht, so daß $A_a = \int a(g) U_g \, d\mu(g)$ ist, und setzen wir diesen Ausdruck für A_a in (1) ein, so erhalten wir

$$f(\lambda e + a) = \lambda \langle \xi_0, \xi_0 \rangle + \int a(g) \langle U_g \xi_0, \xi_0 \rangle \, d\mu(g) = \lambda \varphi(e) + \int a(g) \varphi(g) \, d\mu(g);$$

dabei ist $\varphi(g) = \langle U_g \xi_0, \xi_0 \rangle$ eine stetige positiv definite Funktion auf $\mathfrak{G}$.

Damit ist der folgende Satz bewiesen.

Theorem 2. *Es existiert eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Gesamtheit aller regulären positiven Funktionale $f(\lambda e + a)$ über $R(\mathfrak{G})$ und der Gesamtheit aller stetigen positiv definiten Funktionen $\varphi(g) \not\equiv 0$ auf $\mathfrak{G}$. Diese Zuordnung wird durch die Formel*

$$f(\lambda e + a) = \lambda\varphi(e) + \int a(g)\,\varphi(g)\,d\mu(g)$$

hergestellt.

Wir weisen darauf hin, daß der Vollständigkeitssatz (vgl. § 29, Nr. 3) auch mit Hilfe positiv definiter Funktionen hergeleitet werden kann (vgl. Gelfand und Raikow [2]).

Wir bezeichnen mit $L^\infty(\mathfrak{G})$ den Raum der in bezug auf ein linksinvariantes Maß auf $\mathfrak{G}$ wesentlich beschränkten Funktionen (vgl. § 6, Nr. 13). Infolge Formel (4) aus Nr. 1 gehört jede stetige, auf $\mathfrak{G}$ positiv definite Funktion zu $L^\infty(\mathfrak{G})$. Der Raum $L^\infty(\mathfrak{G})$ ist zum Raum $L^1(\mathfrak{G})$ konjugiert (vgl. § 6, Nr. 16). Daher ist die schwache Konvergenz in $L^\infty(\mathfrak{G})$ durch die Umgebungen $U(\varphi_0; a_1, \ldots, a_n; \varepsilon)$ mit $a_1, \ldots, a_n \in L^1(\mathfrak{G})$, $\varepsilon > 0$, definiert, die von den Gesamtheiten der Funktionen $\varphi(g) \in L^\infty(\mathfrak{G})$ gebildet werden, welche den Bedingungen

$$\int (\varphi(g) - \varphi_0(g))\, a_k(g)\, d\mu_l(g) < \varepsilon \qquad (k = 1, \ldots, n)$$

genügen. Die Funktion $\varphi(g) \in L^\infty(\mathfrak{G})$ heißt *positiv integral-definit,* wenn für jede Funktion $a(g) \in L^1(\mathfrak{G})$

$$\int\int \overline{a(g_1)}\, a(g_1 g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g) \geqq 0 \qquad (1)$$

gilt.

I. *Die Gesamtheit aller positiv integral-definiten Funktionen bildet eine schwach abgeschlossene Menge in $L^\infty(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Wir setzen $b = a^* \cdot a$ und können dann (1) in der Gestalt $\int b(g)\varphi(g)\,d\mu_l(g) \geqq 0$ schreiben. Andererseits ist der Ausdruck

$$f(\varphi) = \int b(g)\varphi(g)\,d\mu_l(g)$$

ein in der schwachen Topologie stetiges lineares Funktional über $L^\infty(\mathfrak{G})$. Ist also (1) für eine Menge von Funktionen φ auf $L^\infty(\mathfrak{G})$ richtig, so gilt sie ebenfalls für jeden schwachen Häufungspunkt dieser Menge.

Die Überlegungen aus Nr. 1 lassen sich auf positiv integral-definite Funktionen übertragen. Setzen wir nämlich

$$\langle a_1, a_2\rangle = \int\int \overline{a_2(g_1)}\, a_1(g_1 g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g), \qquad (2)$$

so erhalten wir eine Bilinearform in $L^1(\mathfrak{G})$, die die Bedingung $\langle a, a\rangle \geqq 0$ erfüllt. Es gilt also $\langle a_1 + \lambda a_2, a_1 + \lambda a_2\rangle \geqq 0$ für alle $a_1, a_2 \in L^1(\mathfrak{G})$ und jedes komplexe λ. Hieraus läßt sich leicht schließen, daß die Form $\langle a_1, a_2\rangle$ hermitesch ist. Daher definiert sie ein Skalarprodukt $\langle \xi, \eta\rangle$ im Quotientenraum $\mathfrak{H}' = L^1(\mathfrak{G})/\mathfrak{N}$; dabei ist $\mathfrak{N}$ der Teilraum aller Funktionen $a \in L^1(\mathfrak{G})$, die der Bedingung $\langle a, a\rangle = 0$ genügen. Die vollständige Hülle von $\mathfrak{H}'$ bezüglich der Norm $|\xi| = \sqrt{\langle \xi, \xi\rangle}$ ist ein Hilbertscher Raum, den wir mit $\mathfrak{H}$ bezeichnen wollen.

Setzen wir $T_{g_0} a(g) = a(g_0^{-1} g)$, so ergibt sich aus (2) und der Linksinvarianz des Maßes die Beziehung $\langle T_{g_0} a_1, T_{g_0} a_2 \rangle = \langle a_1, a_2 \rangle$.

Hieraus folgt wie in Nr. 1, daß T_g einen unitären Operator U_g von $\mathfrak{H}$ definiert und die Zuordnung $g \to U_g$ eine unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist.

Diese Darstellung ist stetig. Denn ist $a_1(g)$, $a_2(g) \in L^1(\mathfrak{G})$ und $a_1 \in \xi$, $a_2 \in \eta$, so ist

$$\langle U_{g_0} \xi, \eta \rangle = \langle T_{g_0} a_1, a_2 \rangle = \int \overline{a_2(g_1)}\, a_1(g_0^{-1} g_1 g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g)$$

eine stetige Funktion von g_0, da infolge § 28, Nr. 2, Satz I, die Vektorfunktion

$$b_{g_0} = \{b_{g_0}(g)\} = \left\{\int \overline{a_2(g_1)}\, T_{g_1^{-1} g_0}\, a_1(g)\, d\mu_l(g_1)\right\} = \left\{\int \overline{a_2(g_1)}\, a_1(g_0^{-1} g_1 g)\, d\mu_l(g)\right\}$$

mit Werten aus $L^1(\mathfrak{G})$ im Sinne der Norm[1]) in $L^1(\mathfrak{G})$ stetig und

$$\langle U_{g_0} \xi, \eta \rangle = \int b_{g_0}(g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g) = f(b_{g_0})$$

ist, wobei $f(b) = \int b(g) \varphi(g) d\mu_l(g)$ ein stetiges lineares Funktional über $L^1(\mathfrak{G})$ ist.

Da $\mathfrak{H}'$ in $\mathfrak{H}$ dicht und $|U_g| = 1$ ist, folgt hieraus die Stetigkeit der Funktion $\langle U_g \xi, \eta \rangle$ für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{H}$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen.

II. *Jede positiv integral-definite Funktion $\varphi(g)$ auf $\mathfrak{G}$ definiert eine stetige unitäre Darstellung $g \to U_g$ der Gruppe $\mathfrak{G}$.*

Dieser Darstellung entspricht eine Darstellung der Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$, die keine ausgeartete Darstellung enthält, und somit ein reguläres positives Funktional $f(x)$ über $R(\mathfrak{G})$ mit

$$f(a_2^* a_1) = \langle a_1, a_2 \rangle = \int \int \overline{a_2(g_1)}\, a_1(g_1 g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g). \tag{3}$$

---

[1]) Wählen wir eine bikompakte Menge $Q \subset \mathfrak{G}$ derart, daß

$$\int_{\mathfrak{G} - Q} |a_2(g_1)|\, d\mu_l(g_1) < \frac{\varepsilon}{2 \|a_1\|_1}$$

ist, und eine Umgebung $U(g_0)$ mit der Eigenschaft

$$\left\| T_{g_1^{-1} g_0'} a_1 - T_{g_1^{-1} g_0} a_1 \right\|_1 < \frac{\varepsilon}{\|a_2\|_1}$$

für alle $g_0' \in U(g_0)$ und $g_1 \in Q$, so erhalten wir nämlich

$$\begin{aligned}
&\left\| \int \overline{a_2(g_1)}\, T_{g_1^{-1} g_0'}\, a_1\, d\mu_l(g_1) - \int \overline{a_2(g_1)}\, T_{g_1^{-1} g_0}\, a_1\, d\mu_l(g_1) \right\|_1 \\
&\leq \int_Q |a_2(g_1)| \left\| T_{g_1^{-1} g_0'} a_1 - T_{g_1^{-1} g_0} a_1 \right\|_1 d\mu_l(g_1) \\
&\quad + \int_{\mathfrak{G} - Q} |a_2(g_1)| \left(\left\| T_{g_1^{-1} g_0'} a_1 \right\|_1 + \left\| T_{g_1^{-1} g_0} a_1 \right\|_1 \right) d\mu_l(g_1) \\
&\leq \frac{\varepsilon}{\|a_2\|_1} \int_Q |a_2(g_1)|\, d\mu_l(g_1) + 2 \|a_1\|_1 \int_{\mathfrak{G} - Q} |a_2(g_1)|\, d\mu_l(g_1) < 2\varepsilon.
\end{aligned}$$

Nach Theorem 2 ist

$$f(a_2 a_1) = \int\int \overline{a_2(g_1)}\, a_1(g_1 g)\, \varphi_1(g)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g)$$

mit einer stetigen positiv definiten Funktion $\varphi_1(g)$. Ein Vergleich dieser Formel mit (3) zeigt, daß $\varphi(g) = \varphi_1(g)$ lokal fast überall auf $\mathfrak{G}$ ist. Folglich gilt:

III. *Jede auf $\mathfrak{G}$ positiv integral-definite Funktion ist lokal fast überall gleich einer stetigen positiv definiten Funktion.* Umgekehrt gilt:

IV. *Jede stetige positiv definite Funktion ist auch positiv integral-definit.*

Die Behauptung von Satz IV folgt unmittelbar aus Theorem 2, wonach $f(a) = \int a(g)\varphi(g)\, d\mu_l(g)$ ein positives Funktional über $L^1(\mathfrak{G})$ ist. Daher ist

$$\int\int \overline{a_2(g_1)}\, a(g_1 g)\, \varphi(g)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g) = f(a^* a) \geqq 0.$$

3. Reguläre Mengen. Es seien φ_1, φ_2 stetige positiv definite Funktionen auf einer lokal bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$ und f_1, f_2 die entsprechenden positiven Funktionale. Man nennt die Funktion φ_1 der Funktion φ_2 *untergeordnet* und schreibt $\varphi_1 \prec \varphi_2$, wenn $\varphi_2 - \varphi_1$ eine positiv definite Funktion, d. h., wenn f_1 dem Funktional f_2 untergeordnet ist. Insbesondere nennt man eine positiv definite Funktion *elementar*, wenn jede andere, der Funktion φ untergeordnete positiv definite Funktion ein Vielfaches von ihr ist. Somit ist φ genau dann elementar, wenn das entsprechende positive Funktional elementar, d. h. die ihr entsprechende unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ irreduzibel ist.

I. *Es sei $\varphi_2(g) = \langle U_g \xi_0, \xi_0\rangle$; dabei sei $g \to U_g$ eine zyklische Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit einem zyklischen Vektor ξ_0. Die Beziehung $\varphi_1 \prec \varphi_2$ gilt genau dann, wenn $\varphi_1(g)$ gleich $\langle B U_g \xi_0, \xi_0\rangle$ mit einem positiv definiten Operator B ist, dessen Norm höchstens gleich Eins und der mit allen Operatoren U_g vertauschbar ist.*

Beweis. Es seien f_1, f_2 reguläre positive Funktionale über $R(\mathfrak{G})$, die den positiv definiten Funktionen φ_1, φ_2 entsprechen, so daß

$$f_1(a) = \int a(g)\, \varphi_1(g)\, d\mu_l(g), \quad f_2(a) = \int a(g)\, \varphi_2(g)\, d\mu_l(g) \tag{1}$$

für alle $a \in L^1(\mathfrak{G})$ ist. Die Beziehung $\varphi_1 \prec \varphi_2$ ist gleichbedeutend mit $f_1 \prec f_2$ und diese ihrerseits mit

$$f_1(a) = \langle A_a B \xi_0, \xi_0\rangle \tag{2}$$

für alle $a \in L^1(\mathfrak{G})$; dabei ist B ein positiv definiter Operator, der mit allen Operatoren A_a oder, was dasselbe ist, mit allen Operatoren U_g vertauschbar ist (vgl. § 19, Nr. 1, Theorem 1). Wegen (1) besagt (2), daß

$$\int a(g)\, \varphi_1(g)\, d\mu_l(g) = \langle A_a B \xi_0, \xi_0\rangle = \int a(g) \langle B U_g \xi_0, \xi_0\rangle\, d\mu_l(g)$$

ist. Daraus folgt $\varphi_1(g) = \langle B U_g \xi_0, \xi_0\rangle$, da die Funktionen $a(g) \in L^1(\mathfrak{G})$ beliebig sind.

Wir setzen jetzt $H = \sqrt{B}$. Da ξ_0 ein zyklischer Vektor ist, gibt es für jedes $\varepsilon > 0$ eine Linearkombination $\xi = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k U_{g_k} \xi_0$ mit $|H\xi_0 - \xi| < \varepsilon$. Dann ist

$$\begin{aligned}
|\langle B U_g \xi_0, \xi_0\rangle - \langle U_g \xi, \xi\rangle| &= |\langle U_g H \xi_0, H\xi_0\rangle - \langle U_g \xi, \xi\rangle| \\
&\leqq |\langle U_g H\xi_0, H\xi_0\rangle - \langle U_g \xi, H\xi_0\rangle| + |\langle U_g \xi, H\xi_0\rangle - \langle U_g \xi, \xi\rangle \\
&\leqq \| U_g (H\xi_0 - \xi)\| \cdot \|H\xi_0\| + \|U_g \xi\| \cdot \|H\xi_0 - \xi\| \\
&< \varepsilon(\|H\xi_0\| + \|\xi\|) < \varepsilon(2\|H\xi_0\| + \varepsilon).
\end{aligned}$$

Andererseits ist

$$\langle U_g \xi, \xi \rangle = \sum_{p,q} \lambda_p \bar{\lambda}_q \varphi_2 (g_q^{-1} g g_p).$$

Also können wir der obigen Ungleichung die Form

$$\left| \varphi_1(g) - \sum_{p,q} \lambda_p \bar{\lambda}_q \varphi_2 (g_q^{-1} g g_p) \right| < \varepsilon (2 \| H \xi_0 \| + \varepsilon)$$

geben. Wir erhalten somit den Satz:

II. *Ist* $\varphi_1 \prec \varphi_2$, *so ist* φ_1 *Limes einer geeigneten, auf* $\mathfrak{G}$ *gleichmäßig konvergenten Folge von Funktionen*

$$\varphi(g) = \sum_{p,q} \lambda_p \bar{\lambda}_q \varphi_2 (g_q^{-1} g g_p).$$

Wir bezeichnen mit P die Gesamtheit aller stetigen positiv definiten Funktionen $\varphi(g)$ auf $\mathfrak{G}$ und mit P_0 die Gesamtheit derjenigen Funktionen aus P, die der Bedingung $\varphi(e) \leqq 1$ genügen. P_0 ist eine schwach abgeschlossene konvexe Teilmenge der Einheitskugel in $L^\infty(\mathfrak{G})$ und daher bikompakt in der schwachen Topologie von $L^\infty(\mathfrak{G})$ (vgl. § 3, Nr. 7, Satz III).

Zum Beweis nehmen wir an, daß φ_0 ein schwacher Häufungspunkt der Menge P_0 ist. Auf Grund von Nr. 2, Satz IV und I, ist φ_0 eine positiv integral-definite Funktion, und wir können $\varphi_0 \in P$ voraussetzen (vgl. Nr. 2, Satz III). Wir müssen zeigen, daß $\varphi_0(e) \leqq 1$ ist, und nehmen dazu das Gegenteil an. Es sei also $\varphi_0(e) = 1 + \varepsilon$ mit $\varepsilon > 0$. Da $|\varphi_0(g) - \varphi_0(e)| < \frac{\varepsilon}{2}$ in einer Umgebung U des Einselements e ist, können wir, wenn wir $\bar{U}$ als bikompakt voraussetzen, die Funktion

$$a(g) = \begin{cases} \dfrac{1}{\mu_l(\bar{U})} & \text{für} \quad g \in \bar{U}, \\ 0 & \text{für} \quad g \notin \bar{U} \end{cases}$$

bilden, und wir erhalten für $\varphi \in P_0$

$$\left| \int a(g) (\varphi_0(g) - \varphi(g)) \, d\mu_l(g) \right| = \frac{1}{\mu_l(\bar{U})} \left| \int_{\bar{U}} (\varphi_0(g) - \varphi(g)) \, d\mu_l(g) \right|$$

$$= \frac{1}{\mu_l(\bar{U})} \left| \varphi_0(e) \mu_l(\bar{U}) + \int_{\bar{U}} (\varphi_0(g) - \varphi_0(e)) \, d\mu_l(g) - \int_{\bar{U}} \varphi(g) \, d\mu_l(g) \right|$$

$$\geqq \frac{1}{\mu_l(\bar{U})} \left(\varphi_0(e) \mu_l(\bar{U}) - \int_{\bar{U}} |\varphi_0(g) - \varphi_0(e)| \, d\mu_l(g) - \int_{\bar{U}} \varphi(e) \, d\mu_l(g) \right)$$

$$\geqq \varphi_0(e) - \frac{\varepsilon}{2} - \varphi(e) \geqq (1 + \varepsilon) - \frac{\varepsilon}{2} - 1 = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Hieraus folgt entgegen der Voraussetzung, daß die Umgebung $U\left(\varphi_0; a, \frac{\varepsilon}{2}\right)$ keine Funktionen der Menge P_0 enthält. Also ist $\varphi_0(e) \leqq 1$.

Wir nennen eine Menge $\mathfrak{A} \subset P_0$ einen *regulären Teil* der Menge P_0, wenn folgende Bedingungen erfüllt sind:

a) $\mathfrak{A}$ ist konvex und schwach abgeschlossen;

b) aus $\varphi_1 \in P_0$, $\varphi_2 \in \mathfrak{A}$, $\varphi_1 \prec \varphi_2$ folgt $\varphi_1 \in \mathfrak{A}$;

c) aus $\varphi \in \mathfrak{A}$ folgt $\dfrac{\varphi(g)}{\varphi(e)} \in \mathfrak{A}$.

Aus b) ergibt sich $\varphi \equiv 0 \in \mathfrak{A}$; 0 ist Extremalpunkt dieser Menge, denn aus $\varphi_1, \varphi_2 \in P_0$ und $\varphi_1 + \varphi_2 = 0$ folgt $\varphi_1(e) + \varphi_2(e) = 0$ und somit $\varphi_1(e) = \varphi_2(e) = 0$, $\varphi_1 = \varphi_2 = 0$.

Offenbar ist die Menge P_0 regulärer Teil von P_0.

Eine positiv definite Funktion $\varphi(g)$ heißt *normiert*, wenn $\varphi(e) = 1$ ist.

III. *Ist die Menge $\mathfrak{A}$ regulärer Teil von P_0, so stimmt die Menge ihrer von 0 verschiedenen Extremalpunkte mit der Menge ihrer elementaren normierten positiv definiten Funktionen überein.*

Beweis. Es sei φ ein Extremalpunkt der Menge $\mathfrak{A}$ und $\varphi \neq 0$. Wegen $0 \in \mathfrak{A}$, $\frac{1}{\varphi(e)}\varphi \in \mathfrak{A}$ ist auch das Segment $\left[0, \frac{1}{\varphi(e)}\varphi\right]$ in $\mathfrak{A}$ enthalten. Die Funktion φ ist extremal und muß demzufolge mit dem Endpunkt $\frac{1}{\varphi(e)}\varphi$ dieses Segments übereinstimmen. Hieraus folgt $\varphi(e) = 1$, d. h., φ ist normiert.

Nun wollen wir zeigen, daß φ elementar ist. Es sei $\varphi_1 \prec \varphi$. Dann ist $\varphi - \varphi_1 \prec \varphi$ und somit infolge b)

$$\varphi_1 \in \mathfrak{A}, \quad \varphi - \varphi_1 \in \mathfrak{A}.$$

Wegen c) gehören die Funktionen

$$\psi_1 = \frac{1}{\varphi_1(e)}\varphi_1, \quad \psi_2 = \frac{1}{\varphi(e) - \varphi_1(e)}(\varphi - \varphi_1) = \frac{\varphi - \varphi_1}{1 - \varphi_1(e)}$$

zur Menge $\mathfrak{A}$. Die Gleichung

$$\varphi = \varphi_1(e)\psi_1 + (1 - \varphi_1(e))\psi_2$$

zeigt, daß φ dem Segment $[\psi_1, \psi_2]$ angehört. Da φ nach Voraussetzung extremal ist, gilt entweder $\varphi = \psi_1$ oder $\varphi = \psi_2$. In jedem dieser Fälle ist $\varphi_1 = \varphi_1(e)\varphi$, d. h., die Funktion φ ist elementar.

Umgekehrt sei nun $\varphi \in \mathfrak{A}$ eine normierte elementare Funktion. Wir zeigen, daß dann φ extremal in $\mathfrak{A}$ ist. Es gehöre φ zum Segment $[\varphi_1, \varphi_2] \subset \mathfrak{A}$, es sei also

$$\varphi = \lambda\varphi_1 + (1 - \lambda)\varphi_2, \quad \varphi_1, \varphi_2 \in \mathfrak{A}, \quad 0 \leqq \lambda \leqq 1.$$

Daraus folgt $\lambda\varphi_1 \prec \varphi$. Ist $\lambda \neq 0$, so muß, da φ elementar ist, $\varphi_1 = \mu\varphi$ sein. Analog ergibt sich $\varphi_2 = \nu\varphi$ für $\lambda < 1$. Also gilt für $0 < \lambda < 1$

$$\varphi = \lambda\mu\varphi + (1 - \lambda)\nu\varphi.$$

oder

$$1 = \lambda\mu + (1 - \lambda)\nu.$$

Wegen $1 = \varphi_1(e) = \mu\varphi(e)$, $1 = \varphi_2(e) = \nu\varphi(e)$, also $\mu = \nu$, ist dies aber nur für $\mu = \nu = 1$ möglich; also folgt $\varphi_1 = \varphi_2 = \varphi$. Damit ist Satz III vollständig bewiesen.

Wenden wir jetzt auf einen regulären Teil $\mathfrak{A}$ von P_0 Theorem 1 aus § 3, Nr. 9, an, so erhalten wir

Theorem 3 (Gelfand und Raikow [2]). *Es sei $\mathfrak{A}$ ein regulärer Teil der Menge P_0. Dann ist jede Funktion $\varphi \in \mathfrak{A}$ schwacher Häufungspunkt in $L^\infty(\mathfrak{G})$ von Funktionen der Gestalt*

$$\sum \lambda_k \varphi_k(g), \quad \lambda_k \geqq 0, \ \sum \lambda_k \leqq \varphi(e),$$

wobei die φ_k elementare normierte Funktionen aus $\mathfrak{A}$ sind.

Insbesondere gilt dieser Satz für die ganze Menge P_0 und somit auch für P.

4. Trigonometrische Polynome auf einer Gruppe. Wir nennen jede Funktion der Form

$$\lambda_1\varphi_1(g) + \cdots + \lambda_n\varphi_n(g)$$

mit elementaren normierten Funktionen $\varphi_k(g)$ aus P ein *trigonometrisches Polynom* auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ mit Koeffizienten λ_k. Ist insbesondere $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe aller reellen Zahlen x, so stimmen, wie wir später in § 31, Nr. 1, Beispiel 1, sehen werden, die trigonometrischen Polynome auf dieser Gruppe mit den gewöhnlichen trigonometrischen Polynomen $\sum \lambda_k e^{i\alpha_k x}$ überein.

I. *Ist $f(g)$ ein trigonometrisches Polynom und $x(g) \in L^1(\mathfrak{G})$, so stellt die Funktion*

$$f_1(g) = \int f(g_1)\, x(g_1^{-1} g)\, d\mu_l(g_1)$$

ebenfalls ein trigonometrisches Polynom dar.

Es genügt zu zeigen, daß dieser Satz für den Fall erfüllt ist, daß $f(g)$ eine elementare positiv definite Funktion ist. Dann gilt aber

$$f(g) = \langle U_g \xi_0,\ \xi_0 \rangle,$$

wobei $g \to U_g$ eine irreduzible unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ ist. Damit folgt

$$f_1(g) = \int \langle U_{g_1} \xi_0,\ \xi_0 \rangle\, x(g_1^{-1} g)\, d\mu_l(g_1)$$
$$= \int \langle U_{g g_1} \xi_0,\ \xi_0 \rangle\, x(g_1^{-1})\, d\mu_l(g_1) = \langle U_g \xi,\ \xi_0 \rangle$$

mit

$$\xi = \int x(g_1^{-1})\, U_{g_1} \xi_0\, d\mu_l(g_1).$$

Die Funktion $f_1(g)$ läßt sich also durch eine Linearkombination der Funktionen

$$\varphi_1(g) = \langle U_g(\xi + \xi_0),\ \xi + \xi_0 \rangle,$$
$$\varphi_2(g) = \langle U_g(\xi - \xi_0),\ \xi - \xi_0 \rangle,$$
$$\varphi_3(g) = \langle U_g(\xi + i\xi_0),\ \xi + i\xi_0 \rangle,$$
$$\varphi_4(g) = \langle U_g(\xi - i\xi_0),\ \xi - i\xi_0 \rangle$$

darstellen, die alle elementar und positiv definit sind. Daraus folgt, daß $f_1(g)$ ein trigonometrisches Polynom ist.

Analog läßt sich auch der folgende Satz beweisen:

II. *Jede Rechts- oder Linksverschiebung eines trigonometrischen Polynoms ist ebenfalls ein trigonometrisches Polynom.*

5. Das Spektrum. Es sei $\mathfrak{S}$ eine Menge stetiger beschränkter Funktionen auf $\mathfrak{G}$. Wir sagen, eine Funktion $f(g)$ wird durch Funktionen aus $\mathfrak{S}$ auf jeder bikompakten Menge *gleichmäßig approximiert,* wenn für jede bikompakte Menge $Q \subset \mathfrak{G}$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $\varphi \in \mathfrak{S}$ mit der Eigenschaft

$$|f(g) - \varphi(g)| < \varepsilon \quad \text{auf} \quad Q$$

existiert.

Es sei $\varphi \in P_0$. Mit $\mathfrak{A}_\varphi$ bezeichnen wir die Menge aller Funktionen

$$f(g) = \sum_{p,q} \alpha_p \bar{\alpha}_q\, \varphi(g_q^{-1} g g_p)$$

und der endlichen Summen dieser Funktionen, sofern sie in P_0 liegen. $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ sei die Menge derjenigen Funktionen aus P_0, die auf jeder bikompakten Menge durch Funktionen aus $\mathfrak{A}_\varphi$ gleichmäßig approximiert werden.

Hilfssatz 1 (Raikow [7]). *Die Menge $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ ist schwach abgeschlossen.*

Beweis. Es gehöre θ zur schwach abgeschlossenen Hülle von $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$. Wir wollen zeigen, daß $\theta \in \tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ ist. Es sei $y \in L^1(\mathfrak{G})$. Zur Abkürzung[1]) setzen wir

$$y_{g'}(g) = y(g'g)$$

und

$$\psi_y(g) = \int\int \psi(g_2^{-1} g g_1)\, y(g_1)\, y(g_2)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g_2).$$

---

1) Der einfacheren Schreibweise wegen weichen wir jetzt von den Bezeichnungen aus § 27, Nr. 4, ab.

Durchläuft g' die bikompakte Menge $Q \subset \mathfrak{G}$, so durchläuft $y_{g'}$ eine relativ kompakte Menge $S \subset L^1(\mathfrak{G})$.

Hier genügt es zu beweisen, daß für jedes $\varepsilon > 0$ in der Menge S ein endliches ε-Netz existiert (vgl. § 2, Nr. 14, Satz I). Da $y_{g'}$ eine im Sinne der Norm in $L^1(\mathfrak{G})$ stetige Funktion von g' ist, entspricht jedem Punkt $g_0' \in Q$ eine Umgebung $U(g_0')$ derart, daß für $g \in U(g_0')$ die Ungleichung $\|y_g - y_{g_0'}\|_1 < \varepsilon$ erfüllt ist. Wegen der Bikompaktheit der Menge Q können wir aus diesen Umgebungen eine endliche Überdeckung $U(g_1'), \ldots, U(g_n')$ der Menge Q auswählen. Offenbar bilden die Punkte $y_{g_1'}, \ldots, y_{g_n'}$ in der Menge S ein ε-Netz.

Also ist S und folglich auch die Menge S^*y aller Funktionen $z = (y_g)^* \cdot y$, $g \in Q$, relativ kompakt. Nach Satz III von § 19, Nr. 4, ist der schwache Häufungspunkt θ der Menge $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ auch ihr Häufungspunkt im Sinne der auf jeder kompakten Menge gleichmäßigen Topologie. Deshalb existiert eine Funktion $\psi \in \tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ derart, daß

$$\left|\int (\psi(g') - \theta(g'))\, z(g')\, d\mu_l(g')\right| < \varepsilon$$

für alle $g \in Q$ ist. Dies ergibt, wie man leicht sieht, für alle $g \in Q$ die Ungleichung

$$|\psi_y(g) - \theta_y(g)| < \varepsilon.$$

Mit anderen Worten, *die Funktion $\theta_y(g)$ wird auf jeder bikompakten Menge durch die Funktionen $\psi_y(g)$, $\psi \in \tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$, gleichmäßig approximiert.* Offenbar ist für $\theta_y(e) \leqq 1$ auch $\psi_y(e) \leqq 1$.

Es sei $g \to U_g$ eine unitäre Darstellung mit einem zyklischen Vektor ξ_0:

$$\psi(g) = \langle U_g \xi_0, \xi_0 \rangle;$$

dann ist $\psi_y(g) = \langle U_g A_y \xi_0, A_y \xi_0 \rangle$. Da der Vektor ξ_0 zyklisch ist, muß $A_y \xi_0$ der Grenzwert (bezüglich der Norm) von Vektoren der Form

$$\sum_k \alpha_k U_{g_k} \xi_0$$

sein. Daher ist $\psi_y(g)$ der auf der ganzen Gruppe $\mathfrak{G}$ gleichmäßige Grenzwert der Funktionen

$$\sum_{j,k} \alpha_k \bar{\alpha}_j \langle U_g U_{g_k} \xi_0, U_{g_j} \xi_0 \rangle = \sum_{j,k} \psi(g_j^{-1} g g_k)\, \alpha_k \bar{\alpha}_j \in \tilde{\mathfrak{A}}_\varphi.$$

Also ist $\psi_y(g)$ und auch $\theta_y(g)$ aus $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$. Andererseits existiert für ein beliebiges $\varepsilon > 0$ und eine beliebige bikompakte Menge $Q \subset \mathfrak{G}$ eine Umgebung U des Einselements von $\mathfrak{G}$ mit der Eigenschaft

$$|\theta(g_2^{-1} g g_1) - \theta(g)| < \varepsilon$$

für $g_1, g_2 \in U$, $g \in Q$. Dabei können wir $\bar{U}$ als bikompakt annehmen. Wählen wir ein $y(g) \in L^1(\mathfrak{G})$, für das $y(g) \geqq 0$, $y(g) = 0$ außerhalb $\bar{U}$ und

$$\int y(g)\, d\mu_l(g) = 1$$

gilt, so erhalten wir

$$\begin{aligned} |\theta_y(g) - \theta(g)| &\leqq \int_{\bar{U}} \int_{\bar{U}} |\theta(g_2^{-1} g g_1) - \theta(g)|\, y(g_1)\, y(g_2)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu\,(g_2) \\ &< \varepsilon \int_{\bar{U}} \int_{\bar{U}} y(g_1)\, y(g_2)\, d\mu_l(g_1)\, d\mu_l(g_2) = \varepsilon \end{aligned}$$

für $g \in Q$. Somit ist $\theta \in \tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$.

Hilfssatz 2. *Die Menge* $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ *ist ein regulärer Teil der Menge* P_0.

Beweis. Wir müssen zeigen, daß $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ den Bedingungen a), b), c) von Seite 406 genügt. Die schwache Abgeschlossenheit wurde schon in Hilfssatz 1 bewiesen. Offenbar ist $\mathfrak{A}_\varphi$, also auch $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ konvex. Ferner ist mit $\psi \in \mathfrak{A}_\varphi, \psi \neq 0$, auch $\frac{\psi}{\psi(e)} \in \mathfrak{A}_\varphi$; demnach gilt diese Eigenschaft auch für $\psi \in \tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$. Die Bedingungen a) und c) sind also erfüllt.

Nun sei $\psi \in \tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$, $\theta \in P$, $\theta < \psi$; wir wollen zeigen, daß θ ebenfalls zu $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ gehört. Es sei Q eine bikompakte Menge von $\mathfrak{G}$ und $\varepsilon > 0$. Infolge Satz II aus Nr. 3 gibt es eine Funktion der Gestalt

$$\sum_{p,q} \beta_p \bar{\beta}_q \psi(g_q^{-1} g g_p)$$

derart, daß

$$\left| \sum_{p,q} \beta_p \bar{\beta}_q \psi(g_q^{-1} g g_p) - \theta(g) \right| < \varepsilon$$

für alle $g \in \mathfrak{G}$ ist. Andererseits ist ψ in $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ enthalten, so daß eine Funktion $\varphi' \in \mathfrak{A}_\varphi$ existiert, die die Eigenschaft

$$|\psi(g) - \varphi'(g)| < \frac{\varepsilon}{\sum_{p,q} |\bar{\beta}_p \beta_q|}$$

für alle $g \in \bigcup_{p,q} g_q^{-1} Q g_p$ hat; denn diese Menge ist in $\mathfrak{G}$ bikompakt. Hieraus ergibt sich für $g \in Q$

$$\left| \sum_{p,q} \beta_p \bar{\beta}_q \psi(g_q^{-1} g g_p) - \sum_{p,q} \beta_p \bar{\beta}_q \varphi'(g_q^{-1} g g_p) \right| < \varepsilon$$

bzw.

$$\left| \theta(g) - \sum_{p,q} \beta_p \bar{\beta}_q \varphi'(g_q^{-1} g g_p) \right| < 2\varepsilon. \tag{1}$$

Nun bleibt noch zu zeigen, daß man die Funktion

$$\varphi''(g) = \sum_{p,q} \beta_p \bar{\beta}_q \varphi'(g_q^{-1} g g_p)$$

aus $\mathfrak{A}_\varphi$ so wählen kann, daß $\varphi''(e) \leqq 1$ ist. Dazu genügt es, eine Menge Q zu nehmen, die e enthält. Die Ungleichung (1) gilt dann auch für $g = e$, d. h., es ist

$$|\theta(e) - \varphi''(e)| < 2\varepsilon.$$

Aus $\theta \prec \psi$ folgt $\theta(e) \leqq 1$, so daß sich $\varphi''(e) < 1 + 2\varepsilon$ ergibt. Man kann also die Funktion $\varphi''(g)$ durch $\frac{\varphi''(g)}{1+2\varepsilon}$ ersetzen.

Damit ist die Bedingung b) ebenfalls erfüllt.

Die Gesamtheit aller normierten elementaren positiv definiten Funktionen aus $\tilde{\mathfrak{A}}_{\varphi/\varphi(e)}$ heißt das *Spektrum* der Funktion $\varphi \in P$.

Theorem 4 (Godement [3]). *Jede Funktion* $\varphi \in P$ *läßt sich auf jeder bikompakten Menge durch trigonometrische Polynome aus Elementen des Spektrums von* φ *mit positiven Koeffizienten gleichmäßig approximieren.*

Beweis. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir $\varphi(e) = 1$ annehmen. Wenden wir Theorem 3 auf $\tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$ an, so erhalten wir, daß φ ein schwacher Häufungspunkt der Funktionen $\psi(g) = \sum_p \lambda_p \varphi_p(g)$ ist, wobei die Funktionen φ_p dem Spektrum der Funktion φ angehören und $\lambda_p \geqq 0$, $\sum_p \lambda_p \leqq 1$ ist. Wir müssen nun auf jeder bikompakten Menge die schwache Topologie durch die gleichmäßige ersetzen. Dazu berücksichtigen wir, daß für $y \in L^1(\mathfrak{G})$ die Funktion $\varphi_y(g)$ auf bikompakten Mengen durch die Funktionen $\psi_y(g) \in \tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$

gleichmäßig approximiert werden (vgl. den Beweis von Hilfssatz 1). Wegen $\psi(g) = \sum_p \lambda_p \varphi_p(g)$ ist $\psi_y(g) = \sum_p \lambda_p \varphi_{p,y}(g)$ mit $\varphi_{p,y} \in \tilde{\mathfrak{A}}_\varphi$. Es sei $g \to U_g$ eine unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$, für die $\varphi_p(g) = \langle U_g \xi_0, \xi_0 \rangle$ ist. Diese Darstellung ist irreduzibel, da $\varphi_p(g)$ eine elementare positiv definite Funktion ist. Daher ist $\varphi_{p,y} = \langle U_g A_y \xi_0, A_y \xi_0 \rangle$ ebenfalls elementar und positiv definit. Also gehört $\varphi_{p,y}$ zum Spektrum von φ, und $\psi_y(g)$ ist ein trigonometrisches Polynom mit positiven Koeffizienten λ_p. Wir brauchen nur noch zu bemerken, daß die Funktion φ durch die Funktionen $\varphi_y(g)$ auf $\mathfrak{G}$ gleichmäßig approximiert wird (vgl. den Schluß des Beweises von Hilfssatz 1).

Theorem 5 (Godement [3]). *Jede auf $\mathfrak{G}$ stetige Funktion läßt sich auf jeder bikompakten Menge durch trigonometrische Polynome gleichmäßig approximieren.*

Beweis. Es sei $f \in L(\mathfrak{G})$. Dann ist $f \cdot f^*$ eine positiv definite Funktion, die sich wegen Theorem 4 durch trigonometrische Polynome approximieren läßt. Für $f_1, f_2 \in L(\mathfrak{G})$ stellt die Funktion $f_1 \cdot f_2^*$ eine Linearkombination der Funktionen $(f_1 \pm f_2) \cdot (f_1 \pm f_2)^*$, $(f_1 \pm i f_2) \cdot (f_1 \pm i f_2)^*$ dar. Folglich läßt sich Theorem 4 auch auf die Funktion $f_1 \cdot f_2^*$ übertragen. Da die Funktion f auf $\mathfrak{G}$ durch die Funktionen $f_1 \cdot f$ gleichmäßig approximiert werden kann (vgl. § 28, Nr. 2, Bemerkung 2 zu Satz II), gilt Theorem 5 auch für alle Funktionen $f \in L(\mathfrak{G})$. Hieraus folgt schließlich, daß dieser Satz für alle stetigen Funktionen richtig ist; denn jede stetige Funktion f läßt sich auf bikompakten Mengen durch Funktionen aus $L(\mathfrak{G})$ gleichmäßig approximieren.

§ 31. Die harmonische Analyse auf einer kommutativen lokal bikompakten Gruppe

1. Die maximalen Ideale der Gruppenalgebra einer kommutativen Gruppe. Charaktere. Es sei jetzt $\mathfrak{G}$ eine kommutative lokal bikompakte Gruppe. Man sieht leicht, daß ihre Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$ ebenfalls kommutativ ist. Wir wollen nun alle maximalen Ideale von $R(\mathfrak{G})$ bestimmen. Eins dieser maximalen Ideale ist $M_0 = L^1(\mathfrak{G})$, aus dem sich $R(\mathfrak{G})$ durch Hinzufügen des Einselements ergibt. Wir bestimmen also alle maximalen Ideale $M \neq M_0$.

Ist $M \neq M_0$, so existiert eine Funktion $b \in L^1(\mathfrak{G})$ mit $b(M) \neq 0$. Durch Normieren können wir erreichen, daß $b(M) = 1$ ist. Wir setzen

$$b_{g_0}(g) = b(g_0^{-1} g)$$

und

$$\chi(g_0) = b_{g_0}(M). \tag{1}$$

Dann ist (vgl. § 11, Nr. 2, Satz I)

$$|\chi(g_0)| \leqq \| b_{g_0} \|_1 = \| b \|_1, \quad \chi(e) = 1. \tag{2}$$

Außerdem ist

$$b_{g_1} \cdot b_{g_2} = b \cdot b_{g_1 g_2}; \tag{3}$$

denn es gilt, da $\mathfrak{G}$ kommutativ ist,

$$(b_{g_1} \cdot b_{g_2})(g) = \int b_{g_1}(h)\, b_{g_2}(h^{-1}g)\, d\mu(h)$$
$$= \int b(g_1^{-1}h)\, b(g_2^{-1}h^{-1}g)\, d\mu(h)$$
$$= \int b(h)\, b(g_2^{-1}h^{-1}g_1^{-1}g)\, d\mu(h)$$
$$= \int b(h)\, b(g_2^{-1}g_1^{-1}h^{-1}g)\, d\mu(h)$$
$$= \int b(h)\, b_{g_1 g_2}(h^{-1}g)\, d\mu(h) = (b \cdot b_{g_1 g_2})(g).$$

Aus (3) folgt $b_{g_1}(M) b_{g_2}(M) = b(M) b_{g_1 g_2}(M) = b_{g_1 g_2}(M)$, also mit (1)

$$\chi(g_1)\,\chi(g_2) = \chi(g_1 g_2). \tag{4}$$

Wenden wir (2) auf g_0^n $(n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots)$ statt auf g_0 an, so erhalten wir $|\chi(g_0)|^n \leqq \|b\|_1$ für alle $n = \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots$. Dies ist aber nur für

$$|\chi(g)| = 1 \tag{5}$$

möglich. Schließlich folgt aus der Beziehung

$$|\chi(g) - \chi(g_0)| \leqq \|b_g - b_{g_0}\|_1 \to 0 \quad \text{für} \quad g \to g_0,$$

daß $\chi(g)$ eine auf $\mathfrak{G}$ gleichmäßig stetige Funktion ist.

Jede auf $\mathfrak{G}$ stetige Funktion $\chi(g)$, die den Bedingungen (4) und (5) genügt, heißt *Charakter* der Gruppe $\mathfrak{G}$. Offenbar ist ein Charakter eine unitäre, und zwar eindimensionale Darstellung von $\mathfrak{G}$.

Somit haben wir zu einem gegebenen maximalen Ideal $M \neq M_0$ einen Charakter $\chi(g)$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ konstruiert.

Wir zeigen jetzt, daß wir zu jedem Charakter ein Ideal M oder, was dasselbe ist, eine Funktion $x(M)$ aufstellen können. Es sei $a \in L^1(\mathfrak{G})$. Dann ist

$$(a \cdot b)(g) = \int a(g_1)\, b(g_1^{-1}g)\, d\mu(g_1) = \int a(g_1)\, b_{g_1}(g)\, d\mu(g_1),$$

d. h.

$$a \cdot b = \int a(g_1)\, b_{g_1}\, d\mu(g_1), \tag{6}$$

wobei das Integral in (6) im Sinne der Norm in $L^1(\mathfrak{G})$ konvergiert. Daraus folgt wegen der Stetigkeit des Homomorphismus $x \to x(M)$

$$a(M) = a(M)\, b(M) = \int a(g_1)\, b_{g_1}(M)\, d\mu(g_1) = \int a(g_1)\, \chi(g_1)\, d\mu(g_1).$$

Demnach ist für $x = \lambda e + a$

$$x(M) = (\lambda e + a)(M) = \lambda + \int a(g)\, \chi(g)\, d\mu(g). \tag{7}$$

Umgekehrt können wir unmittelbar zeigen, daß (7) für jeden Charakter $\chi(g)$ von $\mathfrak{G}$ einen Homomorphismus $x \to x(M)$ der Algebra $R(\mathfrak{G})$ in den Körper der komplexen Zahlen, d. h., ein maximales Ideal dieser Algebra bestimmt.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Theorem 1. *Es existiert eine eineindeutige Zuordnung zwischen der Gesamtheit aller maximalen Ideale* $M \neq L^1(\mathfrak{G})$ *der Gruppenalgebra* $R(\mathfrak{G})$ *einer kommutativen lokal bikompakten Gruppe* $\mathfrak{G}$ *und der Gesamtheit aller Charaktere von* $\mathfrak{G}$. *Diese Zuordnung wird ausgedrückt durch die Formel*

$$x(M) = (\lambda e + a)(M) = \lambda + \int a(g)\,\chi(g)\,d\mu(g).$$

Aus (7) folgt unmittelbar

$$\chi(g) = \frac{a_g(M)}{a(M)}$$

für jede Funktion $a \in L^1(\mathfrak{G})$ mit $a(M) \neq 0$.

Folgerung 1. *Die Gruppenalgebra einer kommutativen lokal bikompakten Gruppe ist vollsymmetrisch.*

Beweis. Aus (7) folgt nämlich $x^*(M) = \overline{x(M)}$ für jedes maximale Ideal M; denn es ist $\chi(g^{-1}) = \overline{\chi(g)}$.

In § 29, Nr. 4, Beispiel 3, sahen wir, daß für eine nichtkommutative Gruppenalgebra diese Behauptung im allgemeinen nicht gilt.

Folgerung 2. *Jede auf einer kommutativen lokal bikompakten Gruppe elementare normierte positiv definite Funktion ist ein Charakter dieser Gruppe.*

Beweis. Einer elementaren normierten positiv definiten Funktion $\varphi(g)$ entspricht ein elementares positives Funktional

$$f(\lambda e + a) = \lambda + \int a(g)\,\varphi(g)\,d\mu(g) \tag{8}$$

über $R(\mathfrak{G})$. Da $R(\mathfrak{G})$ kommutativ ist, wird dieses Funktional durch ein maximales Ideal[1]) M von $R(\mathfrak{G})$ mit Hilfe der Formel $f(\lambda e + a) = \lambda + a(M)$ definiert. Wegen (7) folgt hieraus $f(\lambda e + a) = \lambda + \int a(g)\,\chi(g)\,d\mu(g)$, und ein Vergleich mit (8) liefert $\varphi(g) = \chi(g)$.

Folgerung 3. *Für je zwei Elemente* $g_1 \neq g_2$ *der Gruppe* $\mathfrak{G}$ *existiert ein Charakter* χ_0 *mit* $\chi_0(g_1) \neq \chi_0(g_2)$.

Beweis. Diese Behauptung ist ein Spezialfall des allgemeinen Vollständigkeitssatzes (Theorem 2 aus § 29, Nr. 3) und läßt sich direkt folgendermaßen beweisen. Wir setzen $g_0 = g_2^{-1} g_1$; dann ist $g_0 \neq e$. Auf Grund des Urysohnschen Lemmas existiert eine Funktion $x(g) \in L(\mathfrak{G})$ mit der Eigenschaft $x(g_0) = 1$, $x(e) = 0$. Somit ist, wenn wir $x_{g_0}(g) = x(g_0^{-1} g)$ setzen, $x_{g_0} \neq x$. Da $R(\mathfrak{G})$ eine halbeinfache Algebra ist (vgl. § 28, Nr. 2, Satz VII), gibt es ein maximales Ideal M_0 von $R(\mathfrak{G})$ mit $x_{g_0}(M_0) \neq x(M_0)$. Setzen wir $x^\wedge(\chi) = \int x(g)\chi(g)\,d\mu(g)$, so folgt $x_{g_0}^\wedge(\chi_0) \neq x^\wedge(\chi_0)$, also $\chi_0(g_0)x^\wedge(\chi_0) \neq x^\wedge(\chi_0)$, wobei χ_0 der dem Ideal M_0 entsprechende Charakter von $\mathfrak{G}$ ist. Hieraus ergibt sich $\chi_0(g_0) \neq 1$, also $\chi_0(g_2^{-1} g_1) \neq 1$ und somit $\chi_0(g_1) \neq \chi_0(g_2)$.

Folgerung 4. *Jede auf einer kommutativen lokal bikompakten Gruppe* $\mathfrak{G}$ *stetige Funktion* $f(g)$ *läßt sich auf jeder bikompakten Menge durch Linearkombinationen der Charaktere von* $\mathfrak{G}$ *gleichmäßig approximieren.*

---

[1]) Vgl. die Bemerkung zu Theorem 3 aus § 20, Nr. 2.

Dies ergibt sich unmittelbar aus der Folgerung 2 und aus § 30, Nr. 5, Theorem 5, aber auch aus dem STONEschen Satz (vgl. § 2, Nr. 10), denn auf Grund von Folgerung 3 bilden die Linearkombinationen der Charaktere eine symmetrische Algebra von Funktionen, die die Punkte von $\mathfrak{G}$ trennen.

Beispiele. 1. Es sei $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe der reellen Zahlen t, $-\infty < t < \infty$. Dann sind die stetigen Funktionen $\chi(g) = \chi(t)$, die den Bedingungen

$$\chi(t_1 + t_2) = \chi(t_1)\,\chi(t_2), \quad |\chi(t)| = 1$$

genügen, die Charaktere. Wie man leicht sieht, muß eine stetige Funktion $\chi(t)$, die diese Bedingungen erfüllt, die Gestalt

$$\chi(t) = e^{it\alpha}$$

haben, wobei α eine beliebige reelle Zahl ist. Die Algebra $L^1(\mathfrak{G})$ ist in diesem Fall die Algebra $L^1(-\infty, \infty)$ aller summierbaren meßbaren Funktionen $a(t)$; dabei ist

$$\|a\|_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |a(t)|\,dt, \quad (a \cdot b)(t) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t_1)\,b(t - t_1)\,dt_1,$$

$$a^*(t) = \overline{a(-t)}.$$

Theorem 1 behauptet, daß in diesem Fall jedes von $M_0 = L^1(-\infty, \infty)$ verschiedene maximale Ideal M der Algebra $R(\mathfrak{G})$ durch die Formel

$$x(M) = (\lambda e + a)(M) = \lambda + \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\,e^{it\alpha}\,dt$$

definiert wird. Insbesondere ist

$$a(M) = \int_{-\infty}^{\infty} a(t)\,e^{it\alpha}\,dt,$$

so daß der Übergang von $a(t)$ zu $a(M)$ in diesem Fall eine FOURIERtransformation ist. Daher läßt sich der Übergang von $a(g)$ zu $a(M)$ im Fall einer beliebigen kommutativen lokal bikompakten Gruppe als verallgemeinerte FOURIERtransformation ansehen.

Wenden wir die Folgerung 3 auf die additive Gruppe der reellen Zahlen an, so finden wir den folgenden Satz:

Jede stetige Funktion $f(t)$, $-\infty < t < \infty$, läßt sich auf jedem endlichen Intervall durch Linearkombinationen der Funktionen $e^{it\alpha}$ gleichmäßig approximieren.

2. Es sei $\mathfrak{G}$ die additive (diskrete) Gruppe der ganzen Zahlen $n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$. Die Funktionen $\chi(g) = \chi(n)$, die den Bedingungen

$$\chi(n_1 + n_2) = \chi(n_1)\,\chi(n_2), \quad |\chi(n)| = 1$$

genügen, sind die Charaktere. Setzen wir $\chi(1) = e^{i\alpha}$, so sehen wir leicht, daß $\chi(n) = e^{in\alpha}$ ist; dabei ist α bis auf ein additives Vielfaches von 2π bestimmt.

Die Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$ ist in diesem Fall die Gesamtheit aller Folgen $\{a_n\}$, für die

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n| < \infty$$

gilt, wobei

$$(a \cdot b)_n = \sum_{p=-\infty}^{\infty} a_p b_{n-p}, \quad (a^*)_n = \bar{a}_{-n}, \quad \|a\|_1 = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |a_n|$$

ist. Theorem 1 besagt, daß alle maximalen Ideale dieser Algebra durch die Formel

$$a(M) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n e^{in\alpha}$$

definiert werden. (Dies läßt sich übrigens auch unmittelbar zeigen.)

3. Es sei $\mathfrak{G}$ die Drehungsgruppe des Kreises. Dann sind alle möglichen Charaktere von $\mathfrak{G}$ durch die Formel

$$\chi(t) = e^{int} \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots; \quad 0 \leqq t \leqq 2\pi)$$

gegeben. Wenden wir auf diese Gruppe die Folgerung 3 an, so erhalten wir den Satz:

Jede stetige Funktion $f(t)$, $0 \leqq t \leqq 2\pi$, die der Bedingung $f(0) = f(2\pi)$ genügt, kann im Intervall $[0, 2\pi]$ durch Linearkombinationen der Funktionen e^{int} $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ gleichmäßig approximiert werden.

2. Die Gruppe der Charaktere. Sind χ_1, χ_2 zwei Charaktere der Gruppe $\mathfrak{G}$, so definiert die Formel $\chi(g) = \chi_1(g)\,\chi_2(g)$ einen Charakter χ von $\mathfrak{G}$. Diesen nennt man das *Produkt* der Charaktere χ_1, χ_2 und bezeichnet ihn mit $\chi_1\chi_2$. Somit ist die Gesamtheit $\overline{\mathfrak{G}}$ aller Charaktere von $\mathfrak{G}$ eine kommutative Gruppe, die Gruppe der Charaktere von $\mathfrak{G}$.

Es sei $\mathfrak{M}$ der Raum der maximalen Ideale der Algebra $R(\mathfrak{G})$. In Nr. 1 zeigten wir, daß eine eineindeutige Zuordnung zwischen den Charakteren $\chi \in \overline{\mathfrak{G}}$ und den maximalen Idealen $M \neq M_0$ von $R(\mathfrak{G})$ existiert. Diese erlaubt uns, auf $\overline{\mathfrak{G}}$ die Topologie des lokal bikompakten Raumes $\mathfrak{M} - M_0$ zu übertragen, wobei wir als Umgebungen in $\overline{\mathfrak{G}}$ die Bilder der Umgebungen in $\mathfrak{M} - M_0$ bei der Abbildung $M \to \chi$ einführen. Dann ist $\overline{\mathfrak{G}}$ ein lokal bikompakter Raum. Wir weisen darauf hin, daß nach Definition der Umgebungen in $\mathfrak{M}$ als Umgebung des Charakters $\chi_1 \in \overline{\mathfrak{G}}$ die Gesamtheit aller Charaktere χ zu nehmen ist, die den Bedingungen

$$|x_k(M) - x_k(M_1)| = \left| \int a_k(g)\,(\chi(g) - \chi_1(g))\,d\mu(g) \right| < \varepsilon \tag{1}$$

$(x_k = \lambda_k e + a_k)$ für feste $a_1, \ldots, a_n \in L^1(\mathfrak{G})$ genügen. Diese Umgebungen bilden eine Basis in $\overline{\mathfrak{G}}$.

I. *$\chi(g)$ ist eine in den beiden Veränderlichen $g \in \mathfrak{G}$ und $\chi \in \overline{\mathfrak{G}}$ gleichzeitig stetige Funktion.*

Beweis. Es sei χ_1 ein beliebiger Charakter der Gruppe $\mathfrak{G}$ und M_1 das ihm entsprechende maximale Ideal. Wegen $M_1 \neq M_0$ existiert ein $a(g) \in L^1(\mathfrak{G})$ mit $a(M_1) \neq 0$. Die Ungleichung

$$\begin{aligned} |a_{g_1}(M) - a_{g_2}(M_1)| &\leqq |a_{g_1}(M) - a_{g_2}(M)| + |a_{g_2}(M) - a_{g_2}(M_1)| \\ &\leqq \|a_{g_1} - a_{g_2}\|_1 + |a_{g_2}(M) - a_{g_2}(M_1)| \end{aligned}$$

besagt, daß $a_g(M)$ eine in den Veränderlichen $g \in \mathfrak{G}$ und $M \in \mathfrak{M} - M_0$ gleichzeitig stetige Funktion ist. Folglich ist auch $\chi(g) = \dfrac{a_g(M)}{a(M)}$ eine stetige Funktion der Veränderlichen g und M oder, was dasselbe ist, der Veränderlichen g und χ in einem Punkt (g_1, χ_1).

II. *Die Topologie in $\overline{\mathfrak{G}}$ stimmt mit der Topologie der gleichmäßigen Konvergenz auf bikompakten Mengen überein.*

Beweis. Der Satz besagt, daß die Mengen $U(\chi_0; Q; \varepsilon)$ der Charaktere χ, die der Bedingung $|\chi(g) - \chi_0(g)| < \varepsilon$ für $g \in Q$ (Q bikompakt) genügen, a) offen sind und b) eine Basis in $\overline{\mathfrak{G}}$ bilden.

Die Behauptung a) folgt unmittelbar aus § 2, Nr. 12, Satz V. Zum Beweis von b) betrachten wir die durch die Gleichungen (1) definierte Umgebung $U(\chi_1; a_1, \ldots, a_n; \varepsilon)$. Wählen wir eine bikompakte Menge Q derart, daß

$$\int\limits_{\mathfrak{G}-Q} |a_k(g)|\, d\mu(g) < \frac{\varepsilon}{4} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

ist, und wählen wir

$$\delta < \frac{\varepsilon}{2\|a_k\|_1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

so erhalten wir für $\chi \in U(\chi_0;\ Q;\ \delta)$

$$\begin{aligned} &\left| \int a_k(g) (\chi(g) - \chi_0(g))\, d\mu(g) \right| \\ &\leqq \int\limits_Q |a_k(g)|\, |\chi(g) - \chi_0(g)|\, d\mu(g) + \int\limits_{\mathfrak{G}-Q} |a_k(g)|\, |\chi(g) - \chi_0(g)|\, d\mu(g) \\ &< \delta \|a_k\|_1 + 2\frac{\varepsilon}{4} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Also ist $U(\chi_0; Q; \delta) \subset U(\chi_0; a_1, \ldots, a_n; \varepsilon)$, womit b) bewiesen ist.

III. *Mit der oben in $\overline{\mathfrak{G}}$ definierten Topologie ist $\overline{\mathfrak{G}}$ eine topologische Gruppe.*

Beweis. Für $\chi \in U\left(\chi_0;\ Q; \frac{\varepsilon}{2}\right)$, $\chi' \in U\left(\chi_0'; Q; \frac{\varepsilon}{2}\right)$ und $g \in Q$ ist

$$\begin{aligned} |\chi(g)\chi'(g) - \chi_0(g)\chi_0'(g)| &\leqq |\chi(g) - \chi_0(g)|\, |\chi'(g)| + |\chi'(g) - \chi_0'(g)|\, |\chi_0(g)| \\ &= |\chi(g) - \chi_0(g)| + |\chi'(g) - \chi_0'(g)| < \varepsilon, \end{aligned}$$

also $\chi\chi' \in U(\chi_0\chi_0'; Q; \varepsilon)$. D. h., das Produkt $\chi\chi'$ und auch der Übergang zum inversen Charakter $\chi^{-1}(g) = \overline{\chi(g)}$ sind stetig.

Im folgenden werden wir somit unter der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ der Charaktere stets die so erklärte topologische Gruppe verstehen.

3. Positiv definite Funktionen auf einer kommutativen Gruppe. Es sei $\varphi(g)$ eine positiv definite Funktion auf einer kommutativen lokal bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$. Nach § 30, Nr. 2, Theorem 2, entspricht dieser Funktion ein reguläres positives Funktional

$$f(\lambda e + a) = \lambda \varphi(e) + \int a(g)\, \varphi(g)\, d\mu(g) \tag{1}$$

über der Algebra $R(\mathfrak{G})$. Andererseits läßt sich dieses positive Funktional eindeutig in der Gestalt

$$f(x) = \int x(M)\, d\sigma(M) \tag{2}$$

darstellen, wobei σ das durch das Funktional $f(x)$ definierte Maß auf $\mathfrak{M}$ ist (vgl. § 20, Nr. 4, Folgerung 1). Dabei ist $\sigma(M_0) = 0$ (wie im vorhergehenden bezeichnet M_0 das Ideal $L^1(\mathfrak{G})$ von $R(\mathfrak{G})$); denn wäre $\sigma(M_0) > 0$, so würden wir, wenn wir der Formel (2) die Gestalt

$$f(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}-M_0} x(M)\, d\sigma(M) + x(M_0)\, \sigma(M_0)$$

geben, erhalten, daß das erzeugende Funktional $f_0(x) = x(M_0) = \lambda$ für $x = \lambda e + a$, $a \in L^1(\mathfrak{G})$, dem Funktional $f(x)$ untergeordnet ist; das ist jedoch nicht möglich, da $f(x)$ regulär ist. Somit hat (2) die Form

$$f(x) = \int\limits_{\mathfrak{M}'} x(M)\, d\sigma(M) \tag{2'}$$

mit $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - M_0$. Wegen der in Nr. 1 angegebenen Zuordnung $M \leftrightarrow \chi$ können wir σ auch als Maß auf $\overline{\mathfrak{G}}$ betrachten. Es ist für $x = \lambda e + a$

$$x(M) = \lambda + \int a(g)\, \chi(g)\, d\mu(g).$$

Setzen wir diesen Ausdruck in (2′) ein und vergleichen wir das Ergebnis mit (1), so gelangen wir zu der Beziehung

$$\lambda \varphi(e) + \int a(g)\, \varphi(g)\, d\mu(g) = \lambda \sigma(\overline{\mathfrak{G}}) + \int \Big(\int a(g)\, \chi(g)\, d\mu(g) \Big)\, d\sigma(\chi),$$

woraus sich

$$\sigma(\overline{\mathfrak{G}}) = \varphi(e)$$

und

$$\int a(g)\, \varphi(g)\, d\mu(g) = \int \Big(\int a(g)\, \chi(g)\, d\mu(g) \Big)\, d\sigma(\chi) \tag{3}$$

ergibt. Da wir auf der rechten Seite von (3) die Reihenfolge der Integration vertauschen können, die Funktion $a(g) \in L^1(\mathfrak{G})$ beliebig ist und die Funktionen $\chi(g)$ und $\int \chi(g)\, d\sigma(\chi)$ stetig sind, finden wir schließlich die Gleichung

$$\varphi(g) = \int \chi(g)\, d\sigma(\chi).$$

Umgekehrt sehen wir leicht, daß jede durch diese Formel definierte Funktion $\varphi(g)$ positiv definit ist. Diese Überlegungen führen uns auf folgenden Satz:

Theorem 2 (Raikow [3]). *Jede auf einer kommutativen lokal bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$ stetige positiv definite Funktion $\varphi(g)$ läßt sich durch eine Formel der Gestalt*

$$\varphi(g) = \int \chi(g)\, d\sigma(\chi) \tag{4}$$

eindeutig darstellen. Dabei ist σ ein Maß auf $\overline{\mathfrak{G}}$, das der Bedingung

$$\sigma(\overline{\mathfrak{G}}) = \varphi(e)$$

genügt. Umgekehrt definiert die Formel (4) für jedes Maß σ auf $\overline{\mathfrak{G}}$, das der Bedingung $\sigma(\overline{\mathfrak{G}}) < \infty$ genügt, eine auf $\mathfrak{G}$ stetige positiv definite Funktion $\varphi(g)$.

Beispiele. 1. Es sei $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe der reellen Zahlen. Stetige positiv definite Funktionen auf $\mathfrak{G}$ sind in diesem Fall die stetigen Funktionen $\varphi(t)$, $-\infty < t < \infty$, die der Bedingung

$$\sum_{p,q=1}^{n} \varphi(t_p - t_q)\, \lambda_p \overline{\lambda}_q \geqq 0 \tag{5}$$

für alle reellen $t_1, \ldots, t_n$ und komplexen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ genügen. In diesem Fall ist $\overline{\mathfrak{G}}$ ebenfalls die additive Gruppe der reellen Zahlen, wobei χ und α durch die Formel $\chi(t) = e^{it\alpha}$ einander zugeordnet werden. Mit Theorem 2 gelangen wir zu dem folgenden Satz (Bochner [1]).

Jede stetige Funktion $\varphi(t)$, die der Bedingung (5) genügt, läßt sich in der Form

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{it\alpha}\, d\sigma(\alpha)$$

darstellen; dabei ist σ ein Maß auf der Zahlengeraden, das die Forderung $\sigma(-\infty, \infty) = \varphi(0)$ erfüllt.

2. Es sei $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe der ganzen Zahlen. Positiv definite Funktionen auf $\mathfrak{G}$ sind in diesem Fall die Folgen $\varphi(n) = \varphi_n$, die der Bedingung

$$\sum_{p,q=-n}^{n} \varphi_{p-q}\, \lambda_p \overline{\lambda}_q \geqq 0 \tag{6}$$

für alle komplexen λ_r $(r = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm n)$ und alle n genügen. Hier können wir $\overline{\mathfrak{G}}$ mit den Punkten des Einheitskreises oder mit den Punkten α des Intervalls $[0, 2\pi)$ identifizieren, wobei χ und α einander durch die Formel

$$\chi(n) = e^{in\alpha}$$

zugeordnet werden. Mit Theorem 2 erhalten wir für φ_n eine Darstellung der Form

$$\varphi_n = \int_0^{2\pi} e^{in\alpha}\, d\sigma(\alpha). \tag{7}$$

Die Aufgabe, zu einer gegebenen Folge φ_n, deren Glieder die Bedingung (7) erfüllen, das Maß σ zu bestimmen, heißt *trigonometrisches Momentenproblem.* Somit führt die Anwendung von Theorem 2 auf den Satz von Herglotz [1]:

Das trigonometrische Momentenproblem ist für eine gegebene Folge φ_n genau dann lösbar, wenn diese Folge der Beziehung (6) genügt.

4. Die Umkehrformel und der Plancherelsche Satz für eine kommutative Gruppe. Wir bezeichnen mit $P = P(\mathfrak{G})$ die Gesamtheit aller auf einer gegebenen kommutativen lokal bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$ stetigen positiv definiten Funktionen und mit $[L^1 \cap P]$ die lineare Hülle der Funktionen aus $L^1 \cap P$, wobei $L^1 = L^1(\mathfrak{G})$ ist.

Hilfssatz. *Die lineare Hülle $[L^1 \cap P]$ ist in $L^1 = L^1(\mathfrak{G})$ und in $L^2 = L^2(\mathfrak{G})$ dicht.*

Beweis. Wir setzen $L = L(\mathfrak{G})$. Die Funktionen der Gestalt $y^* \cdot x$, $x, y \in L$, bilden eine in L im Sinne der Norm von L^1 dichte Menge (vgl. § 28, Nr. 2, Satz II). Sie sind dann auch in L^1 dicht, da L in L^1 dicht ist. Andererseits ist $y^* \cdot x$ die Linearkombination der vier positiv definiten Funktionen $(x \pm y)^* \cdot (x \pm y)$, $(x \pm iy)^* \cdot (x \pm iy)$ und gehört somit zu $[L^1 \cap P]$; folglich

ist $[L^1 \cap P]$ dicht in L^1. Analog können wir beweisen, daß $[L^1 \cap P]$ in L^2 dicht ist.

Wir setzen jetzt

$$x^\wedge(\chi) = \int x(g)\,\chi(g)\,d\mu(g) \tag{1}$$

für jede Funktion $x(g) \in L^1$ und jeden Charakter $\chi \in \overline{\mathfrak{G}}$. Dieses Integral existiert und stellt eine auf der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ stetige Funktion $x^\wedge(\chi)$ dar. Die Funktion $x^\wedge(\chi)$ ist die FOURIER*transformierte* von $x(g) \in L^1$. Auf Grund der Resultate aus Nr. 1 ist $x^\wedge(\chi)$ gleich $x(M)$, wobei M das maximale Ideal der Algebra $R(\mathfrak{G})$ ist, das dem Charakter χ entspricht. Hieraus folgt

$$(x_1 + x_2)^\wedge(\chi) = x_1^\wedge(\chi) + x_2^\wedge(\chi), \quad (\lambda x)^\wedge(\chi) = \lambda x^\wedge(\chi),$$

$$(x^{*\wedge})(\chi) = \overline{x^\wedge(\chi)}, \quad (x_1 \cdot x_2)^\wedge(\chi) = x_1^\wedge(\chi)\, x_2^\wedge(\chi)$$

und insbesondere

$$(x^* \cdot x)^\wedge(\chi) = |x^\wedge(\chi)|^2.$$

Die Richtigkeit dieser Formeln läßt sich übrigens unmittelbar nachweisen.

Ist $\mathfrak{G}$ die additive Gruppe der reellen Zahlen t, so ist $\chi(g) = \chi(t) = e^{it\alpha}$, und Formel (1) geht über in die gewöhnliche FOURIERtransformation

$$x^\wedge(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{it\alpha}\, dt.$$

Wir bezeichnen nun mit $\mu(\chi)$ das invariante Maß auf der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ und mit $L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ den Raum der auf $\overline{\mathfrak{G}}$ bezüglich $\mu(\chi)$ summierbaren Funktionen. Der folgende Satz (der verallgemeinerte klassische Satz über das FOURIERintegral) zeigt, wie die Funktion $x(g)$ durch ihre FOURIERtransformierte $x^\wedge(\chi)$ ausgedrückt werden kann.

Theorem 3. *Ist $x(g)$ in $[L^1 \cap P]$ enthalten, so ist $x^\wedge(\chi) \in L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ und*

$$x(g) = \int x^\wedge(\chi)\, \overline{\chi(g)}\, d\mu(\chi),$$

wobei $\mu(\chi)$ das passend normierte invariante Maß auf $\overline{\mathfrak{G}}$ ist.

Beweis. Wir bezeichnen mit I die Gesamtheit aller Funktionen $x(g) \in L^1$, die auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ gleichmäßig stetig sind; I ist, wie wir leicht sehen, ein Ideal von $L^1(\mathfrak{G})$. In I definieren wir ein lineares Funktional

$$f(x) = x(e) \quad \text{für} \quad x \in I.$$

Dieses Funktional ist auf I positiv, denn für $x = y^* \cdot y$, $y \in I$, ist

$$x(g) = \int \overline{y(g_1)}\, y(g_1 g)\, d\mu(g_1)$$

und daher

$$x(e) = \int |y(g_1)|^2\, d\mu(g_1) \geqq 0.$$

Auf $f(x)$ können wir nun Theorem 5 aus § 20, Nr. 4, anwenden, denn $L^1(\mathfrak{G})$ ist eine vollsymmetrische kommutative Algebra (vgl. Nr. 1, Folgerung 1)

und I dicht in $L^1(\mathfrak{G})$. Auf Grund dieser Folgerung gibt es auf $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - M_0$ und somit auch auf $\overline{\mathfrak{G}}$ ein Maß μ derart, daß $p^\wedge \in L^1(\mathfrak{G})$ und

$$f(px) = \int p^\wedge(\chi)\, x^\wedge(\chi)\, d\mu(\chi) \tag{2}$$

für jede bezüglich $f(x)$ positive Funktion $p(g) \in I$ ist. Diese Eigenschaft hat jede Funktion aus $L^1 \cap P$, denn für $p \in L^1 \cap P$ ist

$$\begin{aligned} f(px^*x) &= \int\int p(g')\,\overline{x(g^{-1}g')}\,x(g^{-1})\,d\mu(g')\,d\mu(g) \\ &= \int\int p(gg')\,\overline{x(g')}\,x(g^{-1})\,d\mu(g')\,d\mu(g) \\ &= \int\int \overline{x(g')}\,x(g)\,p(g^{-1}g')\,d\mu(g')\,d\mu(g) \\ &= \int\int \overline{x(g')}\,x(gg')\,p(g^{-1})\,d\mu(g')\,d\mu(g) \geqq 0, \end{aligned}$$

denn mit $p(g)$ ist auch $p(g^{-1}) = p^*(g)$ eine positiv definite, also integraldefinite Funktion (vgl. § 30, Nr. 2, Satz IV). Daher gilt (2) für jede Funktion $p \in L^1 \cap P$ und somit auch für jedes $p \in [L^1 \cap P]$. Setzen wir in (2) x^* statt x und die Ausdrücke für $f(px^*)$ und $x^{*\wedge}(\chi) = \overline{x^\wedge(\chi)}$ ein und ändern wir auf der rechten Seite von (2) die Reihenfolge der Integration, so erhalten wir

$$\int p(g)\,\overline{x(g)}\,d\mu(g) = \int \overline{x(g)} \left(\int p^\wedge(\chi)\,\overline{\chi(g)}\,d\mu(\chi)\right) d\mu(g).$$

Hieraus folgt, da die Funktion $x(g) \in L^1$ beliebig ist,

$$p(g) = \int p^\wedge(\chi)\,\overline{\chi(g)}\,d\mu(\chi).$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $d\mu(\chi)$ ein invariantes Maß auf $\overline{\mathfrak{G}}$ ist. Dazu bemerken wir, daß für $p \in L^1 \cap P$ und $\chi_0 \in \overline{\mathfrak{G}}$ auch $p(g)\chi_0(g) \in L^1 \cap P$ ist; die FOURIERtransformierte dieser Funktion lautet

$$\int p(g)\,\chi_0(g)\,\chi(g)\,d\mu(g) = \int p(g)\,(\chi\chi_0)(g)\,d\mu(g) = p^\wedge(\chi\chi_0).$$

Hiermit ergibt sich

$$\int p^\wedge(\chi)\,d\mu(\chi) = p(e) = p(e)\,\chi_0(e) = \int p^\wedge(\chi\chi_0)\,d\mu(\chi). \tag{3}$$

Da die Funktionen $p \in [L^1 \cap P]$ eine in L^1 dichte Menge bilden, ist die von den FOURIERtransformierten $p^\wedge$ in $C_0(\overline{\mathfrak{G}})$ gebildete Menge ebenfalls dicht (vgl. § 14, Nr. 3, Folgerung 3). Aus (3) folgt also die Invarianz des Maßes $d\mu(\chi)$ auf $\overline{\mathfrak{G}}$. Damit ist das Theorem bewiesen.

Folgerung 1. *Für $p(g) \in L^1 \cap P$ gilt $p^\wedge(\chi) \geqq 0$.*

Beweis. Für $p \in L^1 \cap P$ ist nach Theorem 3 auch $p^\wedge(\chi) \in L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ und $p(g) = \int \overline{\chi(g)}\,p^\wedge(\chi)\,d\mu(\chi)$; daher gilt für jede Funktion $x(g) \in L^1(\mathfrak{G})$

$$\begin{aligned} \int x(g)\,p(g)\,d\mu(g) &= \int \left(\int x(g)\,\overline{\chi(g)}\,d\mu(g)\right) p^\wedge(\chi)\,d\mu(\chi) \\ &= \int x^\wedge(\overline{\chi})\,p^\wedge(\chi)\,d\mu(\chi) \\ &= \int x^\wedge(\chi)\,p^\wedge(\overline{\chi})\,d\mu(\chi). \end{aligned}$$

Ersetzen wir hier x durch x^*x, so erhalten wir

$$\int |x^\wedge(\chi)|^2 p^\wedge(\overline{\chi})\, d\mu(\chi) \geqq 0; \tag{4}$$

denn $f(x) = \int x(g)p(g)\,d\mu(g)$ ist ein positives Funktional über $L^1(\mathfrak{G})$ (vgl. § 30, Nr. 2, Theorem 2). Die Funktionen $x^\wedge(\chi)$, $x \in L^1(\mathfrak{G})$, bilden eine in $C_0(\overline{\mathfrak{G}})$ dichte Menge; aus (4) folgt daher $\int \varphi(\chi)p^\wedge(\overline{\chi})\,d\mu(\chi) \geqq 0$ für jede nichtnegative Funktion $\varphi(\chi) \in C_0(\overline{\mathfrak{G}})$. Dies ist nur für $p^\wedge(\chi) \geqq 0$ möglich.

Folgerung 2. *Ist $f(\chi) \in L^1(\overline{\mathfrak{G}})$, $f(\chi) \geqq 0$, und gehört die Funktion*

$$x(g) = \int \overline{\chi(g)} f(\chi)\, d\mu(\chi)$$

der Menge $L^1(\mathfrak{G})$ an, so gilt fast überall auf $\overline{\mathfrak{G}}$

$$f(\chi) = \int x(g)\,\chi(g)\, d\mu(g) = x^\wedge(\chi).$$

Beweis. Nach Nr. 3, Theorem 2, liegt $x(g)$ in P, also auch in $L^1 \cap P$. Infolge Theorem 3 ist

$$x(g) = \int \overline{\chi(g)}\, x^\wedge(\chi)\, d\mu(\chi),$$

so daß wegen der Voraussetzung die Beziehung

$$\int \overline{\chi(g)} f(\chi)\, d\mu(\chi) = \int \overline{\chi(g)}\, x^\wedge(\chi)\, d\mu(\chi)$$

gilt. Hieraus ergibt sich für jede Funktion $y(g) \in L^1(\mathfrak{G})$

$$\begin{aligned}\int y^\wedge(\overline{\chi}) f(\chi)\, d\mu(\chi) &= \int \Big(\int y(g)\overline{\chi(g)}\, d\mu(g)\Big) f(\chi)\, d\mu(\chi)\\ &= \int y(g) \Big(\int \overline{\chi(g)} f(\chi)\, d\mu(\chi)\Big) d\mu(g)\\ &= \int y(g) \Big(\int \overline{\chi(g)}\, x^\wedge(\chi)\, d\mu(\chi)\Big) d\mu(g)\\ &= \int y^\wedge(\overline{\chi})\, x^\wedge(\chi)\, d\mu(\chi).\end{aligned}$$

Aus dieser Formel ist ersichtlich, daß $f(\chi) = x^\wedge(\chi)$ fast überall auf $\overline{\mathfrak{G}}$ gilt, denn die Funktionen $y^\wedge(\overline{\chi})$ bilden eine in $C_0(\overline{\mathfrak{G}})$ dichte Menge.

Theorem 4. *Die FOURIERtransformation $x \to x^\wedge$ ist eine isometrische Abbildung einer in $L^2(\mathfrak{G})$ dichten Menge auf eine in $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ dichte Menge und läßt sich deshalb eindeutig zu einer isometrischen Abbildung von $L^2(\mathfrak{G})$ auf $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ fortsetzen.*

Beweis. Es mögen I, $f(x)$ und P dieselbe Bedeutung haben wie oben. Setzen wir in (2) $x = q^*$ mit $q \in [L^1 \cap P]$, so erhalten wir

$$\int p(g)\overline{q(g)}\, d\mu(g) = f(pq^*) = \int p^\wedge(\chi)\overline{q^\wedge(\chi)}\, d\mu(\chi);$$

folglich ist die FOURIERtransformation $p \to p^\wedge$ eine isometrische Abbildung der Teilmenge $[L^1 \cap P]$ des Raumes $L^2(\mathfrak{G})$ in den Raum $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$. Da $[L^1 \cap P]$ in $L^2(\mathfrak{G})$ dicht ist, läßt sich diese Abbildung eindeutig zu einem isometrischen Operator T fortsetzen, der $L^2(\mathfrak{G})$ in den Raum $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ abbildet.

Es bleibt zu zeigen, daß T den Raum $L^2(\mathfrak{G})$ auch *auf* den Raum $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ abbildet. Das ist der Fall, wenn das Bild von $L^2(\mathfrak{G})$ bei der Abbildung T in $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ dicht ist. Dazu bestimmen wir den Operator T^*. Es sei

$$f = f(\chi) \in L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}}) \quad \text{und} \quad x(g) \in L^1(\mathfrak{G}) \cap L^2(\mathfrak{G}).$$

Setzen wir $f' = T^*f$, so ist $\langle Tx, f\rangle = \langle x, f'\rangle$, d. h.

$$\int\int x(g)\,\chi(g)\,\overline{f(\chi)}\,d\mu(g)\,d\mu(\chi) = \int x(g)\,\overline{f'(g)}\,d\mu(g).$$

Daraus folgt
$$f'(g) = T^*f(\chi) = \int f(\chi)\,\overline{\chi(g)}\,d\mu(\chi). \tag{5}$$

Wir setzen jetzt $f, \varphi \in L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ mit $f \geqq 0$ und $\varphi \geqq 0$ voraus. Dann liegt $f \cdot \varphi$ ebenfalls in $L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ (vgl. § 28, Nr. 2, Satz VI), und aus Formel (5) folgt sofort[1])

$$T^*(f \cdot \varphi) = f'\varphi' \in L^1(\mathfrak{G}) \cap L^2(\mathfrak{G}),$$

denn es ist $f' = T^*f \in L^2(\mathfrak{G})$, $\varphi' = T^*\varphi \in L^2(\mathfrak{G})$. Außerdem ist $f \cdot \varphi \in L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ und $f \cdot \varphi \geqq 0$. Damit ergibt sich auf Grund der Folgerung 2, daß $f \cdot \varphi = T(f'\varphi')$ in $TL^2(\mathfrak{G})$ enthalten ist.

Es seien nun f und φ beliebige Funktionen aus $L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}})$. Jede von ihnen läßt sich als Linearkombination von vier nichtnegativen Funktionen $f_j, \varphi_j \in L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}})$, die Funktion $f \cdot \varphi$ folglich als Linearkombination von 16 nichtnegativen Funktionen $f_j \cdot \varphi_k$ darstellen, die auf Grund des Vorhergehenden zu $TL^2(\mathfrak{G})$ gehören. Also liegt $f \cdot \varphi$ ebenfalls in $TL^2(\mathfrak{G})$. Da die Funktionen $f \cdot \varphi$ eine in $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ dichte Menge bilden (vgl. § 28, Nr. 2, Bemerkung 1), ist $TL^2(\mathfrak{G})$ in $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ dicht. Damit ist das Theorem vollständig bewiesen.

Wir weisen darauf hin, daß die Gleichung $TL^2(\mathfrak{G}) = L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ auch eine Folgerung des kontinuierlichen Analogons des SCHURschen Lemmas ist (vgl. § 26, Nr. 5).

Theorem 4 verallgemeinert den PLANCHERELschen Satz über das klassische FOURIERsche Integral und wird deshalb der PLANCHERELsche Satz für die kommutative Gruppe $\mathfrak{G}$ genannt.

Folgerung 3. *Die Mengen S_1 und S_2 aller Funktionen $x(g)$ aus $L^1(\mathfrak{G})$ bzw. $L^2(\mathfrak{G})$, für welche $x^\wedge(\chi)$ außerhalb einer bikompakten Menge verschwindet, sind in $L^1(\mathfrak{G})$ bzw. $L^2(\mathfrak{G})$ dicht.*

Beweis. Die Menge S_2 enthält das Urbild der in $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ dichten Menge $L(\overline{\mathfrak{G}})$ bei der isometrischen Abbildung T. Folglich ist S_2 in $L^2(\mathfrak{G})$ dicht.

Für $x \in L^1(\mathfrak{G})$ ist $x = yz$ mit $y, z \in L^2(\mathfrak{G})$.[2]) Folglich existieren Elemente

---

[1]) In diesem Paragraphen bezeichnet $f \cdot \varphi$ die *Faltung* und $f'\varphi'$ das *Produkt* der Funktionen f und φ.

[2]) Beispielsweise können wir

$$y = |x|^{1/2}, \quad z = \begin{cases} 0 & \text{für } x = 0, \\ |x|^{-1/2}x & \text{für } x \neq 0 \end{cases}$$

setzen.

$y_1, z_1 \in S_2$ derart, daß $\|y-y_1\|_2 < \varepsilon$, $\|z-z_1\|_2 < \varepsilon$ ist. Dann ist $y_1 z_1 \in S_1$ und auf Grund der SCHWARZschen Ungleichung auch

$$\|yz - y_1 z_1\|_1 \leqq \|y\|_2 \|z-z_1\|_2 + \|z_1\|_2 \|y-y_1\|_2 < \varepsilon(\|y\|_2 + \|z\|_2 + \varepsilon),$$

so daß S_1 in $L^1(\mathfrak{G})$ dicht ist.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ die Gesamtheit aller endlichen Linearkombinationen der Funktionen $f \cdot \varphi$ mit $f, \varphi \in L(\mathfrak{G})$. Offenbar ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ eine Teilalgebra von $L^1(\mathfrak{G})$. Auf Grund der Bemerkung 2 aus § 28, Nr. 2, ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{G})$ in $L^1(\mathfrak{G})$ bzw. $L(\mathfrak{G})$ dicht im Sinne der Norm $\|x\|_1$ bzw. $\|x\|_\infty$.

Folgerung 4. *Das Bild $T\mathfrak{B}$ der Algebra $\mathfrak{B}$ ist bei der* FOURIER*transformation T in $L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ dicht.*

Beweis. Nach Theorem 4 bilden die Funktionen $f^\wedge = Tf$, $f \in L(\mathfrak{G})$, eine in $L^2(\mathfrak{G})$ dichte Menge, so daß also die zu $T\mathfrak{B}$ gehörigen Funktionen $f^\wedge \varphi^\wedge = T(f \cdot \varphi)$ eine in $L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ dichte Menge bilden (vgl. den Schluß des Beweises von Folgerung 3).

5. Trennbarkeitseigenschaft der Menge $[L^1 \cap P]$. Es ist $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}(\mathfrak{G}) = [L^1 \cap P]$ eine symmetrische Teilalgebra von L^1; denn ist $x, y \in \mathfrak{A}$, so läßt sich $x \cdot y$ aus den zu $L^1 \cap P$ gehörigen Funktionen

$$(x^* \pm y)^* \cdot (x^* \pm y), \quad (x^* \pm iy) \cdot (x^* \pm iy)$$

linear kombinieren; also ist auch $x \cdot y \in \mathfrak{A}$.

Hilfssatz. *Zu jeder bikompakten Menge $F \subset \mathfrak{G}$ und jeder offenen Menge $U \supset F$ existiert eine Funktion $x(g) \in \mathfrak{A}$, die auf F gleich Eins und außerhalb U gleich Null ist.*

Beweis. Wir wählen eine symmetrische Umgebung V des Einselements derart, daß $\mu(V) < \infty$ und (vgl. § 27, Nr. 3, Satz III)

$$V^2 F \subset U$$

ist. Es seien y, z die charakteristischen Funktionen der Mengen V bzw. VF. Setzen wir $x = \frac{1}{\mu(V)} y \cdot z^*$, so ist $x \in \mathfrak{A}$ und

$$x(g) = \frac{1}{\mu(V)} \int y(g_1) z(g_1 g)\, d\mu(g_1) = \frac{1}{\mu(V)} \int_V z(g_1 g)\, d\mu(g_1)$$

$$= \frac{1}{\mu(V)} \int_{Vg} z(g_1)\, d\mu(g_1); \tag{1}$$

für $g \in F$ haben wir $Vg \subset VF$ und somit

$$x(g) = \frac{1}{\mu(V)} \int_{Vg} d\mu(g_1) = \frac{1}{\mu(V)} \mu(Vg) = 1.$$

Ferner ist für $g \notin U$ auch $g \notin V^2 F$, also schneidet Vg die Menge VF nicht. Damit können wir aus (1) schließen, daß $x(g)$ für $g \notin U$ verschwindet. Die Funktion $x(g)$ genügt also allen an sie gestellten Forderungen.

Aus diesem Hilfssatz ergibt sich insbesondere:

Für zwei verschiedene Punkte $g_1, g_2 \in \mathfrak{G}$ existiert eine Funktion $x(g) \in \mathfrak{A}$, die in g_1 gleich Eins und in g_2 gleich Null wird.

Diese Behauptung folgt, wenn wir im Hilfssatz g_1 statt F und $\mathfrak{G} - g_2$ statt U setzen.

6. Dualitätssatz. Es sei $\mathfrak{G}$ eine lokal bikompakte kommutative Gruppe und $\overline{\mathfrak{G}}$ die Gruppe ihrer Charaktere. Für ein festes $g \in \mathfrak{G}$ genügt die Funktion $f_g(\chi) = \chi(g)$ den Bedingungen

$$|f_g(\chi)| = 1, \quad f_g(\chi_1\chi_2) = (\chi_1\chi_2)(g) = \chi_1(g)\,\chi_2(g) = f_g(\chi_1)\,f_g(\chi_2)$$

und ist somit ein Charakter auf $\overline{\mathfrak{G}}$. Dabei gilt

$$f_{g_1 g_2}(\chi) = \chi(g_1 g_2) = \chi(g_1)\,\chi(g_2) = f_{g_1}(\chi)\,f_{g_2}(\chi),$$

so daß die Zuordnung $g \to f_g(\chi)$ ein Homomorphismus von $\mathfrak{G}$ in die Gruppe $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ der Charaktere der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ist.

Theorem 5 (PONTRJAGINscher Dualitätssatz; vgl. PONTRJAGIN [2, 4]). *Die Zuordnung $g \to \chi(g)$ ist ein Isomorphismus und eine Homöomorphie der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf die Gruppe $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ der Charaktere von $\overline{\mathfrak{G}}$.*

Beweis. Auf Grund der Folgerung 3 aus Nr. 1 existiert für $g_1 \neq g_2$ ein Charakter $\chi_0 \in \overline{\mathfrak{G}}$ derart, daß $\chi_0(g_1 g_2^{-1}) \neq 1$, also $\chi_0(g_1) \neq \chi_0(g_2)$ ist. Hieraus folgt $f_{g_1}(\chi_0) \neq f_{g_2}(\chi_0)$, d. h., die Zuordnung $g \to f_g(\chi)$ ist eineindeutig. Folglich ist sie ein Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}$ in die Gruppe $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$; wir können also $\mathfrak{G} \subset \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ annehmen und $\chi(g) = f_g(\chi) = g(\chi)$ setzen. Wir müssen dann zeigen daß $\mathfrak{G} = \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ist und die Topologien in $\mathfrak{G}$ und $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ übereinstimmen.

Wir bezeichnen wieder mit $\mathfrak{B}$ die Algebra aller Linearkombinationen der $f \cdot \varphi$, $f, \varphi \in L(\mathfrak{G})$ (vgl. S. 423). Offenbar ist $\mathfrak{B} \subset \mathfrak{A}(\mathfrak{G})$, so daß auf Grund von Theorem 3 jede Funktion $x(g) \in \mathfrak{B}$ die Gestalt

$$x(g) = \int x^\wedge(\chi)\,\overline{\chi(g)}\,d\mu(\chi) \tag{1}$$

hat; dabei ist $x^\wedge(\chi) \in L^1(\overline{\mathfrak{G}})$, $x^\wedge(\chi) \in \mathfrak{B}^\wedge = T\mathfrak{B}$. Andererseits trennen auf Grund des URYSOHNschen Lemmas die Funktionen $f \in L(\mathfrak{G})$ die Punkte von $\mathfrak{G}$, und außerdem existiert für jeden Punkt $g_0 \in \mathfrak{G}$ eine Funktion $f(g) \in L(\mathfrak{G})$ mit $f(g_0) \neq 0$. Da $\mathfrak{B}$ in $L(\mathfrak{G})$ dicht ist im Sinne der Norm $\|f\|_\infty$, haben die Funktionen aus $\mathfrak{B}$ diese Eigenschaft. Außerdem verschwinden alle Funktionen aus $\mathfrak{B}$ im unendlich fernen Punkt, denn es ist $\mathfrak{B} \subset L(\mathfrak{G})$. Daraus folgt, daß die durch die Algebra $\mathfrak{B}$ definierte schwache Topologie in $\mathfrak{G}$ mit der ursprünglichen Topologie in $\mathfrak{G}$ übereinstimmt (vgl. § 2, Nr. 11, Satz II).

Infolge Formel (1) bedeutet dies, daß die Mengen $U(g_0; x_1^\wedge, \ldots, x_n^\wedge; \varepsilon)$ von $\mathfrak{G}$, die durch die Ungleichungen der Form

$$\left| \int x_j^\wedge(\chi) \left[\overline{\chi(g)} - \overline{\chi(g_0)}\right] d\mu(\chi) \right| < \varepsilon \tag{2}$$

($j = 1, 2, \ldots, n$; $x_j^\wedge \in \mathfrak{B}^\wedge$; $\varepsilon > 0$) definiert werden, eine Basis von Umgebungen in $\mathfrak{G}$ bilden. Da sich (2) auch noch in der Gestalt

$$\left| \int x_j^\wedge(\chi) \left[\overline{g(\chi)} - \overline{g_0(\chi)}\right] d\mu(\chi) \right| < \varepsilon$$

schreiben läßt, sind auf Grund der in der Gruppe der Charaktere definierten Topologie (vgl. Nr. 2) die Mengen $U(g_0;\, x_1^\wedge, \ldots, x_n^\wedge; \varepsilon)$ Umgebungen in der Gruppe $\mathfrak{G}$, welche Teilraum des topologischen Raumes $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ist; diese Mengen bilden eine Basis von Umgebungen, denn $\mathfrak{B}^\wedge$ ist wegen Nr. 4, Folgerung 4, in $L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ dicht.

Somit ist $\mathfrak{G}$ ein lokal bikompakter Teilraum von $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ und folglich in $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ abgeschlossen. Ist nämlich g' ein Häufungspunkt von $\mathfrak{G}$ in $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$, $\{g_i\}$ ein gegen g' konvergierendes gerichtetes System von Elementen aus $\mathfrak{G}$ und $U(e)$ eine Umgebung mit bikompakter abgeschlossener Hülle, so gehört g_i für ein geeignetes i_0 und alle $i > i_0$ zu $g_{i_0}\overline{U}(e)$. Daher muß auch $g' \in g_{i_0}\overline{U}(e) \subset \mathfrak{G}$ gelten, d. h., $\mathfrak{G}$ ist in $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ abgeschlossen. Zeigen wir jetzt, daß $\mathfrak{G}$ in $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ dicht ist, so können wir daraus schließen, daß $\mathfrak{G} = \overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ ist.

Ist $\mathfrak{G}$ nicht dicht in $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$, so existiert in $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ eine offene Menge mit bikompakter Hülle, die $\mathfrak{G}$ nicht schneidet, und auf Grund des Hilfssatzes aus Nr. 5 gibt es eine auf $\mathfrak{G}$ aber nicht identisch verschwindende Funktion $x(\overline{\overline{g}}) = (y \cdot z)(\overline{\overline{g}})$ mit $y, z \in L^1(\overline{\overline{\mathfrak{G}}}) \cap L^2(\overline{\overline{\mathfrak{G}}})$, $y \geqq 0$, $z \geqq 0$. Wie beim Beweis des Plancherelschen Satzes (Nr. 4) können wir schließen, daß

$$x(\overline{\overline{g}}) = \int x^\wedge(\chi)\, \overline{\overline{g}}(\chi)\, d\mu(\chi) \tag{3}$$

ist, wobei $x^\wedge(\chi)$ zu $L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ gehört. Nach Voraussetzung ist $x(g) = 0$ auf $\mathfrak{G}$, so daß sich $\overline{x(g)} = \int \overline{x^\wedge(\chi)}\, \overline{\chi(g)}\, d\mu(\chi) = 0$ für alle $g \in \mathfrak{G}$ ergibt. Hieraus folgt $T^* \overline{x^\wedge} = 0$ oder $x^\wedge = 0$ und wegen (3) auch $x(\overline{\overline{g}}) = 0$, was jedoch der Definition der Funktion $x(\overline{\overline{g}})$ widerspricht. Die Gruppe $\mathfrak{G}$ ist also in $\overline{\overline{\mathfrak{G}}}$ dicht. Damit ist der Satz bewiesen.

Dieser Dualitätssatz wurde zuerst von Pontrjagin [2] nach eingehenden Untersuchungen der Struktur kommutativer topologischer Gruppen aufgestellt. Der hier angegebene analytische Beweis, der sich auf die allgemeine Theorie der Fouriertransformation auf einer kommutativen Gruppe stützt, stammt von Raikow [4].

7. Unitäre Darstellungen einer kommutativen Gruppe.

Theorem 6. *Jede unitäre Darstellung $g \to T_g$ einer kommutativen lokal bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$ wird durch die Formel*

$$T_g = \int \overline{\chi(g)}\, dP(\chi)$$

angegeben, wobei $P(\Delta)$ ein Spektralmaß auf $\overline{\mathfrak{G}}$ ist.

Beweis. Der unitären Darstellung $g \to T_g$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ im Raum $\mathfrak{H}$ entspricht die Darstellung $x \to T_x$ ihrer Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$, d. h. der voll-

ständigen Hülle dieser Algebra in einer minimalen regulären Norm. Jede dieser Darstellungen hat die Gestalt[1])

$$T_x = \int x(M)\, dP(M); \tag{1}$$

hierbei ist $P(\Delta)$ ein Spektralmaß im Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale der vollständigen Hülle von $R(\mathfrak{G})$, also auch von $R(\mathfrak{G})$ selbst [denn $R(\mathfrak{G})$ ist eine reduzierte vollsymmetrische Algebra]. Wegen der Zuordnung $M \leftrightarrow \chi$ zwischen den maximalen Idealen und den Charakteren kann man $P(\Delta)$ auch als Spektralmaß auf $\overline{\mathfrak{G}}$ auffassen. Formel (1) geht dann über in

$$\begin{aligned}\int x(g)\, T_g\, d\mu(g) &= \int x^\wedge(\chi)\, dP(\chi)\\ &= \int \Big[\int x(g)\, \overline{\chi(g)}\, d\mu(g)\Big] dP(\chi)\\ &= \int x(g) \Big[\int \overline{\chi(g)}\, dP(\chi)\Big] d\mu(g),\end{aligned}$$

woraus $T_g = \int \overline{\chi(g)}\, dP(\chi)$ folgt.

8. Sätze vom Tauberschen Typ.

Theorem 7. *Die Gruppenalgebra einer lokal bikompakten kommutativen Gruppe ist regulär.*

Beweis. Da $\mathfrak{M} - M_0$ der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ homöomorph ist, genügt es zu zeigen, daß für jede bikompakte Menge $F \subset \overline{\mathfrak{G}}$ und jeden Punkt $\chi_0 \notin F$ eine Funktion $x \in L^1(\mathfrak{G})$ derart existiert, daß $x^\wedge = 1$ auf F und $x^\wedge = 0$ im Punkt χ_0 gilt. Wir werden eine stärkere Behauptung beweisen, nämlich daß für bikompaktes F, eine offene Menge U von $\overline{\mathfrak{G}}$ und $F \subset U$ eine Funktion $x \in L^1(\mathfrak{G})$ mit den Eigenschaften $x^\wedge = 1$ auf F und $x^\wedge = 0$ außerhalb U existiert.

Wenden wir nämlich den Hilfssatz aus Nr. 5 auf die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ an, so existiert eine Funktion $x^\wedge(\chi) \in \mathfrak{A}(\overline{\mathfrak{G}})$, die die obige Eigenschaft besitzt. Infolge Nr. 4, Theorem 3, ist dann $x^\wedge(\chi)$ die FOURIERtransformierte einer Funktion $x(g) \in L^1(\mathfrak{G})$, so daß $x(g)$ ebenfalls die gestellten Forderungen erfüllt.

Theorem 8. *Ist $\mathfrak{G}$ eine lokal bikompakte kommutative Gruppe, so ist jedes abgeschlossene Ideal von $L^1(\mathfrak{G})$ in einem maximalen regulären Ideal enthalten.*

Dies ergibt sich unmittelbar aus Theorem 7, der Folgerung 3 aus Nr. 4, der Folgerung aus § 15, Nr. 5, und der Halbeinfachheit der Algebra $L^1(\mathfrak{G})$ (vgl. § 28, Nr. 2, Satz VII, und § 7, Nr. 5, Formel (3)).

Folgerung 1. *Ist die FOURIERtransformierte $x^\wedge$ einer Funktion $x \in L^1(\mathfrak{G})$ nirgends auf $\overline{\mathfrak{G}}$ gleich Null, so erzeugen die Verschiebungen der Funktion $x(g)$ den ganzen Raum $L^1(\mathfrak{G})$.*

Beweis. Nach Voraussetzung gehört x zu keinem maximalen regulären Ideal von $L^1(\mathfrak{G})$. Andererseits ist infolge § 28, Nr. 2, Satz IV, der von den

---

[1]) Vgl. § 17, Nr. 4, Satz II.

Verschiebungen der Funktion x erzeugte abgeschlossene Teilraum $\mathfrak{L}$ ein Ideal von $L^1(\mathfrak{G})$ oder der Raum $L^1(\mathfrak{G})$ selbst. Ist $\mathfrak{L}$ ein Ideal von $L^1(\mathfrak{G})$, so ist nach Theorem 8 dieses Ideal und demzufolge die Funktion x in einem maximalen regulären Ideal von $L^1(\mathfrak{G})$ enthalten, was der Voraussetzung widerspricht. Also gilt $\mathfrak{L} = L^1(\mathfrak{G})$.

Folgerung 2 (Verallgemeinerter TAUBERscher Satz von WIENER). *Es sei $\mathfrak{G}$ eine lokal bikompakte, jedoch nicht bikompakte kommutative Gruppe und $x(g)$ eine Funktion aus $L^1(\mathfrak{G})$, für welche $x^\wedge(\chi)$ nirgends auf $\overline{\mathfrak{G}}$ verschwindet. Hat dann $y(g) \in L^\infty(\mathfrak{G})$ die Eigenschaft, daß $x \cdot y$ im Unendlichen verschwindet, so ist $z \cdot y$ im Unendlichen für alle $z \in L^1(\mathfrak{G})$ gleich Null.*

Beweis. Die Menge I derjenigen Funktionen z, für welche $z \cdot y$ im Unendlichen verschwindet, ist offenbar ein linearer Teilraum von $L^1(\mathfrak{G})$. Setzen wir $z_{g_0} = z(g g_0)$, so ist I invariant gegenüber den Verschiebungen $z \to z_{g_0}$; denn ist $z \cdot y$ im Unendlichen gleich Null, so besitzt $z_{g_0} \cdot y = (z \cdot y)_{g_0}$ ebenfalls diese Eigenschaft. Außerdem ist I abgeschlossen; denn ist $z \in \bar{I}$, so existiert für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $z' \in I$ mit

$$\|z - z'\|_1 < \frac{\varepsilon}{2(\|y\|_\infty)},$$

und da $y \cdot z'$ im Unendlichen verschwindet, gibt es eine bikompakte Menge $Q \subset \mathfrak{G}$ derart, daß

$$|(y \cdot z')(g)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{außerhalb } Q$$

ist; wegen

$$|(y \cdot z)(g) - (y \cdot z')(g)| \leqq \|y\|_\infty \cdot \|z - z'\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist auch $|(y \cdot z)(g)| < \varepsilon$ außerhalb Q, so daß $y \cdot z$ im Unendlichen verschwindet. Daraus folgt $z \in I$, also ist I abgeschlossen.

Es ist also I ein Ideal von $L^1(\mathfrak{G})$, oder es ist $I = L^1(\mathfrak{G})$. Da I das Element x enthält, ergibt die Folgerung 1, daß $I = L^1(\mathfrak{G})$ ist. Damit ist der Satz bebewiesen.

Folgerung 3 (TAUBERscher Satz von WIENER [24]). *Ist $x(t)$ in $L^1(-\infty, \infty)$ enthalten, $x^\wedge(\alpha)$ für jedes α ungleich Null und $y(t)$ eine Funktion aus $L^\infty(-\infty, \infty)$ derart, daß $(x \cdot y)(t) \to 0$ für $t \to \infty$, so strebt $(z \cdot y)(t)$ für jedes $z \in L^1(-\infty, \infty)$ und $t \to \infty$ gegen Null.*

Obwohl dieser Satz kein Spezialfall von Folgerung 2 ist (in ihm treten einseitige Grenzwerte auf), können wir doch den Beweis wie bei Folgerung 2 führen.

Theorem 8 besagt, daß die Hülle $h(I)$ des abgeschlossenen Ideals I nicht leer sein kann. Im Zusammenhang mit diesem Satz ergibt sich die Frage nach Bedingungen, unter denen ein abgeschlossenes Ideal der Algebra $L^1(\mathfrak{G})$ gleich dem Kern seiner Hülle ist (vgl. § 15, Nr. 3). Daß dies nicht immer der Fall ist, wurde beispielsweise von L. SCHWARTZ [1] bewiesen. Zur Beantwortung der Frage beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 1.[1]) *In einer regulären halbeinfachen* BANACH*schen Algebra R mögen folgende Bedingungen erfüllt sein:*

a) *Es gibt in dieser Algebra eine Menge, die das Einselement approximiert;*
b) *die Gesamtheit R' derjenigen Funktionen $x(M)$ der Algebra R, die außerhalb einer bikompakten Menge verschwinden, ist in R dicht.*

Dann genügt R im Unendlichen der Bedingung (D).[2])

Beweis. Wir müssen zeigen, daß für jedes $x \in R$ und $\varepsilon > 0$ eine Funktion $y = y(M) \in R'$ existiert, für welche $|xy - x| < \varepsilon$ ist. Infolge a) existiert ein $u \in R$ mit $|xu - x| < \frac{\varepsilon}{2}$. Infolge b) gibt es eine Funktion $y = y(M) \in R'$ mit $|y - u| < \frac{\varepsilon}{2|x|}$. Daraus folgt $|xy - xu| < \frac{\varepsilon}{2}$ oder $|xy - x| < \varepsilon$.

Folgerung 4. *Es sei R wie in Hilfssatz 1 gegeben. Besitzt das abgeschlossene Ideal I aus R eine bikompakte Hülle, so enthält I jedes Element $x \in R$ mit $h(I) \subset \operatorname{int} h((x))$.*

Beweis. Wegen Hilfssatz 1 gibt es ein $y \in R'$ mit $|xy - x| < \varepsilon$. Auf Grund von § 15, Nr. 4, Satz III, können wir aus der Bedingung $h(I) \subset \operatorname{int} h((x))$ schließen, daß $x(M)$ und folglich auch $x(M)y(M)$ in jedem endlichen Punkt lokal zu I gehört (vgl. § 15, Nr. 5); $x(M)y(M)$ verschwindet außerdem in einer Umgebung des unendlich fernen Punktes und gehört somit auch im unendlich fernen Punkt lokal zu I; also ist $xy \in I$ (vgl. § 15, Nr. 4, Theorem 3'). Da I abgeschlossen und ε eine willkürliche positive Zahl ist, liegt auch x in I.

Um nachzuprüfen, ob die Bedingung (D) auch im Endlichen erfüllt ist, beweisen wir den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz 2. *Ist $\mathfrak{G}$ eine lokal bikompakte kommutative Gruppe, so existiert für jede bikompakte Menge $Q \subset \mathfrak{G}$ und jedes $\varepsilon > 0$ eine Funktion $z \in L^1(\mathfrak{G})$, die folgenden Bedingungen genügt:*

a) $z^\wedge \equiv 1$ *in einer Umgebung des Einselements von* $\overline{\mathfrak{G}}$;
b) $\|z\|_1 < 2$;
c) $\|z - z_g\|_1 < \varepsilon$ *für alle* $g \in Q$.

Beweis. Es sei U eine symmetrische Umgebung des Einselements von $\overline{\mathfrak{G}}$, deren abgeschlossene Hülle bikompakt ist, und V eine andere solche Umgebung, deren abgeschlossene Hülle in U enthalten ist und die der Bedingung $\frac{\mu(U)}{\mu(V)} < 4$ genügt. Ferner seien $u^\wedge$, $v^\wedge$ charakteristische Funktionen von U bzw. V und u, v ihre Urbilder in $L^2(\mathfrak{G})$ bei der FOURIERtransformation. Dann gehört die Funktion $z(g) = \frac{u(g)\,v(g)}{\mu(V)}$ zu $L^1(\mathfrak{G})$, und es ist

$$\|z\|_1 \leqq \frac{1}{\mu(V)} \|u\|_2 \|v\|_2 = \frac{1}{\mu(V)} \|u^\wedge\|_2 \|v^\wedge\|_2 = \left[\frac{\mu(U)}{\mu(V)}\right]^{1/2} < 2.$$

---

[1]) Dieser Hilfssatz gilt nur für eine Algebra R ohne Einselement, d. h. für den Fall, daß $\mathfrak{M}$ nicht bikompakt ist.

[2]) Vgl. § 15, Nr. 4.

Weiter gilt für $\chi \in W$, wenn W eine Umgebung des Einselements von $\mathfrak{G}$ mit $VW \subset U$ ist,

$$z^\wedge(\chi) = \frac{1}{\mu(V)}(u^\wedge \cdot v^\wedge)(\chi) = \frac{1}{\mu(V)}\int u^\wedge(\chi')\, v^\wedge(\chi'^{-1}\chi)\, d\mu(\chi') = 1.$$

Die Gesamtheit aller $\chi \in \overline{\mathfrak{G}}$, die der Bedingung

$$|1-\chi(g)| < \frac{\varepsilon}{4} \quad \text{für alle} \quad g \in Q$$

genügen, bezeichnen wir mit U'. Offenbar ist U' eine offene Menge (vgl. § 2, Nr. 12, Satz V), die das Einselement von $\overline{\mathfrak{G}}$ enthält. Daher können wir $U \subset U'$ wählen. Dann ist für alle $g \in Q$

$$\| u - u_g \|_2^2 = \int | u^\wedge(\chi)\, [1-\chi(g)]|^2\, d\mu(\chi) < \mu(U)\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2$$

und analog

$$\| v - v_g \|_2^2 < \mu(V)\left(\frac{\varepsilon}{4}\right)^2.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} \| z - z_g \|_1 &= \frac{1}{\mu(V)} \| u(v - v_g) + v_g(u - u_g) \|_1 \\ &\leqq \frac{1}{\mu(V)} (\| u \|_2 \| v - v_g \|_2 + \| v_g \|_2 \| u - u_g \|_2) \\ &< \frac{1}{\mu(V)} \cdot \frac{\varepsilon}{4} \cdot 2 [\mu(U)\, \mu(V)]^{1/2} < \varepsilon \end{aligned}$$

für alle $g \in Q$, so daß die konstruierte Funktion $z(g)$ tatsächlich allen gestellten Forderungen genügt.

Folgerung 5. *Es seien U und $z = z_U$ wie in Hilfssatz 2 gegeben. Ist dann $x \in L^1(\mathfrak{G})$ und $x^\wedge(e^\wedge) = 0$, so strebt $x \cdot z_U$ gegen Null, wenn U unbeschränkt abnimmt.*

Beweis. Für ein gegebenes $\delta > 0$ wählen wir für Hilfssatz 2 eine symmetrische Menge Q und eine Zahl $\varepsilon > 0$ derart, daß

$$\int_{\mathfrak{G}-Q} |x(g)|\, dg < \frac{\delta}{8}, \qquad \varepsilon < \frac{\delta}{2\|x\|}$$

ist. Wegen

$$x^\wedge(e^\wedge) = \int x(g)\, d\mu(g) = 0$$

ist

$$(x \cdot z)(g) = \int x(g')\, z(g'^{-1}g)\, d\mu(g') = \int x(g')\, [z(g'^{-1}g) - z(g)]\, d\mu(g')$$

und folglich

$$\begin{aligned} \| x \cdot z \|_1 &\leqq \int |x(g')|\, \| z_{g'^{-1}} - z \|_1\, d\mu(g') \\ &= \int_Q |x(g')|\, \| z_{g'^{-1}} - z \|_1\, d\mu(g') \\ &\quad + \int_{\mathfrak{G}-Q} |x(g')|\, \| z_{g'^{-1}} - z \|_1\, d\mu(g') \\ &< \| x \|_1 \varepsilon + \frac{\delta}{8} \cdot 4 < \delta. \end{aligned}$$

Folgerung 6. *Es existiert eine gleichmäßig beschränkte gerichtete Menge von Funktionen $u \in L^1(\mathfrak{G})$ derart, daß $u^\wedge \equiv 0$ in einer Umgebung des Punktes $e^\wedge$ ist und $x \cdot u$ für alle $x \in L^1(\mathfrak{G})$ mit $x^\wedge(e^\wedge) = 0$ gegen x strebt.*

Beweis. Es durchlaufe v die Elemente einer Menge aus $L^1(\mathfrak{G})$, die das Einselement approximiert, und wir setzen $u = v - z \cdot v$. Dann ist $\|u\|_1 \leq 3$ und $u^\wedge = v^\wedge - v^\wedge z^\wedge = 0$ in einer Umgebung, in der $z^\wedge$ identisch gleich Eins ist. Außerdem gilt (vgl. Folgerung 5)

$$\|x - x \cdot u\|_1 \leq \|x - x \cdot v\|_1 + \|x \cdot z\|_1 \|v\|_1 \to 0.$$

Die Folgerung 6 sagt aus, daß im Punkt $e^\wedge$ die Bedingung (D) erfüllt ist. Mit Hilfe einer Verschiebung können wir erreichen, daß dies auch in allen anderen Punkten der Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ und infolge des Hilfssatzes 1 auch im Unendlichen der Fall ist. Wir können also auf $L^1(\mathfrak{G})$ den Schilowschen Satz anwenden (vgl. § 15, Nr. 4, Theorem 5), so daß wir das folgende Ergebnis erhalten.

Theorem 9. *Ist I ein abgeschlossenes Ideal von $L^1(\mathfrak{G})$, $x(g)$ eine Funktion aus $L^1(\mathfrak{G})$, die zu $kh(I)$ gehört, und enthält der Durchschnitt der Ränder der Mengen $h(x)$ und $h(I)$ keine nichtleere perfekte Menge, so ist $x \in I$.*

Folgerung 7. *Ist I ein abgeschlossenes Ideal von $L^1(\mathfrak{G})$, dessen Hülle diskret ist (d. h. nur aus isolierten Punkten besteht), so ist $I = kh(I)$.*

9. Bikompakte Gruppen.

Theorem 10. *Eine kommutative Gruppe $\mathfrak{G}$ ist genau dann bikompakt, wenn $\overline{\mathfrak{G}}$ diskret ist.*

Beweis. Ist $\mathfrak{G}$ diskret, so enthält $L^1(\mathfrak{G})$ ein Einselement (vgl. § 28, Nr. 1), und die Gruppe $\overline{\mathfrak{G}}$ ist homöomorph dem Raum aller maximalen Ideale einer Banachschen Algebra mit Einselement und infolgedessen bikompakt. Ist umgekehrt $\overline{\mathfrak{G}}$ bikompakt, so gehört die Funktion $x_0^\wedge(\chi) \equiv 1$ zu $L^1(\overline{\mathfrak{G}}) \cap P(\overline{\mathfrak{G}})$, und die ihr entsprechende Funktion $x_0(g) \in L^1(\mathfrak{G})$ ist Einselement von $L^1(\mathfrak{G})$. Dies ist aber nach § 28, Nr. 1, nur dann möglich, wenn $\mathfrak{G}$ diskret ist. Die Behauptung des Theorems erhält man nun, wenn man mit Hilfe des Dualitätssatzes die Rollen von $\overline{\mathfrak{G}}$ und $\mathfrak{G}$ vertauscht.

Theorem 11. *Ist eine kommutative Gruppe $\mathfrak{G}$ bikompakt und das invariante Maß auf $\mathfrak{G}$ normiert, so daß $\mu(\mathfrak{G}) = 1$ ist, so läßt sich im Umkehrsatz das invariante Maß auf $\overline{\mathfrak{G}}$ so normieren, daß das Maß jedes Punktes gleich 1 ist.*

Beweis. Das Maß μ auf $\overline{\mathfrak{G}}$ sei so normiert, daß es in jedem Punkt gleich c ist. Dann ist die Funktion

$$u^\wedge(\chi) = \begin{cases} \dfrac{1}{c} & \text{für } \chi = e^\wedge, \\ 0 & \text{für } \chi \neq e^\wedge \end{cases}$$

Einselement von $L^1(\overline{\mathfrak{G}})$. Da der Faltung in $L^1(\overline{\mathfrak{G}})$ die Multiplikation der

Funktionen $x(g)$ entspricht, ist $u(g) \equiv 1$ die entsprechende Funktion; daraus folgt

$$u^\wedge(\chi) = \int \chi(g)\, d\mu(g) = \begin{cases} \frac{1}{c} & \text{für } \chi = e^\wedge, \\ 0 & \text{für } \chi \neq e^\wedge. \end{cases} \tag{1}$$

Insbesondere ist für $\chi = e^\wedge$

$$\frac{1}{c} = \int d\mu(g) = \mu(\mathfrak{G}),$$

und dies ist genau für $c = 1$ gleich Eins.

Da wir aus (1) für $c = 1$ die Beziehung

$$\int \chi_1(g)\, \overline{\chi_2(g)}\, d\mu(g) = \int (\chi_1 \chi_2^{-1})(g)\, d\mu(g) = \begin{cases} 1 & \text{für } \chi_1 = \chi_2, \\ 0 & \text{für } \chi_1 \neq \chi_2 \end{cases}$$

erhalten, haben wir bewiesen:

Folgerung 1. *Die Charaktere einer bikompakten kommutativen Gruppe bilden ein Orthonormalsystem in* $L^2(\mathfrak{G})$.

Theorem 12. *Die Charaktere* χ_α *einer bikompakten kommutativen Gruppe bilden ein vollständiges Orthonormalsystem in* $L^2(\mathfrak{G})$, *und die Entwicklung (verallgemeinerte* FOURIER*reihe)*

$$x(g) = \sum_n \langle x, \chi_n \rangle \chi_n(g) \tag{2}$$

einer Funktion $x(g) \in L^2(\mathfrak{G})$ *ist die inverse* FOURIER*transformierte.*

Beweis. Aus $x(g) \in L^2(\mathfrak{G})$ folgt $x^\wedge(\chi) \in L^2(\overline{\mathfrak{G}})$; also sind höchstens abzählbar viele $x^\wedge(\chi_\alpha)$, etwa $x^\wedge(\chi_1)$, $x^\wedge(\chi_2)$, ..., von Null verschieden. Setzen wir

$$c_n = x^\wedge(\overline{\chi}_n) = \int x(g)\, \overline{\chi_n(g)}\, d\mu(g)$$

und wenden wir die PLANCHERELsche Formel an, so erhalten wir

$$\int |x(g)|^2\, d\mu(g) = \int |x^\wedge(\chi)|^2\, d\mu(\chi) = \sum_n |c_n|^2.$$

Dies bedeutet (vgl. § 5, Nr. 4, Satz IX), daß die Charaktere $\chi(g)$ ein vollständiges System in $L^2(\mathfrak{G})$ bilden. Ferner ist $x_n(g) = \sum_1^n c_k \chi_k(g)$ die inverse FOURIERtransformierte der Funktion

$$x_n^\wedge(\chi) = \begin{cases} c_k & \text{für } \chi = \chi_k,\ k \leqq n, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Da $x_n^\wedge(\chi) \to x^\wedge(\chi)$ im Sinne der Norm in $L^2(\overline{\mathfrak{G}})$ gilt, strebt auch x_n im Sinne der Norm in $L^2(\mathfrak{G})$ gegen x, so daß (2) tatsächlich die inverse FOURIERtransformierte ist.

Ist $\mathfrak{G}$ die Drehungsgruppe des Kreises, so sind $\chi_n = e^{int}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ die Charaktere, und wir erhalten als Spezialfall den Satz über die Vollständigkeit des Systems der Funktionen $\chi_n = e^{int}$ $(n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ in $L^2(0, 2\pi)$.

Folgerung 2. *Jede auf einer bikompakten kommutativen Gruppe stetige Funktion wird von endlichen Linearkombinationen ihrer Charaktere gleichmäßig approximiert.*

Dies ergibt sich unmittelbar aus Nr. 1, Folgerung 4.

10. Kugelfunktionen. Der Begriff der Kugelfunktion ist die Verallgemeinerung des Begriffs des Charakters auf nichtkommutative Gruppen. Ist $\mathfrak{G}$ eine lokal bikompakte Gruppe und K eine bikompakte Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so nennen wir jede elementare, auf $\mathfrak{G}$ positiv definite Funktion $\varphi(g)$, die der Bedingung

$$\varphi(k_1 g k_2) = \varphi(g) \quad \text{für alle} \quad k_1, k_2 \in K \tag{1}$$

genügt, eine der Untergruppe K entsprechende *Kugelfunktion* auf $\mathfrak{G}$. Ist $g \to U_g$ eine irreduzible unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$, für welche $\varphi(g) = \langle U_g \xi_0, \xi_0 \rangle$ gilt, so sehen wir sofort, daß die Beziehung (1) der Bedingung $U_k \xi_0 = \xi_0$ für alle $k \in K$ äquivalent ist. *Somit ist eine elementare positiv definite Funktion genau dann eine Kugelfunktion, wenn im Raum der entsprechenden irreduziblen Darstellung $g \to U_g$ ein Vektor $\xi_0 \neq 0$ existiert, der die Bedingung $U_k \xi_0 = \xi_0$ für alle $k \in K$ erfüllt.*

Wir können die Kugelfunktion $\varphi(g)$ auch als Funktion auf der Mannigfaltigkeit X der rechtsseitigen Nebenklassen Kg von $\mathfrak{G}$ bezüglich der Untergruppe K auffassen. Setzen wir nämlich

$$\varphi(x_1, x_2) = \varphi(g_1 g_2^{-1}) \quad \text{für} \quad x_1, x_2 \in X, \quad x_1 = K g_1, \; x_2 = K g_2, \tag{2}$$

so folgt aus (1), daß diese Definition nicht von der Wahl der Elemente $g_1 \in x_1$, $g_2 \in x_2$ abhängt.

Den Elementen $g_0 \in \mathfrak{G}$ entsprechen Transformationen $Kg \to Kgg_0$ im Raum X, die wir in der Form $x \to xg_0$ schreiben wollen. Aus (2) folgt $\varphi(x_1 g, x_2 g) = \varphi(x_1, x_2)$ für alle $g \in \mathfrak{G}$; außerdem ist $\varphi(x_1, x_2)$ ein positiv definiter Kern[1]). Wählen wir einen festen Punkt $x_0 \in X$, so ist die Funktion $\psi(x) = \varphi(x, x_0)$ invariant gegenüber allen Transformationen g, die den Punkt x_0 als Fixpunkt haben, d. h., $\psi(x)$ ist auf einer „Kugel" mit dem „Mittelpunkt" in x_0 konstant.

Wir stellen nun an die Gruppen $\mathfrak{G}$ und K eine zusätzliche Forderung; wir verlangen nämlich, daß in $\mathfrak{G}$ ein nichttrivialer Automorphismus $g \to g'$ (d. h. ein Isomorphismus der Gruppe $\mathfrak{G}$ auf sich) existiert derart, daß a) $g'' = g$, b) $k' = k$ für alle $k \in K$ gilt. In diesem Abschnitt werden wir diese Bedingung stets als erfüllt ansehen.[2])

In diesem Fall lassen sich die Kugelfunktionen mit Hilfe der maximalen Ideale der folgenden kommutativen Algebra beschreiben. Es sei R_0' die Gesamtheit der Funktionen $x(g) \in L^1(\mathfrak{G})$, die der Bedingung

$$x(k_1 g k_2) = x(g) \quad \text{für alle} \quad k_1, k_2 \in K \tag{3}$$

genügen. Wir sehen leicht, daß R_0' eine kommutative[3]) Teilalgebra von $L^1(\mathfrak{G})$ ist, wenn der oben genannte Automorphismus existiert. Ist R_0 die Algebra, die wir aus R_0' durch Hinzufügen des Einselements erhalten, so gibt es eine eineindeutige Zuordnung $M \to \varphi_M(g)$

---

[1]) Eine Funktion $\varphi(x, y)$ wird *positiv definiter Kern* genannt, wenn

$$\sum_{j,k=1}^{n} \varphi(x_j, x_k) \lambda_j \bar{\lambda}_k \geqq 0$$

für jede Wahl der Elemente $x_1, \ldots, x_n$ aus X und beliebige Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ gilt. — *Anm. d. Red.*

[2]) Diese Bedingung ist z. B. erfüllt, wenn X ein symmetrischer RIEMANNscher Raum und $\mathfrak{G}$ die Gruppe der Bewegungen in X ist.

[3]) Der Beweis dieser Tatsache sowie anderer hier ausgesprochener Behauptungen ist nur eine Verallgemeinerung der entsprechenden Überlegungen aus § 29, Nr. 4, Beispiel 3.

zwischen der Gesamtheit aller von R_0' verschiedenen symmetrischen maximalen Ideale von R_0 und der Gesamtheit aller Kugelfunktionen; diese Zuordnung ist durch die Formel $x(M) = \int x(g) \varphi_M(g) d\mu(g)$ für alle $x(g) \in R_0'$ gegeben. Hieraus und aus § 20, Nr. 2, Theorem 3, können wir schließen, daß *jede positiv definite Funktion* $\varphi(g)$, *die der Bedingung* (1) *genügt, in der Form*

$$\varphi(g) = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_M(g) \, d\sigma(M) \tag{4}$$

dargestellt werden kann, wobei $\mathfrak{M}$ *der Raum der symmetrischen maximalen Ideale von* R_0 *und* σ *ein Maß auf* $\mathfrak{M}$ *ist.*

Wir bezeichnen mit S die Menge aller zweiseitigen Nebenklassen $s = KgK$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ bezüglich der Untergruppe K, d. h., der Mengen s aller Elemente $k_1 g k_2$ für ein festes g. Diese Klassen s können wir auf Grund des oben Erwähnten als „Kugel“ in X auffassen. Infolge (1) muß die Funktion $\varphi(g)$ auf jeder Klasse konstant sein, und man kann sie als Funktion $\varphi(s)$ der Klasse s ansehen.

Analog läßt sich jede Funktion $f(g) \in R_0'$ als Funktion $f(s)$ auf S auffassen.

Gehen wir vom Integral über $\mathfrak{G}$ zum Integral über $K \times K$ und S über, so ist das Produkt $f = f_1 \cdot f_2$ in R_0 durch die Formel

$$f(s) = \int_S f_1(s_1) \, f_2(s_2) \, a(s_1, s_2, s) \, ds_1 \, ds_2 \tag{5}$$

gegeben; dabei ist $a(s_1, s_2, s)$ eine Funktion von s_1, s_2, s. Hieraus folgt, daß für eine Kugelfunktion $\varphi_M(s)$ das Multiplikationsgesetz

$$\varphi_M(s_1) \, \varphi_M(s_2) = \int_S a(s_1, s_2, s) \, \varphi_M(s) \, ds \tag{6}$$

gilt.

Nun setzen wir voraus, daß $\mathfrak{G}$ eine halbeinfache Lieschen Gruppe ist. In diesem Fall genügen die Kugelfunktionen gewissen Differentialgleichungen: Es sei $e_1, e_2, \ldots, e_n$ eine Basis der infinitesimalen Gruppe Γ von $\mathfrak{G}$, und es seien $E_1, E_2, \ldots, E_n$ die ihnen entsprechenden Differentialoperatoren in X (Liesche Operatoren einer unendlich kleinen Verschiebung). Mit Q bezeichnen wir die Algebra der formalen Polynome in $e_1, e_2, \ldots, e_n$ mit den Relationen, die den Vertauschungsrelationen in Γ entsprechen.

Sind $P(e_1, e_2, \ldots, e_n)$ Elemente des Zentrums[1]) von Q, so sind $P(E_1, E_2, \ldots, E_n)$ Differentialoperatoren in X, die mit allen Transformationen $x \to xg$ vertauschbar sind. Da die Funktionen $\varphi_M(x)$ irreduzible Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ definieren, folgt $P(E_1, E_2, \ldots, E_n) \varphi_M(x) = \lambda \varphi_M(x)$, wobei λ eine Zahl ist.

Unter den Elementen des Zentrums von Q gibt es endlich viele $P_1, \ldots, P_m$, so daß jedes andere Element des Zentrums ein Polynom in $P_1, \ldots, P_m$ ist. Setzen wir $\Delta_i = P_i(E_1, \ldots, E_n)$ für $i = 1, 2, \ldots, m$, so erfüllt die Funktion $\varphi_M(x)$ die Bedingungen

$$\Delta_i \varphi_M(x) = \lambda_i \varphi_M(x) \qquad (i = 1, 2, \ldots, m). \tag{7}$$

Ist beispielsweise $\mathfrak{G}$ die komplexe unimodulare Gruppe zweiter Ordnung und K eine unitäre Untergruppe von $\mathfrak{G}$, so stimmen die Kugelfunktionen mit den in § 29, Nr. 4, Beispiel 2, berechneten Kugelfunktionen überein. In diesem Fall können wir X mit der Lobatschewskischen Ebene und $\mathfrak{G}$ mit der Gruppe der Bewegungen in dieser Ebene

[1]) Wir können zeigen, daß das Zentrum der Algebra Q aus denjenigen Polynomen $P = a1 + \sum a^i e_i + \sum a^{ik} e_i e_k + \cdots$ mit symmetrischen Koeffizienten $a^{ik}, a^{ikl}, \ldots$ besteht, für die die Formen $\sum a^i \xi_i$, $\sum a^{ik} \xi_i \xi_k, \ldots$ invariant gegenüber den Transformationen der adjungierten Gruppe sind.

identifizieren; alle Elemente des Zentrums lassen sich mit Hilfe eines einzigen von ihnen ausdrücken, und der entsprechende Operator Δ ist der LAPLACEsche Operator in der LOBATSCHEWSKIschen Ebene.

11. Die verallgemeinerte Verschiebung. Es sei T ein lokal bikompakter HAUSDORFFscher Raum, μ ein Maß auf T und $L^1(T)$ der auf das Maß μ bezogene Raum L^1. Wir betrachten die Schar der beschränkten linearen Operatoren A^s von $L^1(T)$, die den folgenden Bedingungen genügt[1]):

a) Für jedes $t \in T$ existiert in $L^1(T)$ ein Operator A^{t*} mit der Eigenschaft

$$\int A^{t*} x(t) \cdot \overline{y(t)}\, d\mu = \int x(t)\, \overline{A^t y(t)}\, d\mu \quad \text{für alle} \quad x,\, y \in L(T);$$

b) die Zahlenfunktionen $|A^t|$ und $|A^{t*}|$ sind μ-meßbar und beschränkt auf jeder bikompakten Menge;

c) $A^s x(t)$, $A^{s*} x(t)$ gehören zu $L(T \times T)$ für jede Funktion $x \in L(T)$;

d) $A^s x(t)$ gehört als Funktion von s für $x(t) \in L^1(T)$ und fast alle $t \in T$ zu $L^1(T)$;

e) es gibt eine Folge reeller Funktionen $x_n(t) \in L^1(T)$ derart, daß für jede Funktion $f(x) \in L^1(T)$ die Beziehungen

$$\lim_{n\to\infty} \int A^s f(t)\, x_n(t)\, d\mu(t) = f(s),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int A^s f(t)\, x_n(s)\, d\mu(s) = f(t),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int A^{s*} f(t)\, x_n(s)\, d\mu(s) = f(t),$$

$$\lim_{n\to\infty} \int A^{s*} f(t)\, x_n(s)\, d\mu(t) \in L^1(T)$$

gelten; wir setzen

$$f^*(s) = \lim_{n\to\infty} \overline{\int A^{s*} f(t)\, x_n(t)\, d\mu(t)}; \tag{1}$$

f) $A_s^\tau A_t^s x(t) = A_t^s A_t^\tau x(t);$[2])

g) $A_t^s A_t^\tau x(t) = A_t^\tau A_t^s x(t);$

h) $A_t^{s*} A_t^\tau x(t) = A_t^\tau A_t^{s*} x(t);$

die Beziehungen f) bis h) gelten für alle τ, $s \in T$ und fast alle $t \in T$.

Jede Schar von Operatoren A^t, die den Bedingungen a) bis f) genügt, nennen wir *Operation der verallgemeinerten Verschiebung*; sind außerdem g) bzw. h) erfüllt, so ist diese Operation *kommutativ* bzw. *normal*.

Beispielsweise ist eine verallgemeinerte Verschiebung vorhanden, wenn T eine lokal bikompakte Gruppe und μ ein linksinvariantes Maß auf T ist. Dann genügt der Operator der Linksverschiebung $A^s x(t) = x(st)$ den Bedingungen a) bis f). Dabei ist

$$A^{s*} x(t) = x(s^{-1} t).$$

Außerdem sind auch die Beziehungen g) und h) erfüllt, wenn T kommutativ ist.

Ein weniger triviales Beispiel wird am Schluß dieses Abschnitts angegeben.

Im folgenden wollen wir nur diejenigen Operationen der verallgemeinerten Verschiebung betrachten, die den Bedingungen g) und h) genügen. Außerdem setzen wir zur

---

[1]) Bezüglich der Bezeichnungen $L(T)$ und $L(T \times T)$ vgl. § 6, Nr. 1 und 18.

[2]) Ist x eine Funktion mehrerer Argumente $t, t_1, t_2, \ldots$, so bezeichnet der Index t bei A_t^s, daß dieser Operator auf x als Funktion von t angewendet wird.

Vereinfachung voraus, daß $|A_t^{s*}| \leqq C$ ist (C konstant). Dann läßt sich $L^1(T)$ zu einer vollständigen normierten symmetrischen Algebra machen, indem wir

$$|x| = C\int |x(t)|\, d\mu(t), \quad (x \cdot y)(t) = \int A_t^{s*} x(t)\, y(s)\, ds \tag{2}$$

setzen und die Involution mit Hilfe von (1) definieren. Dabei ergibt sich die Assoziativität der Multiplikation aus der Bedingung f). Fügen wir noch das Einselement hinzu, so erhalten wir eine vollständige normierte symmetrische Algebra R mit Einselement. Wir können beweisen, daß R wegen der Bedingungen g) und h) eine kommutative vollsymmetrische Algebra ist. Auch brauchen wir nur die in Nr. 1 angestellten Überlegungen zu wiederholen, um zu zeigen, daß die von $L^1(T)$ verschiedenen maximalen Ideale von R durch die Formel

$$(\lambda e + x)(M) = \lambda + \int x(t)\, \overline{\varphi(t, M)}\, d\mu(t) \tag{3}$$

gegeben werden; dabei ist $\varphi(t, M)$ eine auf $T \times \mathfrak{M}$ stetige Funktion, die der Bedingung

$$A_t^s \varphi(t, M) = \varphi(s, M)\, \varphi(t, M) \tag{4}$$

genügt. Umgekehrt definiert jede solche Funktion nach Formel (3) ein maximales Ideal von R.

Eine stetige Funktion $p(t)$ heißt *positiv definit bezüglich der Operation* A^s, wenn

$$\sum_{j,k=1}^{n} A_{t_j}^{t_k *} p(t_j)\, \xi_j \bar{\xi}_k \geqq 0$$

für beliebige Punkte $t_1, \ldots, t_n \in T$ und beliebige komplexe Zahlen $\xi_1, \ldots, \xi_n$ gilt. In diesem Fall bestimmt die Formel

$$F(\lambda e + x) = \lambda + \int p(t)\, x(t)\, d\mu(t)$$

ein positives Funktional über R. Wenden wir hierauf die Folgerung 1 aus § 20, Nr. 4, an (vgl. die analogen Überlegungen in Nr. 3), so erhalten wir

Theorem 13. *Die Funktion $p(t)$ ist genau dann stetig und bezüglich A^s positiv definit, wenn sie sich in der Form*

$$p(t) = \int_{\mathfrak{M}} \overline{\varphi(t, M)}\, d\sigma(M)$$

darstellen läßt; dabei ist σ ein Maß auf $\mathfrak{M}$.

Nun setzen wir $M_0 = L^1(T)$ und $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} - M_0$. Wiederholen wir im wesentlichen die Überlegungen aus Nr. 4, so gelangen wir zu dem folgenden Ergebnis:

Theorem 14 (Plancherelscher Satz für die Operation der verallgemeinerten Verschiebung). *Auf $\mathfrak{M}'$ existiert ein eindeutig bestimmtes Maß v derart, daß die Formeln*

$$F(M) = \int_T f(t)\, \overline{\varphi(t, M)}\, d\mu(t), \quad f(t) = \int_{\mathfrak{M}'} F(M)\, \varphi(t, M)\, dv(M) \tag{5}$$

eindeutig umkehrbare isometrische Transformationen von $L_\mu^2(T)$ auf $L_v^2(\mathfrak{M}')$ bzw. $L_v^2(\mathfrak{M}')$ auf $L_\mu^2(T)$ realisieren, wobei die Integrale in (5) in $L_v^2(\mathfrak{M}')$ bzw. $L_\mu^2(T)$ der Norm nach konvergieren.

Nun setzen wir

$$B_M^{N*} F(M) = \int \overline{\varphi(t, M)}\, \varphi(t, N)\, f(t)\, d\mu(t)$$

für

$$f(t) = \int_{\mathfrak{M}'} F(M)\, \varphi(t, M)\, dv(M), \qquad N \in \mathfrak{M}'. \tag{6}$$

Genügen der Operator B_M^{N*} und der ihm entsprechende Operator B_M^N den Bedingungen a) bis h) (hier mit $\mathfrak{M}'$ und ν anstelle von T und μ) und ist auch $|B_M^{N*}| \leqq C_1$, so können wir eine normierte Algebra konstruieren, die wir mit R_1 bezeichnen wollen. Für jedes feste $t \in T$ bestimmt die Formel

$$(\lambda e + F(M))(t) = \lambda + \int F(M)\varphi(t, M)\,d\nu(M)$$

ein maximales Ideal von R_1, und hieraus können wir schließen, daß T in dem Raum T_1 der maximalen Ideale von R_1 enthalten ist. Ist ν' das zum Maß ν auf $\mathfrak{M}'$ analoge Maß auf $T' = T - \{L_\nu^1(\mathfrak{M}')\}$, so gilt (vgl. LEWITAN [4]) $T' = T$, wenn R_1 regulär und $\nu'(T' - T) = 0$ ist, d. h., es gilt der auf diesen Fall verallgemeinerte Dualitätssatz für lokal bikompakte kommutative Gruppen.

Ein nichttriviales Beispiel der verallgemeinerten Verschiebung erhalten wir, wenn wir mit $A_x^y f(x)$ diejenige Lösung der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} - (\varrho(x) - \varrho(y))\,u = 0 \qquad (0 \leqq x < \infty) \tag{7}$$

bezeichnen, die den Anfangsbedingungen $u(x, 0) = f(x)$, $u_y(x, 0) = 0$ genügt. Wir können zeigen (vgl. etwa POWSNER [7]), daß sämtliche Bedingungen a) bis h) erfüllt sind und $|A_x^y| \leqq C = \text{const}$ ist, wenn $\varrho(x)$ reell, auf der Halbachse $0 \leqq x < \infty$ stetig ist und der Bedingung $\varrho(x) = O\left(\frac{1}{x^{3+\varepsilon}}\right)$, $\varepsilon > 0$, für $x \to \infty$ genügt. Folglich lassen sich auf den Operator A_x^y alle vorhergehenden Ergebnisse anwenden. Die entsprechende Funktion $\varphi(x, M)$ ist diejenige Lösung der Gleichung $\frac{d^2 u}{d x^2} - \varrho(x)u + \lambda u = 0$ (λ reell), die den Bedingungen $\varphi(0) = 1$, $\varphi'(0) = 0$ genügt. Die Formeln (5) im verallgemeinerten PLANCHERELschen Satz gehen in die Formeln

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,dx, \quad f(x) = \int_{-\infty}^\infty F(\lambda)\,\varphi(x, \lambda)\,d\nu(\lambda) \tag{8}$$

über, die eine eindeutig umkehrbare isometrische Transformation von $L^2(0, \infty)$ auf $L_\nu^2(-\infty, \infty)$ bzw. von $L_\nu^2(-\infty, \infty)$ auf $L^2(0, \infty)$ vermitteln.

Wir weisen darauf hin, daß die Formeln (8) in Wirklichkeit für umfangreichere Funktionenklassen gelten, z. B. für jede reelle meßbare Funktion $\varrho(x)$, die in jedem endlichen Intervall $(0, c)$, $c > 0$, summierbar ist. Jedoch läßt sich dieses allgemeine Resultat mit den Methoden der Theorie der Algebren nicht erhalten. Das erklärt sich daraus, daß dann anstelle der symmetrischen normierten Algebren symmetrische topologische Algebren betrachtet werden müßten, deren Theorie bis jetzt noch nicht weit genug entwickelt ist.

§ 32. Darstellung bikompakter Gruppen

Im Fall einer bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$ ist der Raum $L^2(\mathfrak{G})$ eine HILBERTsche Algebra (vgl. die folgende Nr. 1). Eine Anwendung der allgemeinen Theorie der HILBERTschen Algebren (vgl. § 25, Nr. 5) auf $L^2(\mathfrak{G})$ führt zu Ergebnissen über unitäre Darstellungen einer bikompakten Gruppe.

1. Die Algebra $L^2(\mathfrak{G})$. Ist $\mathfrak{G}$ eine bikompakte Gruppe, so ist das invariante Maß $\mu(\mathfrak{G})$ der ganzen Gruppe endlich. Wir normieren das Maß so, daß $\mu(\mathfrak{G}) = 1$ ist. Dann gilt

$$\| x \|_1 \leqq \| x \|_2 \leqq \| x \|_\infty$$

und

$$\| x \cdot y \|_\infty \leqq \| x \|_2 \cdot \| y \|_2 .$$

Hieraus folgt insbesondere, daß $L^2(\mathfrak{G})$ eine BANACHsche Algebra ist, denn es bestehen die Ungleichungen $\| x \cdot y \|_2 \leqq \| x \cdot y \|_\infty \leqq \| x \|_2 \cdot \| y \|_2$. Wir können unmittelbar zeigen, daß $L^2(\mathfrak{G})$ mit dem inneren Produkt

$$\langle x, y \rangle = \int x(g) \cdot \overline{y(g)}\, d\mu(g) = x \cdot y^*(e)$$

sämtliche Axiome einer HILBERTschen Algebra erfüllt, so daß wir auf $L^2(\mathfrak{G})$ die allgemeine Theorie dieser Algebren anwenden können. Es zeigt sich, daß außerdem alle minimalen zweiseitigen Ideale von $L^2(\mathfrak{G})$ endlichdimensional sind. Dieses Ergebnis erhalten wir aus den folgenden Hilfssätzen.

Hilfssatz 1. *Eine stetige Funktion $z(g)$ ist genau dann im Zentrum von $L^2(\mathfrak{G})$ enthalten, wenn $z(g_1 g_2) \equiv z(g_2 g_1)$ ist.*

Beweis. Die Funktion $z(g)$ gehört genau dann zum Zentrum von $L^2(\mathfrak{G})$, wenn

$$\int z(g_1)\, x(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) = \int x(g_1)\, z(g_1^{-1} g)\, d\mu(g_1) \tag{1}$$

für alle $x(g) \in L^2(\mathfrak{G})$ gilt. Ersetzen wir im ersten Integral g_1 durch $g g_1$ und im zweiten Integral g_1 durch g_1^{-1}, so erhalten wir

$$\int \big(z(g g_1) - z(g_1 g)\big)\, x(g_1^{-1})\, d\mu(g_1) = 0. \tag{2}$$

Da die Funktion $x(g) \in L^2(\mathfrak{G})$ beliebig und die Funktion $z(g)$ stetig ist, gilt (2) und demzufolge auch (1) genau dann, wenn $z(g g_1) - z(g_1 g) \equiv 0$ ist.

Wir haben hier nur die Voraussetzung benutzt, daß $\mathfrak{G}$ unimodular ist.

Hilfssatz 2. *Jedes von (0) verschiedene abgeschlossene zweiseitige Ideal $I \subset L^2(\mathfrak{G})$ enthält ein von Null verschiedenes Element des Zentrums von $L^2(\mathfrak{G})$, welches eine auf der Gruppe $\mathfrak{G}$ stetige Funktion ist.*

Beweis.[1]) Wir wählen ein von Null verschiedenes Element $y \in I$ und setzen $x = y \cdot y^*$. Dann ist die Funktion $x(g)$ stetig auf $\mathfrak{G}$. Setzen wir

$$z(g) = \int x(g_1 g g_1^{-1})\, d\mu(g_1),$$

so ist $z(g)$ stetig und $z(e) = x(e) = \int |y(g)|^2 d\mu(g) > 0$, so daß $z(g) \not\equiv 0$ gilt. Außerdem folgt aus der Invarianz des Maßes die Beziehung $z(g' g) = z(g g')$; also gehört $z(g)$ zum Zentrum von $L^2(\mathfrak{G})$.

Andererseits ist $x(g) \in I$, also auch $x_{g_1}^{g_1}(g) = x(g_1 g g_1^{-1}) \in I$ (vgl. § 28, Nr. 2, Satz IV) und

$$z = \int x_{g_1}^{g_1}\, d\mu(g_1) \in I .$$

[1]) Dieser Beweis wurde von SEGAL [4] angegeben.

Wenden wir jetzt die Theoreme 5 und 12 aus § 25 auf ein minimales zweiseitiges Ideal $I \subset L^2(\mathfrak{G})$ an und berücksichtigen wir den Hilfssatz 2, so erhalten wir den

Hilfssatz 3. *Jedes minimale zweiseitige Ideal $I \subset L^2(\mathfrak{G})$ ist endlichdimensional.*

In diesem Fall führen die Ergebnisse aus § 25, Nr. 5, auf folgenden Satz.

Theorem 1. *Ist $\mathfrak{G}$ eine bikompakte Gruppe, so ist $L^2(\mathfrak{G})$ die direkte und orthogonale Summe ihrer minimalen zweiseitigen Ideale I_α, die endlichdimensional und folglich der Algebra aller Matrizen einer festen endlichen Ordnung vollisomorph sind.*

2. Darstellung einer bikompakten Gruppe.

Theorem 2. *Ist $g \to T_g$ eine stetige Darstellung einer bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$ im* Hilbert*schen Raum $\mathfrak{H}$, so existiert in $\mathfrak{H}$ ein anderes Skalarprodukt, das eine der ursprünglichen Norm äquivalente Norm definiert und für das alle Operatoren T_g unitär sind.*

Beweis. Wir setzen für $x,\ y \in \mathfrak{H}$

$$\langle x, y\rangle_1 = \int \langle T_g x, T_g y\rangle \, d\mu(g).$$

Dieses Skalarprodukt genügt allen Axiomen; insbesondere folgt aus

$$\langle x, x\rangle_1 = \int \langle T_g x, T_g x\rangle \, d\mu(g) = 0$$

die Beziehung $\langle T_g x, T_g x\rangle \equiv 0$, denn $\langle T_g x, T_g x\rangle$ ist nichtnegativ und eine stetige Funktion von g. Setzen wir $g = e$, so erhalten wir

$$\langle x, x\rangle = \langle T_e x, T_e x\rangle = 0, \qquad x = 0.$$

Ferner ergibt sich aus der Invarianz des Maßes $d\mu(g)$

$$\begin{aligned}\langle T_{g_0} x, T_{g_0} y\rangle_1 &= \int \langle T_g T_{g_0} x, T_g T_{g_0} y\rangle \, d\mu(g)\\ &= \int \langle T_{g g_0} x, T_{g g_0} y\rangle \, d\mu(g)\\ &= \int \langle T_g x, T_g y\rangle \, d\mu(g) = \langle x, y\rangle_1.\end{aligned}$$

Folglich ist für das Skalarprodukt $\langle x, y\rangle_1$ der Operator T_{g_0} unitär. Setzen wir

$$C = \sup_{g \in \mathfrak{G}} |T_g|,$$

wobei $|T_g|$ die Norm des Operators T_g im Skalarprodukt $\langle x, y\rangle$ ist, so finden wir die Beziehung

$$|x|_1^2 = \langle x, x\rangle_1 = \int |T_g x|^2 \, d\mu(g) \leqq C^2 |x|^2 \int d\mu(g) = C^2 |x|^2.$$

Da andererseits die Ungleichung

$$|x|^2 \leqq C^2 |x|_1^2$$

folgt, wenn wir

$$|x|^2 = |T_{g^{-1}} T_g x|^2 \leqq C^2 |T_g x|^2$$

nach g integrieren, sind die Normen $|x|$ und $|x|_1$ äquivalent.

Im folgenden wollen wir nur unitäre Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ untersuchen. Nach der allgemeinen Theorie (vgl. § 29, Nr. 2) werden die unitären Darstellungen einer Gruppe $\mathfrak{G}$ durch die Darstellungen[1]) ihrer Gruppenalgebra oder, was dasselbe ist, durch die Darstellungen

$$x \to A_x, \quad A_x = \int x(g)\, U_g\, d\mu(g), \tag{1}$$

der Algebra $L^1(\mathfrak{G})$ vollkommen beschrieben. Da $\mathfrak{G}$ bikompakt ist, folgt $L^2(\mathfrak{G}) \subset L^1(\mathfrak{G})$. Somit erzeugt jede unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ auch eine Darstellung der Algebra $L^2(\mathfrak{G})$. Umgekehrt ergibt sich jede Darstellung $x \to A_x$ von $L^2(\mathfrak{G})$, die keine ausgeartete Darstellung enthält, mit Hilfe von (1) aus einer unitären Darstellung von $\mathfrak{G}$. Um sich hiervon zu überzeugen, braucht man nur die Überlegungen aus § 29, Nr. 2, für die Algebra $L^2(\mathfrak{G})$ zu wiederholen. Deshalb genügt es, die Darstellungen von $L^2(\mathfrak{G})$ zu untersuchen.

Theorem 3. *Jede nicht ausgeartete Darstellung $x \to A_x$ einer* Hilbert*schen Algebra R läßt sich eindeutig in die direkte Summe von Darstellungen zerlegen, die eineindeutige Darstellungen von minimalen zweiseitigen Idealen I_α von R sind.*

Beweis. Wir bezeichnen mit H den Raum der betrachteten Darstellung und mit H_α die abgeschlossene lineare Hülle aller Vektoren $A_x\xi$, $\xi \in H$, $x \in I_\alpha$. Einige der H_α sind eventuell gleich (0). Wir betrachten nur die $H_\alpha \neq (0)$. Sämtliche Teilräume H_α sind dann zueinander orthogonal.

Es seien I_α, I_β zwei verschiedene, also orthogonale minimale zweiseitige Ideale der Algebra R. Für $x \in I_\alpha$, $y \in I_\beta$ ist $x^* y = 0$ und infolgedessen für $\xi, \eta \in H$

$$\langle A_x \xi, A_y \eta \rangle = \langle \xi, A_{x^* y} \eta \rangle = 0.$$

Der invariante Teilraum $\mathfrak{N} \subset H$ aller Vektoren, für die alle Operatoren A_x verschwinden, kann ungleich (0) sein. Dann gibt es in $H - \mathfrak{N}$ keinen solchen Teilraum. Wir können offenbar annehmen, daß dieser Übergang von H zu $H - \mathfrak{N}$ schon ausgeführt ist und in H selbst kein Teilraum $\mathfrak{N} \neq (0)$ liegt. Dann ist H die direkte Summe aller H_α, und die ursprüngliche Darstellung von R ist die direkte Summe der Darstellungen der Ideale I_α in den Räumen H_α. Diese Darstellungen sind Isomorphismen, denn die I_α sind einfache Algebren.

Ist x_α die Projektion des Elements $x \in R$ auf I_α, so gilt $A_x\xi = A_{x_\alpha}\xi$ für $\xi \in H_\alpha$. Für $\xi = A_y\eta$, $y \in I_\alpha$, $\eta \in H$, ist nämlich

$$A_{x - x_\alpha}\xi = A_{x - x_\alpha} A_y \eta = A_{(x - x_\alpha) y}\, \eta = 0$$

wegen $(x - x_\alpha) y = 0$; da die lineare Hülle der Vektoren $A_y\eta$ in H dicht ist, gilt $A_{x - x_\alpha}\xi = 0$ für alle $\xi \in H_\alpha$, d. h., es ist $A_x\xi = A_{x_\alpha}\xi$ für $\xi \in H_\alpha$.

[1]) Wir erinnern daran, daß wir nur symmetrische Darstellungen symmetrischer Algebren betrachten.

In dem eben bewiesenen Satz sind die Darstellungen der Ideale I_α in H_α im allgemeinen reduzibel. Daher werden wir uns im folgenden mit einer eineindeutigen Darstellung einer einfachen Algebra I_α beschäftigen.

Es sei I eines der Ideale I_α. Auf Grund der weiteren Anwendungen auf bikompakte Gruppen wollen wir zusätzlich annehmen, daß I endlichdimensional ist. Dann gibt es in dem Ideal I eine orthogonale Basis von Elementen p_{jk} $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$, die den Bedingungen

$$p_{jk}^* = p_{kj}, \quad \langle p_{jk}, p_{jk}\rangle = \langle p_{11}, p_{11}\rangle, \quad p_{jk}p_{j_1k_1} = \begin{cases} p_{jk_1} & \text{für } k = j_1, \\ 0 & \text{für } k \neq j_1 \end{cases} \tag{2}$$

genügt, und die reguläre Linksdarstellung

$$T_a x \to a x, \quad x \in I p_{11},$$

ist ein symmetrischer Isomorphismus der Algebra I auf die Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$ aller linearen Operatoren im endlichdimensionalen HILBERTschen Raum $\mathfrak{H}_n = I p_{11}$ (vgl. § 25, Nr. 5).

Die Darstellung $x \to A_x$ von I ist somit auch eine Darstellung der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$.

Nun ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$ ein Spezialfall der Algebra aller vollstetigen Operatoren. Auf Grund von Theorem 2 aus § 22 ist jede Darstellung dieser Algebra eine direkte Summe irreduzibler Darstellungen, deren jede der identischen oder der Nulldarstellung äquivalent ist. So erhalten wir das folgende Ergebnis.

Theorem 4. *Jede irreduzible unitäre Darstellung einer bikompakten Gruppe ist endlichdimensional. Jede unitäre Darstellung einer bikompakten Gruppe ist die direkte orthogonale Summe ihrer irreduziblen (und folglich endlichdimensionalen) Darstellungen.*

Wir untersuchen jetzt eine der irreduziblen Darstellungen $g \to U_g$ der bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$. Infolge des oben Erwähnten läßt sich die durch die unitäre Darstellung $g \to U_g$ erzeugte Darstellung $x \to A_x$ der Algebra $L^2(\mathfrak{G})$ auf die Darstellung eines minimalen zweiseitigen Ideals I dieser Algebra, also auf die Darstellung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$ mit $\mathfrak{H}_n = I p_{11}$ zurückführen. Die letzte Darstellung ist ihrerseits der identischen Darstellung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$ äquivalent. Folglich können wir annehmen, daß die Darstellung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$ bis auf eine unitäre Äquivalenz gleich der identischen Darstellung von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}_n)$ ist.

Das bedeutet, daß für $a, x \in I$, $\xi = x p_{11}$ die Beziehung

$$A_a \xi = a \xi,$$

also

$$U_{g_0} A_a \xi = a_{g_0} \xi = a \xi_{g_0} \tag{3}$$

gilt, wobei $a_{g_0}(g) = a(g_0^{-1} g)$, $\xi_{g_0}(g) = \xi(g_0^{-1} g)$ ist.

Setzen wir in (3) $a = p$, wobei $p = p_{11} + p_{22} + \cdots + p_{nn}$ das Einselement von I ist, so erhalten wir

$$U_{g_0} \xi = \xi_{g_0}, \quad \text{also} \quad U_{g_0} \xi(g) = \xi(g_0^{-1} g). \tag{4}$$

Hieraus ergibt sich der folgende Satz.

I. *Jede irreduzible Darstellung einer bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$ kann durch die Darstellung eines minimalen Linksideals von $L^2(\mathfrak{G})$ realisiert werden, und zwar so, daß die Operatoren der Darstellung zu Operatoren der Linksverschiebung werden.*

Die Funktionen $p_{11}(g)$, $p_{21}(g)$, ..., $p_{n1}(g)$ bilden eine orthogonale und die Funktionen

$$\frac{1}{\omega}p_{11}(g),\quad \frac{1}{\omega}p_{21}(g),\ldots,\frac{1}{\omega}p_{n1}(g) \qquad (\omega=\sqrt{\langle p_{11},p_{11}\rangle}) \tag{5}$$

wegen (2) eine orthonormale Basis in Ip_{11}.

Es sei $\|c_{jk}(g)\|$ die Matrix des Operators U_g in der Basis (5), so daß wegen (4)

$$\frac{1}{\omega}p_{j1}(g_0^{-1}g)=\sum_{k=1}^{n}c_{kj}(g_0)\frac{1}{\omega}p_{k1}(g)$$

ist. Hieraus und aus (2) erhalten wir

$$\begin{aligned}c_{kj}(g_0)&=\frac{1}{\omega^2}\int p_{j1}(g_0^{-1}g)\overline{p_{k1}(g)}\,d\mu(g)\\ &=\frac{1}{\omega^2}\overline{\int p_{k1}(g)\,p_{1j}(g^{-1}g_0)\,d\mu(g)}=\frac{1}{\omega^2}\overline{p_{kj}(g_0)}.\end{aligned} \tag{6}$$

Wir wollen nun ω bestimmen. Dazu bemerken wir, daß, da die Matrix $\|c_{jk}(g)\|$ unitär ist,

$$\sum_{j=1}^{n}|c_{kj}(g)|^2=1$$

und infolge von (6)

$$\frac{1}{\omega^4}\sum_{j=1}^{n}|p_{kj}(g)|^2=1$$

ist. Integrieren wir diese Gleichung unter Berücksichtigung von (2) und der Definition von ω, so ergibt sich $\omega^{-2}n=1$, also $\omega^2=n$. Somit gilt der folgende Satz.

II. *Die Matrizenelemente $c_{kj}(g)$ der irreduziblen unitären Darstellung $g\to U_g$ einer bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$ werden in der orthonormalen Basis $n^{-\frac{1}{2}}p_{11}$, $n^{-\frac{1}{2}}p_{21}$, ..., $n^{-\frac{1}{2}}p_{n1}$ durch die Formel*

$$c_{kj}(g)=\frac{1}{n}\overline{p_{kj}(g)} \qquad (j,k=1,2,\ldots,n) \tag{7}$$

gegeben.

Die Funktion

$$\chi(g)=c_{11}(g)+c_{22}(g)+\cdots+c_{nn}(g)=\frac{1}{n}\left(\overline{p_{11}(g)}+\overline{p_{22}(g)}+\cdots+\overline{p_{nn}(g)}\right),$$

d. h. die Spur der Matrix $\|c_{jk}(g)\|$, heißt der *Charakter* der gegebenen irreduziblen Darstellung $g\to U_g$. Diese Definition besagt, daß unitär-äquivalente

Darstellungen ein und denselben Charakter besitzen und der Charakter $\chi(g)$ dem Zentrum eines durch die gegebene Darstellung definierten minimalen zweiseitigen Ideals I angehört. Dabei ist

$$\chi(e) = c_{11}(e) + c_{22}(e) + \cdots + c_{nn}(e) = 1 + 1 + \cdots + 1 = n,$$

so daß $\chi(g) \neq 0$ ist.

Andererseits sind zwei verschiedene minimale zweiseitige Ideale I_α, I_β und somit auch die Charaktere $\chi_\alpha(g)$, $\chi_\beta(g)$ der entsprechenden irreduziblen Darstellungen zueinander orthogonal. Daraus folgt $\chi_\alpha(g) \neq \chi_\beta(g)$. Wir können also schließen, daß die entsprechenden irreduziblen Darstellungen nicht äquivalent sind, und erhalten so den folgenden Satz.

Theorem 5. *Ist $\mathfrak{G}$ eine bikompakte Gruppe, so definiert jedes minimale zweiseitige Ideal $I_\alpha \subset L^2(\mathfrak{G})$ eine irreduzible unitäre Darstellung $g \to U_g^{(\alpha)}$ der Gruppe $\mathfrak{G}$, und jede irreduzible unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$ ist einer der Darstellungen $g \to U_g^{(\alpha)}$ äquivalent. Die Darstellungen $g \to U_g^{(\alpha)}$, die verschiedenen Idealen I_α entsprechen, sind nicht äquivalent, und die ihnen entsprechenden Charaktere sind orthogonal. Die Matrizenelemente $c_{jk}^{(\alpha)}(g)$ dieser Darstellungen bilden ein vollständiges Orthogonalsystem in $L^2(\mathfrak{G})$.*

Die letzte Behauptung dieses Satzes folgt aus (7), denn die p_{kj} bilden eine orthogonale Basis in dem zugehörigen Ideal I_α, und $L^2(\mathfrak{G})$ ist die orthogonale Summe der I_α.

Daraus ergibt sich auch, daß für zwei nichtäquivalente irreduzible Darstellungen $g \to \|c_{jk}(g)\|$ und $g \to \|c'_{jk}(g)\|$ die Beziehungen

$$\int c_{jk}(g)\, \overline{c'_{j'k}(g)}\, d\mu(g) = 0 \tag{8}$$

und

$$\int c_{jk}(g)\, \overline{c_{j'k'}(g)}\, d\mu(g) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} & \text{für } j = j',\ k = k', \\ 0 & \text{für } j \neq j' \text{ oder } k \neq k' \end{cases} \tag{9}$$

gelten, wobei n die Dimension der Darstellung ist.

Die Beziehungen (8) und (9) heißen *Orthogonalitätsrelationen*. Aus ihnen und der letzten Behauptung von Theorem 5 folgt

$$\int |x(g)|^2\, d\mu(g) = \sum_\alpha \sum_{j,k=1}^{n_\alpha} n_\alpha \left| \int x(g)\, c_{jk}^{(\alpha)}(g)\, d\mu(g) \right|^2 \tag{10}$$

für jede Funktion $x(g) \in L^2(\mathfrak{G})$. Da die Zahlen $x_{kj}^{(\alpha)} = \int x(g) c_{jk}^{(\alpha)}(g) d\mu(g)$ Matrizenelemente des Operators

$$T_x^{(\alpha)} = \int x(g)\, U_g^{(\alpha)}\, d\mu(g) \tag{11}$$

in der Basis $n_\alpha^{-\frac{1}{2}} p_{11}, n_\alpha^{-\frac{1}{2}} p_{21}, \ldots, n_\alpha^{-\frac{1}{2}} p_{n_\alpha 1}$ sind, ist die Summe

$$\sum_{j,k=1}^{n_\alpha} |x_{kj}^{(\alpha)}|^2 = \sum_{j,k-1}^{n_\alpha} \left| \int x(g)\, c_{jk}^{(\alpha)}(g)\, d\mu(g) \right|^2$$

gleich der Spur $S(T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*})$ des Operators $T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*}$, und die Formel (10) nimmt die Gestalt

$$\int |x(g)|^2 \, d\mu(g) = \sum_\alpha n_\alpha S(T_x^{(\alpha)} T_x^{(\alpha)*}) \tag{12}$$

an. Dies ist die PLANCHEREL*sche Formel für eine bikompakte Gruppe.* Wir können sie als Analogon zur PLANCHERELschen Formel für eine kommutative Gruppe auffassen. Dabei spielt jetzt der Übergang von der Funktion $x(g)$ zum Operator $T_x^{(\alpha)}$ gemäß (11) die Rolle der FOURIERtransformation.

3. Das Tensorprodukt von Darstellungen. Es seien $g \to U_g$ und $g \to U'_g$ Darstellungen der Gruppe $\mathfrak{G}$ in den endlichdimensionalen Räumen R_n der Dimension n bzw. R'_m der Dimension m. Wir nehmen an, daß die Räume R_n, R'_m die Räume aller Systeme

$$x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \quad \text{bzw.} \quad y = \{y_1, y_2, \ldots, y_m\}$$

von komplexen Zahlen $x_1, x_2, \ldots, x_n, y_1, y_2, \ldots, y_m$ sind. In ihnen seien die gewöhnlichen Verknüpfungsrelationen definiert und die Operatoren der Darstellungen in Form der linearen Transformationen

$$x'_j = \sum_{k=1}^n u_{jk}(g)\, x_k, \quad y'_\mu = \sum_{\nu=1}^m u'_{\mu\nu}(g)\, y_\nu \qquad (j = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots, m) \tag{1}$$

in diesen Räumen gegeben (vgl. § 1, Nr. 2 und 5).

Wir bezeichnen mit R_{nm} den Vektorraum der Dimension nm, der aus allen Systemen $x = \{x_{j\mu}\}$ $(j = 1, 2, \ldots, n;\ \mu = 1, 2, \ldots, m)$ von komplexen Zahlen $x_{j\mu}$ besteht und in dem die Operationen wie üblich durch die Formeln

$$\lambda x = \{\lambda x_{j\mu}\}, \quad x + y = \{x_{j\mu} + y_{j\mu}\}$$

definiert sind; dabei ist $x = \{x_{j\mu}\}$, $y = \{y_{j\mu}\}$. Die lineare Transformation

$$x'_{j\mu} = \sum_{k=1}^n \sum_{\nu=1}^m u_{jk}(g)\, u'_{\mu\nu}(g)\, x_{k\nu} \tag{2}$$

nennen wir das *Tensorprodukt* $U_g \times U_g^0$ der Operatoren U_g, U'_g [d. h. der Transformationen (1)].

Die Zuordnung $g \to U_g \times U'_g$ *ist eine Darstellung der Gruppe* $\mathfrak{G}$; denn dem Produkt $g_1 g_2$ entspricht eine Anwendung der Transformationen (1) zuerst für $g = g_2$ und dann für $g = g_1$, d. h., eine Anwendung der Transformation (2) zuerst für $g = g_2$ und dann für $g = g_1$.

Die Darstellung $g \to U_g \times U'_g$ heißt *Tensor-* (oder KRONECKER-) *Produkt* der Darstellungen $g \to U_g$, $g \to U'_g$.

Nun seien die Darstellungen $g \to U_g$, $g \to U'_g$ unitär. Ohne Beschränkung der Allgemeinheit können wir annehmen, daß die Skalarprodukte in R_n, R'_m durch die Formeln

$$\langle x, x' \rangle = \sum_{k=1}^n x_k \overline{x'_k} \quad \text{bzw.} \quad \langle y, y' \rangle = \sum_{\mu=1}^m y_\mu \overline{y'_\mu}$$

gegeben werden. Definieren wir im R_{nm} das Skalarprodukt durch

$$\langle x, x' \rangle = \sum_{k=1}^n \sum_{\mu=1}^m x_{k\mu} \overline{x'_{k\mu}},$$

so zeigt eine einfache Rechnung, daß dann die Tensordarstellung $g \to U_g \times U'_g$ eine unitäre Darstellung im R_{nm} ist. Sind die Darstellungen $g \to U_g$, $g \to U'_g$ irreduzibel, so ist im allgemeinen die Darstellung $g \to U_g \times U'_g$ nicht mehr irreduzibel. Eine der wichtigsten Auf-

gaben, die in der theoretischen Physik Anwendung finden, ist die Bestimmung von zwei verschiedenen Gruppen von Formeln, die die Zerlegung eines Tensorprodukts von zwei irreduziblen Darstellungen in irreduzible Darstellungen geben.

4. Der Dualitätssatz für bikompakte Gruppen. Es sei jetzt $\mathfrak{G}$ eine bikompakte Gruppe. Sind $g \to U(g)$ und $g \to V(g)$ zwei endlichdimensionale unitäre Darstellungen von $\mathfrak{G}$, so ist ihr Tensorprodukt $g \to U(g) \times V(g)$ ebenfalls eine unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$. Daraus folgt, daß die lineare Hülle R der Matrizenelemente aller endlichdimensionalen unitären Darstellungen von $\mathfrak{G}$ eine kommutative Algebra von Funktionen auf $\mathfrak{G}$ mit den üblichen Operationen bildet. Diese Algebra heißt *darstellende Algebra*[1]) der Gruppe $\mathfrak{G}$.

Ist $g \to \|u_{jk}(g)\|$ eine in Matrizenform gegebene unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$, so ist die Zuordnung $g \to \|\overline{u_{jk}(g)}\|$, wobei $\overline{u_{jk}(g)}$ die zu $u_{jk}(g)$ konjugiert komplexe Funktion ist, ebenfalls eine unitäre Darstellung von $\mathfrak{G}$. Somit enthält die darstellende Algebra R zu jeder Funktion auch deren konjugiert komplexe.

Wir untersuchen nun die in Nr. 2 konstruierten irreduziblen Darstellungen $g \to U_g^{(\alpha)}$ oder, in Matrizenform, $g \to \|c_{jk}^{(\alpha)}(g)\|$. Jede endlichdimensionale unitäre Darstellung $g \to U_g$ ist der direkten Summe endlich vieler Darstellungen $g \to \|c_{jk}^{(\alpha)}(g)\|$ äquivalent. Aus diesem Grund bilden die Matrizenelemente $c_{jk}^{(\alpha)}(g)$ eine Basis in R. Insbesondere ist das Tensorprodukt $g \to U_g^{(\alpha)} \times U_g^{(\beta)}$ äquivalent der direkten Summe einiger Darstellungen $g \to U_g^{(\alpha)}$. Symbolisch können wir dies in der Form

$$U_g^{(\alpha)} \times U_g^{(\beta)} = S^{-1}(U_g^{(\alpha_1)} \dotplus U_g^{(\alpha_2)} \dotplus \cdots \dotplus U_g^{(\alpha_p)})\, S \tag{1}$$

schreiben; dabei ist S eine unitäre Matrix, deren Elemente Zahlen sind, und $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ sind einige Werte des Index α. Ferner hängen S, p und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_p$ von α und β ab. Aus (1) folgt

$$\chi_\alpha(g)\, \chi_\beta(g) = \chi_{\alpha_1}(g) + \chi_{\alpha_2}(g) + \cdots + \chi_{\alpha_p}(g), \tag{2}$$

wobei $\chi_\beta(g)$ der Charakter der Darstellung $g \to U_g^{(\beta)}$ ist. Integrieren wir (2), so erhalten wir

$$\int \chi_\alpha(g)\, \chi_\beta(g)\, d\mu(g) = \int \chi_{\alpha_1}(g)\, d\mu(g) + \int \chi_{\alpha_2}(g)\, d\mu(g) + \cdots + \int \chi_{\alpha_p}(g)\, d\mu(g). \tag{3}$$

Nach dem in Nr. 2 Bewiesenen ist die linke Seite von (3) gleich Eins oder Null, je nachdem, ob die Beziehungen $c_{jk}^{(\beta)}(g) = \overline{c_{jk}^{(\alpha)}(g)}$ gelten oder nicht. Ferner ist das Integral $\int \chi_\alpha(g)\, d\mu(g)$ gleich Eins oder Null, je nachdem, ob die Darstellung $g \to U_g^{(\alpha)}$ eine Einsdarstellung ist oder nicht. Dabei heißt eine Darstellung $g \to U_g$ eine *Einsdarstellung*, wenn U_g der Einsoperator in einem eindimensionalen Raum für jedes $g \in \mathfrak{G}$ ist. Offenbar ist der Charakter einer Einsdarstellung identisch gleich Eins.

Aus diesen Überlegungen folgt, daß die rechte Seite von (1) dann und nur dann genau einen Einsoperator enthält, wenn $c_{jk}^{(\beta)}(g) = \overline{c_{jk}^{(\alpha)}(g)}$ ist.

Eine symmetrische kommutative Algebra R ist eine *quadratische Blockalgebra*, wenn in ihr eine Basis existiert, die in durchschnittsfremde Mengen U_α bezüglich n_α^2 Elementen zerlegt werden kann, die als quadratische Matrizen $U_\alpha = \|u_{jk}^{(\alpha)}\|$ $(j, k = 1, 2, \ldots, n)$ angeordnet sind, und zwar so, daß dabei die folgenden Bedingungen erfüllt sind:

a) Unter den Mengen U_α gibt es eine, die nur das Einselement e enthält;

b) jeder Menge U_α entspricht eine unitäre Zahlenmatrix S_α der Ordnung n_α derart, daß $S_\alpha^{-1}\|u_{jk}^{(\alpha)*}\| S_\alpha$ wieder eine der Mengen U_α ist;

[1]) Wir halten uns hier an die in der Algebra übliche Terminologie und benutzen statt des Ausdrucks „Ring" die Bezeichnung „Algebra".

c) für je zwei Mengen U_α, U_β existiert eine unitäre Zahlenmatrix $S_{\alpha\beta}$ derart, daß

$$U_\alpha \times U_\beta = S_{\alpha\beta}^{-1}(U_{\alpha_1} + U_{\alpha_2} + \cdots + U_{\alpha_p}) S_{\alpha\beta} \tag{4}$$

für gewisse $\alpha_1, \ldots, \alpha_p$ gilt;[1])

d) die Menge $\{e\}$ ist entweder überhaupt nicht oder genau einmal in der rechten Seite von (4) enthalten. Der letzte Fall tritt genau für $\|u_{jk}^{(\beta)}\| = S_\alpha^{-1}\|u_{jk}^{(\alpha)*}\| S_\alpha$ ein;

e) für jede Menge $U_\alpha = \|u_{jk}^{(\alpha)}\|$ gilt die Bedingung

$$\| u_{jk}^{(\alpha)} \| \cdot \| u_{jk}^{(\alpha)*} \| = \| \delta_{jk} e \| \tag{5}$$

mit

$$\delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k, \\ 0 & \text{für } j \neq k. \end{cases}$$

Die Mengen U_α heißen *Blöcke* oder *Blockmatrizen* der gegebenen Blockalgebra.

Die vorhergehenden Überlegungen zeigen, daß *die darstellende Algebra einer bikompakten Gruppe eine quadratische Blockalgebra ist.*

Es sei nun R eine beliebige quadratische Blockalgebra. Ein Funktional $f(x)$ über R heißt *elementar*, wenn es einen symmetrischen Homomorphismus der Algebra in den Körper der komplexen Zahlen vermittelt.

Auf Grund von (5) erzeugt jedes elementare Funktional f eine Abbildung $c_{jk}^{(\alpha)} = f(u_{jk}^{(\alpha)})$ der Blöcke U_α in unitäre Matrizen, $f(U_\alpha) = \|c_{jk}^{(\alpha)}\|$, die ebenso wie die Blöcke die Beziehungen (4) erfüllen. Umgekehrt wird jede Abbildung $U_\alpha \to f(U_\alpha)$ der Blöcke in unitäre Matrizen n_α-ter Ordnung, die den Beziehungen (4) genügen, durch ein bestimmtes elementares Funktional erzeugt. Wir können daher das Produkt $f_1 f_2$ zweier elementarer Funktionale definieren, indem wir $f = f_1 f_2$ setzen, wenn $f(U_\alpha) = f_1(U_\alpha) f_2(U_\alpha)$ für alle U_α ist. Es läßt sich leicht nachweisen, daß bei dieser Definition der Multiplikation die Gesamtheit $\mathfrak{G}(R)$ aller elementaren Funktionale über R eine Gruppe bildet. Dabei tritt als Einselement der Gruppe $\mathfrak{G}(R)$ das Funktional f auf, das jedem U_α die Einheitsmatrix der Ordnung n_α zuordnet. In $\mathfrak{G}(R)$ läßt sich eine Topologie einführen, indem wir als Basis von Umgebungen alle möglichen Mengen von Funktionalen $f \in \mathfrak{G}(R)$ wählen, die den Ungleichungen

$$|f(U_{\alpha_k}) - f_0(U_{\alpha_k})| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

für alle möglichen festen $\varepsilon > 0$ und $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ genügen.

Wir sehen leicht, daß dann $\mathfrak{G}(R)$ eine topologische Gruppe ist. Außerdem folgt aus analogen Überlegungen wie im Beweis zu Theorem 2 aus § 11, daß $\mathfrak{G}(R)$ bei dieser Definition der Topologie ein bikompakter Raum, also eine bikompakte topologische Gruppe, die *darstellende Gruppe* der Blockalgebra R ist.

Es zeigt sich, daß die so hergestellte Zuordnung zwischen bikompakten Gruppen und quadratischen Blockalgebren im folgenden Sinn dual ist.

Theorem 6 (Kreinscher Dualitätssatz; vgl. Krein [8, 9])[2]). *Ist $\mathfrak{G}$ eine bikompakte Gruppe und R ihre darstellende Algebra, so ist die darstellende Gruppe $\mathfrak{G}(R)$ von R topologisch isomorph der Gruppe $\mathfrak{G}$. Der Isomorphismus zwischen $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{G}(R)$ wird durch die Formel*

$$f(U_\alpha) = \|c_{jk}^{(\alpha)}(g)\|$$

hergestellt; dabei ist $g \to \|c_{jk}^{(\alpha)}(g)\|$ die dem Block U_α von R entsprechende irreduzible Darstellung von $\mathfrak{G}$.

---

[1]) $U_\alpha \times U_\beta$ bezeichnet die Matrix $\|u_{jk}^{(\alpha)} u_{\mu\nu}^{(\beta)}\|$. Somit gibt die Formel (4) eine Regel zur Multiplikation von Basiselementen und infolgedessen auch von beliebigen Elementen der Algebra R an.

[2]) Für den Beweis dieses Satzes verweisen wir den Leser auf die Arbeit von Krein [9]; wir weisen darauf hin, daß der erste Teil dieses Satzes schon früher und von Krein unabhängig von dem japanischen Mathematiker Tannaka [1] gefunden wurde.

Ist R eine quadratische Blockalgebra und $\mathfrak{G} = \mathfrak{G}(R)$ ihre darstellende Gruppe, so läßt sich zwischen R und der darstellenden Algebra $R(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$ ein symmetrischer Isomorphismus herstellen, der die Blöcke U_α von R in das vollständige System $g \to \|c_{jk}^{(\alpha)}(g)\|$ der irreduziblen Darstellungen von $\mathfrak{G}$ überführt.

Diesen Satz können wir als Analogon zum PONTRJAGINschen Dualitätssatz (vgl. § 31, Nr. 6) für eine kommutative lokal bikompakte Gruppe auffassen.

Die Ergebnisse aus § 28, § 29 und § 30, Nr. 1 und 2, stammen in der Hauptsache von GELFAND, RAIKOW und NEUMARK (vgl. GELFAND und RAIKOW [2], GELFAND und NEUMARK [2–4, 6], NEUMARK [2]; einige wurden später unabhängig auch von GODEMENT [3] und von SEGAL [4] gefunden), die aus § 30, Nr. 3–5, von GELFAND und RAIKOW [2] (vgl. auch RAIKOW [7]) sowie GODEMENT [3], die aus § 31, Nr. 1–3 und 6, von GELFAND und RAIKOW [1] (vgl. auch RAIKOW [2, 3, 5]), die aus § 31, Nr. 10, von GELFAND [1], die aus § 31, Nr. 4, von KREIN [7] und die aus § 32, Nr. 4, von TANNAKA [1] und KREIN [8, 9]. Unabhängig davon und etwas früher fand WEIL [1] die in § 31, Nr. 4, angegebenen Resultate, benutzte jedoch in ihrem Beweis die Sätze von PONTRJAGIN-VAN KAMPEN über die Struktur kommutativer lokal bikompakter Gruppen (vgl. auch POWSNER [1, 4]).

Eine Verallgemeinerung des PLANCHERELschen Satzes auf die Gruppe aller komplexen unimodularen[1]) Matrizen zweiter und auch n-ter Ordnung findet sich in Arbeiten von GELFAND und NEUMARK (vgl. RAIKOW [4, 5, 7]). Dieses Ergebnis wurde von GELFAND und NEUMARK später auch auf andere nichtkommutative Gruppen übertragen (vgl. GELFAND und GRAJEW [1], HARISH-CHANDRA [2, 5], SEGAL [8]).

KREIN [9] entwickelte die Theorie der positiv definiten Kerne und der durch sie erzeugten Algebren, indem er die Theorie der positiv definiten Funktionen verallgemeinerte. Die Übertragung einiger GELFANDscher und RAIKOWscher Ergebnisse auf eine Gruppe, die das direkte Produkt einer bikompakten und einer lokal bikompakten kommutativen Gruppe ist, gelang LUBARSKI [1].

LEWITAN [1] beschäftigte sich mit der Theorie der verallgemeinerten Verschiebungen (vgl. § 31, Nr. 11), die von LEWITAN und POWSNER auf STURM-LIOUVILLEsche Differentialoperatoren (§ 31, Nr. 11) angewendet wurde (vgl. LEWITAN [1–8], LEWITAN und POWSNER [2, 3, 7]).

Theorem 6 aus § 31 wurde von NEUMARK [1] angegeben; es wurde jedoch unabhängig davon und etwas später auch in anderen Arbeiten erwähnt (vgl. etwa AMBROSE [1]).

Die Sätze vom TAUBERschen Typ erhielt GODEMENT [2] mit Hilfe einiger Ergebnisse von GELFAND und SCHILOW (vgl. § 15).

Die Darstellungstheorie für bikompakte Gruppen entwickelten PETER und WEIL [1].

---

[1]) Die Determinante einer solchen Matrix ist gleich Eins.

KAPITEL VII

ALGEBREN VON OPERATOREN EINES HILBERTSCHEN RAUMES

§ 33. Verschiedene Topologien der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$

Es sei $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ wie früher die Algebra aller beschränkten linearen Operatoren eines festen HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}$. In $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ können Topologien gegeben werden, die $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ zu einer topologischen Algebra machen.

Wir wollen die wichtigsten dieser Topologien betrachten.

1. Schwache Topologie. In § 8, Nr. 3, Beispiel 2, nannten wir die Gesamtheit derjenigen Operatoren $A \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, die den Ungleichungen

$$|\langle (A-A_0) f_k, \varphi_k\rangle| < \varepsilon \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

mit gegebenem $\varepsilon > 0$ und festen $f_1, \ldots, f_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n \in \mathfrak{H}$ genügen, eine *schwache Umgebung* und bezeichneten sie mit $U(A_0; f_1, \ldots, f_n, \varphi_1, \ldots, \varphi_n; \varepsilon)$. Diejenige Topologie, für die diese Umgebungen eine Basis bilden, heißt *schwache Topologie* in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Es läßt sich leicht zeigen, daß $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit dieser Topologie eine topologische Algebra bildet.

Wegen $|\langle (A-A_0) f_k, \varphi_k\rangle| = |\langle (A^*-A_0^*)\varphi_k, f_k\rangle|$ ist der Übergang von A zu A^* in der schwachen Topologie stetig.

In dieser Topologie bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle einer Menge $S \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit $\bar{S}^1$.

2. Starke Topologie. Sind $\varphi_1, \ldots, \varphi_s$ Elemente des Raumes $\mathfrak{H}$ und ist ε eine positive Zahl, so nennen wir die Gesamtheit derjenigen Operatoren A, die den Ungleichungen

$$|(A-A_0) f_k| < \varepsilon \qquad (k=1, \ldots, s)$$

genügen, eine *starke Umgebung* $V(A_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s; \varepsilon)$ des Operators A_0 und die Topologie, für die die Umgebungen $V(A_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s; \varepsilon)$ eine Basis bilden, die *starke Topologie* in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$.

Die abgeschlossene Hülle einer Menge $S \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ in der starken Topologie bezeichnen wir mit $\bar{S}^2$.

Konvergiert in dieser Topologie die Folge A_n gegen A, d. h., strebt $|A_n f - A f|$ für jeden Vektor $f \in \mathfrak{H}$ gegen Null, so nennen wir diese Folge *stark* konvergent und den Operator A den *starken Limes* der Folge A_n. Auch in dieser Topologie ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ein HAUSDORFFscher topologischer Raum, und die Ausdrücke αA, $A+B$ und AB sind stetig (der letzte für einen festen Faktor). Folglich ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ in dieser Topologie eine topologische Algebra. Der Übergang von A zu A^* ist hier jedoch nicht immer stetig.

Um uns davon zu überzeugen, müssen wir zeigen, daß eine Folge von Operatoren A_n existiert, die stark gegen Null konvergiert, während A_n^* nicht stark gegen Null strebt. Ist beispielsweise $\mathfrak{H}$ separabel, so wählen wir, um eine solche Folge zu konstruieren, in $\mathfrak{H}$ eine orthonormale Basis $\{\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3, \ldots\}$, definieren einen beschränkten linearen Operator U durch die Gleichung

$$U\varphi_n = \varphi_{n-1} \quad (n = 2, 3, 4, \ldots), \quad U\varphi_1 = 0,$$

und setzen $A_n = U^n$. Ist f ein beliebiger Vektor aus $\mathfrak{H}$, so können wir

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_k, \quad \alpha_k = \langle f, \varphi_k \rangle, \quad \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 < \infty,$$

schreiben, und wir erhalten demzufolge

$$|A_n f|^2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k U^n \varphi_k \right|^2 = \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \alpha_k \varphi_{k-n} \right|^2 = \sum_{k=n+1}^{\infty} |\alpha_k|^2 \to 0.$$

Die Folge A_n strebt also stark gegen Null. Andererseits ist $U^* \varphi_n = \varphi_{n+1}$ und somit

$$|A_n^* f|^2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k U^{*n} \varphi_k \right|^2 = \left| \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \varphi_{k+n} \right|^2 = \sum_{k=1}^{\infty} |\alpha_k|^2 = |f|^2 > 0 \quad \text{für} \quad f \neq 0.$$

$A_n^* f$ strebt also nicht stark gegen Null, d. h., der Übergang von A zu A^* ist in der starken Topologie nicht stetig.

Die starke Topologie unterscheidet sich also von der schwachen Topologie darin, daß in der letzteren der Übergang von A zu A^* stetig ist. Ferner ist die starke Topologie stärker als die schwache, d. h., *jede schwache Umgebung enthält eine starke Umgebung*. Ist nämlich $U(A_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s, \psi_1, \ldots, \psi_s; \varepsilon)$ eine gegebene schwache Umgebung des Operators A_0, so enthält sie die starke Umgebung

$$V(A_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s; \delta), \quad \delta = \frac{\varepsilon}{\max(|\psi_1|, \ldots, |\psi_s|)},$$

von A_0; denn $A \in V(A_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s; \delta)$ bedeutet $|(A - A_0)\varphi_k| < \delta \ (k = 1, \ldots, s)$, und dann ist $|\langle (A - A_0)\varphi_k, \psi_k \rangle| \leq |(A - A_0)\varphi_k| |\psi_k| < \delta \max(|\psi_1|, \ldots, |\psi_s|) = \varepsilon$, d. h.

$$A \in U(A_0; \varphi_1, \ldots, \varphi_s, \psi_1, \ldots, \psi_s; \varepsilon).$$

Aus dem eben bewiesenen Satz folgt, daß jeder starke Häufungspunkt auch Häufungspunkt in der schwachen Topologie und daher $\bar{S}^2 \subset \bar{S}^1$ ist (vgl. § 2, Nr. 1 bis 3).

Die Umkehrung dieses Satzes gilt nicht, da die schwache Topologie nicht mit der starken übereinstimmt.

Die oben betrachtete Folge A_n läßt sich auch zum Beweis dafür benutzen, daß das Produkt AB in der schwachen Topologie nicht stetig in den beiden Veränderlichen A und B ist. Anderenfalls müßte nämlich die Folge $A_n A_n^*$ schwach gegen Null konvergieren, während $A_n A_n^* = 1$ ist.

Wir zeigen, daß auch in der starken Topologie das Produkt AB nicht in den beiden Veränderlichen A und B gleichzeitig stetig ist.

Dazu wählen wir ein Element f, dessen Norm gleich 1 ist, $|f| = 1$, und eine starke Umgebung $V(0; f; \varepsilon)$, $0 < \varepsilon < 1$, des Nulloperators und setzen

$$A_{n,\delta} = \frac{1}{\delta} A_n, \quad B_{n,\delta} = \delta A_n^*, \qquad \delta > 0.$$

Dann gilt

$$|A_{n,\delta} B_{n,\delta} f| = |A_n A_n^* f| = |f| = 1 > \varepsilon,$$

d. h.

$$A_{n,\delta} B_{n,\delta} \notin V(0; f; \varepsilon)$$

für alle n und δ. Andererseits haben wir mit $\delta < \frac{\varepsilon_2}{\max(|\psi_1|, \ldots, |\psi_q|)}$ für alle Umgebungen $V(0; \psi_1, \ldots, \psi_q; \varepsilon_2)$ und jedes n

$$|B_{n,\delta} \psi_k| = \delta |A_n^* \psi_k| = \delta |\psi_k| < \frac{\varepsilon_2}{\max(|\psi_1|, \ldots, |\psi_q|)} |\psi_k| \leqq \varepsilon_2,$$

d. h.

$$B_{n,\delta} \in V(0; \psi_1, \ldots, \psi_q; \varepsilon_2).$$

Wählen wir ferner ein n mit der Eigenschaft

$$|A_n \varphi_k| < \varepsilon_1 \delta \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

so ist

$$|A_{n,\delta} \varphi_k| < \varepsilon_1 \qquad (k = 1, 2, \ldots, p),$$

d. h.

$$A_{n,\delta} \in V(0; \varphi_1, \ldots, \varphi_p; \varepsilon_1).$$

Somit existieren in je zwei starken Umgebungen des Nulloperators solche $A_{n,\delta}$ und $B_{n,\delta}$, für die sich das Produkt $A_{n,\delta} B_{n,\delta}$ nicht in einer gegebenen Umgebung der Null befindet, d. h., AB ist nicht stark stetig für $A = 0$, $B = 0$.

3. Ultrastarke Topologie. Es seien $f_1, f_2, \ldots$ gegebene Elemente aus $\mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft $\sum_{k=1}^{\infty} |f_k|^2 < \infty$, und ε sei eine positive Zahl. Wir nennen dann die Gesamtheit aller Operatoren A, die der Ungleichung $\sum_{k=1}^{\infty} |(A - A_0) f_k|^2 < \varepsilon^2$ genügen, eine *ultrastarke Umgebung* des Operators A_0 und bezeichnen sie mit $W(A_0; f_1, f_2, \ldots; \varepsilon)$. Die Topologie in der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit den Umgebungen $W(A_0; f_1, f_2, \ldots; \varepsilon)$ als Basis heißt *ultrastark*. Die abgeschlossene Hülle der Menge S in der ultrastarken Topologie bezeichnen wir mit $\bar{S}^3$. Auch mit dieser Topologie ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ein Hausdorffscher Raum, und die Ausdrücke αA, $A + B$, AB sind bezüglich α, A, B stetig (AB jedoch nur, wenn einer der Faktoren konstant ist). Die Tatsache, daß AB auch in der ultrastarken Topologie nicht in beiden Faktoren gleichzeitig stetig ist, können wir beweisen, wenn wir wieder die Operatoren $A_{n,\delta}$ und $B_{n,\delta}$ betrachten.

Die ultrastarke Topologie ist stärker als die starke Topologie, d. h., jede starke Umgebung enthält eine ultrastarke Umgebung.

Beweis. Ist $V(A_0; f_1, \ldots, f_s; \varepsilon)$ eine gegebene starke Umgebung des Operators A_0, so gilt

$$W(A_0; f_1, \ldots, f_s; 0, \ldots; \varepsilon) \subset V(A_0; f_1, \ldots, f_s; \varepsilon);$$

denn aus der Ungleichung $\sum_{k=1}^{\infty} |(A - A_0) f_k|^2 < \varepsilon^2$ folgt

$$|(A - A_0) f_k| < \varepsilon \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

Also ist

$$\bar{S}^3 \subset \bar{S}^2.$$

Wir können uns leicht davon überzeugen, daß die ultrastarke Topologie nicht mit der starken Topologie übereinstimmt und infolgedessen echt stärker ist als diese.

4. Gleichmäßige Topologie. Die durch die Operatornorm definierte Topologie heißt die *gleichmäßige Topologie* in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Folglich bilden alle offenen Kugeln, die durch die Ungleichungen $|A - A_0| < \varepsilon$, $\varepsilon > 0$, charakterisiert sind, eine Basis von Umgebungen der gleichmäßigen Topologie.

Mit der Norm, die gleich der Operatornorm ist, wird $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ eine normierte Algebra, und das Produkt AB ist in der gleichmäßigen Topologie bezüglich der beiden Faktoren gleichzeitig stetig. Also ist die gleichmäßige Topologie von den vorhergehenden Topologien verschieden und, wie wir leicht sehen können, stärker als jede von ihnen.

Bezeichnen wir die abgeschlossene Hülle der Menge S in der gleichmäßigen Topologie mit $\bar{S}^4$, so gilt

$$\bar{S}^4 \subset \bar{S}^3 \subset \bar{S}^2 \subset \bar{S}^1.$$

§ 34. Schwach abgeschlossene Teilalgebren der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$

1. Grundbegriffe. Es sei $\mathfrak{H}$ ein Hilbertscher Raum. Die Gesamtheit $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ aller beschränkten linearen Operatoren in $\mathfrak{H}$ bildet eine Banachsche symmetrische Algebra, wenn in ihr die üblichen Verknüpfungsrelationen für Operatoren, die Norm als die Operatornorm und die Involution als der Übergang zum adjungierten Operator definiert sind. Eine symmetrische Teilalgebra von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ heißt *schwach abgeschlossene Algebra*, wenn sie in der schwachen Topologie von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ abgeschlossen ist.

Im folgenden werden wir hauptsächlich schwach abgeschlossene Algebren untersuchen.

Der Durchschnitt aller schwach abgeschlossenen Algebren, die eine gegebene Menge $S \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ enthalten, ist eine *schwach abgeschlossene Algebra, die S enthält*. Wir bezeichnen sie mit $R(S)$.

Es sei S eine beliebige Menge aus $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$. Mit S^* bezeichnen wir die Gesamtheit aller Operatoren A^*, $A \in S$, und mit S' die Gesamtheit aller Operatoren aus $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, die mit sämtlichen Operatoren aus $S \cup S^*$ vertauschbar sind. Auf Grund von § 8, Nr. 1, Satz V, ist S' eine schwach abgeschlossene Algebra mit Einselement. Wir nennen sie die *zur gegebenen Menge S assoziierte Algebra.* Offenbar ist S' eine symmetrische Algebra.

Der Übergang von S zu S' besitzt offenbar die folgenden Eigenschaften[1]):

1. $S' = (R_{a*}(S))' = (R(S))'$;
2. aus $S_1 \subset S_2$ folgt $S_1' \supset S_2'$;
3. $S \subset S''$.

Die letzte Beziehung zeigt, daß S'' die Menge S enthält; S'' enthält demzufolge auch die minimale Algebra $R(S)$, d. h., es ist $R(S) \subset S''$. Wenden wir die Eigenschaft 3 auf die Menge S' an, so erhalten wir ferner $S' \subset S'''$. Wenden wir andererseits die Operation $'$ auf beide Seiten der Beziehung 3 an und benutzen wir die Eigenschaft 2, so erhalten wir $S' \supset S'''$, so daß also $S' = S'''$ ist. Das Einsetzen von $S', S'', \ldots$ anstelle von S ergibt dann

$$S'' = S^{IV} = \cdots, \quad S' = S''' = S^{V} = \cdots.$$

2. Die Haupteinheit. Es seien S eine beliebige Teilmenge der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und $\mathfrak{N}$ die Gesamtheit aller Elemente des Raumes $\mathfrak{H}$, auf welchen die Operatoren A und A^* verschwinden, wenn $A \in S$ ist. Wir nennen den Projektionsoperator E_0 auf $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ die *Haupteinheit* von S. Somit sind nach Definition die Gleichungen $Af = A^*f = 0$ für alle $A \in S$ und $E_0 f = 0$ äquivalent.

Ist S eine Algebra, die den Einheitsoperator enthält, so ist offenbar $\mathfrak{N} = (0)$, so daß die Haupteinheit gleich 1 wird. Die Haupteinheit E_0 der Menge S genügt den Gleichungen

$$E_0 A = A E_0 = A \tag{1}$$

für jeden Operator $A \in S$; denn nach Definition der Haupteinheit ist $A(1 - E_0)f = A^*(1 - E_0)f = 0$ für jeden Vektor $f \in \mathfrak{H}$, d. h. $A(1 - E_0) = 0$, $A^*(1 - E_0) = 0$; die Anwendung der Involution auf die letzte Gleichung ergibt $(1 - E_0)A = 0$, und daraus folgt[2])

$$A - AE_0 = A - E_0 A = 0, \quad \text{also} \quad AE_0 = E_0 A = A.$$

Hilfssatz. *Die Haupteinheit der Menge S gehört zu S' und S''.*

Beweis. Die erste Behauptung folgt aus (1). Um zu zeigen, daß E_0 zu S'' gehört, nehmen wir an, daß $B \in S'$ ist. Aus $E_0 f = 0$ folgt $Af = A^*f = 0$. Dann ist aber

$$ABf = BAf = 0, \quad A^*Bf = BA^*f = 0,$$

woraus $E_0 Bf = 0$ folgt. Setzen wir $f = (1 - E_0)g$ mit $g \in \mathfrak{H}$, so erhalten wir

$$E_0 B(1 - E_0) = 0, \quad E_0 B = E_0 B E_0.$$

Setzen wir in der letzten Gleichung B^* anstelle von B und wenden wir auf die so erhaltene Gleichung die Involution an, so gelangen wir zu $BE_0 = E_0 B E_0$, also

$$E_0 B = BE_0 = E_0 B E_0.$$

---

[1]) Wir erinnern daran, daß $R_{a*}(S)$ diejenige minimale symmetrische Algebra bezeichnet, die die gegebene Menge S enthält (vgl. § 10, Nr. 1).

[2]) Ist also M eine beliebige schwach abgeschlossene Teilalgebra von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und E_0 ihre Haupteinheit, so ist M auf dem Raum $E_0\mathfrak{H}$ eine Algebra mit Einselement, und auf $(1 - E_0)\mathfrak{H}$ verschwinden alle Operatoren aus M.

Der Operator E_0 ist somit mit jedem Operator $B \in S'$ vertauschbar, also ist $E_0 \in S''$.

Diesen Hilfssatz benutzen wir nun zum Beweis des folgenden Satzes.

Theorem. *Ist S eine beliebige Teilmenge der Algebra $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ und E_0 die Haupteinheit der Menge S, so ist $R(S)$ die ultrastark abgeschlossene Hülle der Algebra $R_{a*}(S)$ und besteht aus genau den Elementen $A \in S''$, für die die Bedingung*

$$E_0 A = A E_0 = A \tag{2}$$

gilt.

Beweis. Wir bezeichnen mit S_1 die Gesamtheit derjenigen Elemente von S'', die der Bedingung (2) genügen. Ist $A \in S_1$, so können wir zeigen, daß A ultrastarker Häufungspunkt der Algebra $R_{a*}(S)$ ist, d. h., jede ultrastarke Umgebung $W(A; f_1^0, f_2^0, \ldots; \varepsilon)$ enthält Elemente von $R_{a*}(S)$. Dazu benutzen wir die abzählbare direkte Summe

$$\mathfrak{H}' = \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \oplus \mathfrak{H} \oplus \cdots;$$

offenbar ist $f_0' = \{f_1^0, f_2^0, \ldots\} \in \mathfrak{H}'$. Für einen beliebigen beschränkten linearen Operator B gilt

$$\sum_{k=1}^{\infty} |B f_k^0|^2 \leqq |B|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |f_k^0|^2,$$

so daß auch der Vektor

$$f_B' = \{B f_1^0, B f_2^0, \ldots\}$$

zu $\mathfrak{H}'$ gehört. Wir nennen f_B' das *Bild* des Operators B in $\mathfrak{H}'$.

Es sei $\mathfrak{C}'$ die Gesamtheit sämtlicher Bilder der Operatoren aus $R_{a*}(S)$ und $\overline{\mathfrak{C}}'$ die abgeschlossene Hülle der Menge $\mathfrak{C}'$ bezüglich der Norm in $\mathfrak{H}'$. Offenbar ist $\mathfrak{C}'$ linear, so daß $\overline{\mathfrak{C}}'$ linear und abgeschlossen ist. Ist E' der Projektionsoperator von $\mathfrak{H}'$ auf $\overline{\mathfrak{C}}'$, so besteht die Zuordnung $E' \sim \|E_{ts}\|$ $(t, s = 1, 2, 3, \ldots)$ (vgl. § 5, Nr. 15). Ist C ein beliebiges Element aus $R_{a*}(S)$, so ist $C' \sim \|\delta_{ts} C\|$ mit $t, s = 1, 2, 3, \ldots$ und

$$\delta_{ts} = \begin{cases} 1 & \text{für} \quad t = s, \\ 0 & \text{für} \quad t \neq s \end{cases}$$

ein Operator aus $\mathfrak{H}'$, und es ist $C' f_B' = \{C B f_1^0, C B f_2^0, \ldots\} = f_{CB}'$. Ist daher $B \in R_{a*}(S)$, so gehört f_{CB}' zu $\mathfrak{C}'$, so daß der Operator C' die Menge $\mathfrak{C}'$ in $\mathfrak{C}'$, also $\overline{\mathfrak{C}}'$ in $\overline{\mathfrak{C}}'$ überführt. Da $E' f'$ für jedes $f' \in \mathfrak{H}'$ zu $\overline{\mathfrak{C}}'$ gehört, folgt hieraus $C' E' f' \in \overline{\mathfrak{C}}'$, also

$$C' E' = E' C' E'. \tag{3}$$

Ersetzen wir in (3) C durch $C^* \, (C^* \in R_{a*}(S))$ und benutzen wir die Beziehung $C^{*\prime} = C'^*$ (vgl. § 5, Nr. 15), so finden wir

$$C'^* E' = E' C'^* E', \quad E' C' = (E' C'^* E')^* = E' C' E' = C' E'.$$

Dies ist den Beziehungen $C E_{ts} = E_{ts} C$ $(t, s = 1, 2, 3, \ldots)$ gleichwertig. Da C beliebig aus $R_{a*}(S)$ war, ist $E_{ts} \in (R_{a*}(S))' = S'$.

Wir kehren jetzt zu dem gegebenen Element A zurück und zeigen, daß

$$f'_A \in \overline{\mathfrak{C}}'$$

ist. Da nach Definition $f'_B \in \mathfrak{C}'$ ist, wenn B zu $R_{a*}(S)$ gehört, folgt $E' f'_B = f'_B$, also

$$B f_t^0 = \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts} B f_s^0 = \sum_{s=1}^{\infty} B E_{ts} f_s^0, \quad B\left(f_t^0 - \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts} f_s^0\right) = 0$$

für alle Operatoren $B \in R_{a*}(S)$. Dann ist auf Grund der Definition der Haupteinheit[1]) E_0 ebenfalls

$$E_0\left(f_t^0 - \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts} f_s^0\right) = 0.$$

Folglich ist wegen (2)

$$A\left(f_t^0 - \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts} f_s^0\right) = A\, E_0\left(f_t^0 - \sum_{s=1}^{\infty} E_{st} f_s^0\right) = 0.$$

Für $A \in S''$ läßt sich diese Gleichung in der Form

$$A f_t^0 - \sum_{s=1}^{\infty} E_{ts} A f_s^0 = 0, \quad \text{d. h.} \quad E' f'_A = f'_A$$

schreiben; also gehört f'_A zu $\overline{\mathfrak{C}}'$. Dann existiert aber für jedes $\varepsilon > 0$ in $\mathfrak{C}'$ ein Element, das von f'_A einen kleineren Abstand als ε hat. Als Element des Raumes $\mathfrak{C}'$ können wir ihm die Form f'_B, $B \in R_{a*}(S)$, geben. Daher erhalten wir, wenn wir die Definition des Abstandes im Raum $\mathfrak{H}'$ benutzen,

$$\sum_{k=1}^{\infty} |A f_k^0 - B f_k^0|^2 = |f'_A - f'_B|^2 < \varepsilon^2.$$

d. h.

$$B \in W(A\,; f_1^0, f_2^0, \ldots; \varepsilon).$$

Die Gesamtheit S_1 derjenigen Elemente $A \in S''$, die der Bedingung (2) genügen, ist also in der ultrastark abgeschlossenen Hülle der Algebra $R_{a*}(S)$ und somit auch in ihrer schwach abgeschlossenen Hülle $R(S)$ enthalten. Andererseits ist offenbar $S \subset S_1$, also auch $R_{a*}(S) \subset S_1$. Da die Algebra S_1 schwach abgeschlossen ist[2]), muß auch $R(S) \subset S_1$ sein. Daraus folgt

$$R(S) = S_1 = \overline{R_{a*}(S)}^3.$$

Damit ist das Theorem bewiesen.

Folgerung 1. *Ist R eine symmetrische Teilalgebra von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, so stimmen ihre schwach, stark und ultrastark abgeschlossene Hülle überein:*

$$\overline{R}^1 = \overline{R}^2 = \overline{R}^3. \tag{4}$$

Denn auf Grund des vorhergehenden Satzes ist $\overline{R}^1 = \overline{R}^3$, andererseits ist aber $\overline{R}^1 \supset \overline{R}^2 \supset \overline{R}^3$.

[1]) Die Menge S und die Algebra $R_{a*}(S)$ haben offenbar dieselbe Haupteinheit.

[2]) Infolge der schwachen Stetigkeit der Produkte $A E_0$, $E_0 A$ für variables A.

Folgerung 2. *Ist M eine schwach abgeschlossene Algebra, die das Einselement enthält, so ist $M'' = M$.*

Setzen wir nämlich $S = M$, so erhalten wir $E_0 = 1$ und folglich $S_1 = M''$, $M = R(M) = S_1 = M''$.

Folgerung 3. *Die Gesamtheit der assoziierten Algebren stimmt mit der Gesamtheit der schwach abgeschlossenen Algebren mit Einselement überein.*

Einerseits enthält nämlich jede Algebra S' das Einselement, und andererseits läßt sich jede schwach abgeschlossene Algebra M mit Einselement in der Form $M = (M')'$ darstellen.

Folgerung 4. *Für jede Menge $S \subset R$ gilt*

$$S'' = R(S, 1).$$

Da nämlich die Algebra $R(S, 1)$ das Einselement enthält, ist nach Nr. 1, Eigenschaft 1, und Folgerung 2

$$R(S, 1) = (R(S, 1))'' = ((S, 1)')' = (S')' = S''.$$

Folgerung 5. *Ist H ein beschränkter hermitescher Operator und $P(\lambda)$ seine Spektralschar, so gehört H genau dann zur schwach abgeschlossenen Algebra M, wenn alle Operatoren $P(\lambda)$ für $\lambda \leqq 0$ und $1 - P(\lambda)$ für $\lambda > 0$ zu M gehören.*

Beweis. Daß die Bedingung hinreichend ist, folgt aus den Beziehungen

$$H = \int_\alpha^\beta \lambda \, dP(\lambda) = \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0} \sum_{k=1}^{n} \lambda_k [P(\lambda_k) - P(\lambda_{k-1})], \quad P(\lambda_k) - P(\lambda_{k-1}) \in M,$$

wobei (α, β) ein Intervall ist, in dem das gesamte Spektrum des Operators H enthalten ist $(\alpha = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = \beta)$, und der Grenzwert im Sinne der gleichmäßigen Topologie in $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ existiert (falls $0 \in [\alpha, \beta]$, nehme man 0 als ein λ_k). Die Bedingung ist auch notwendig, denn ist $H \in M$, so ist auf Grund der Eigenschaften der Spektralschar $P(\lambda) \in R(H)''$. Ist E_0 die Haupteinheit aus $R(H)$, so gilt $H(1 - E_0) = 0$ und folglich

$$0 = |H(1 - E_0) f|^2 = \int_\alpha^\beta \lambda^2 \, d|P(\lambda)(1 - E_0) f|^2.$$

Daher ist auch $P(\Delta)(1 - E_0) = 0$, sobald der Punkt 0 im Intervall $\Delta = (\alpha', \beta')$ nicht enthalten ist. Wenden wir auf diese Gleichung die Involution an, so folgt $(1 - E_0) P(\Delta) = 0$, so daß auf Grund des obigen Theorems $P(\Delta) \in R(H) \subset M$ ist. Demnach gehört für $\alpha' = \lambda > 0$, $\beta' > \beta$ auch $1 - P(\lambda)$ zu M. Für $\alpha' < \alpha$, $\beta' = \lambda < 0$ erhalten wir $P(\lambda) \in M$; wegen der linksseitigen Stetigkeit der Spektralschar ist diese Beziehung auch für $\lambda \leqq 0$ richtig.

Folgerung 6. *Ist M^P die Gesamtheit der Projektionsoperatoren aus einer schwach abgeschlossenen Algebra M, so ist $R(M^P) = M$.*

Beweis. Aus $M^P \subset M$ folgt $R(M^P) \subset M$, also $R(M^P)^P \subset M^P$. Andererseits ist offenbar $R(M^P)^P \supset M^P$, so daß wir somit $R(M^P)^P = M^P$ erhalten. D. h.,

$R(M^P)$ und M enthalten dieselben Projektionsoperatoren und somit nach Folgerung 5 dieselben hermiteschen Operatoren. Da sich jedes Element $A \in M$ in der Form $A = H_1 + iH_2$ mit Hilfe der hermiteschen Operatoren $H_1 = \frac{1}{2}(A + A^*)$ und $H_2 = \frac{1}{2i}(A - A^*)$ darstellen läßt, stimmen die Algebren M und $R(M^P)$ überein.

Folgerung 7. *Die Gesamtheit M^U der unitären Operatoren einer schwach abgeschlossenen Algebra M ist genau dann nicht leer, wenn M das Einselement enthält; dann ist $R(M^U) = M$.*

Beweis. Für $U \in M^U$ gilt $1 = U^*U \in M$, so daß M das Einselement enthält. Setzen wir jetzt voraus, daß M das Einselement enthält, so folgt aus $P \in M^P$, daß $2P - 1$ zu M^U gehört; denn $2P - 1$ gehört zu M und ist wegen

$$(2P-1)^*(2P-1) = (2P-1)(2P-1)^* = 4P^2 - 4P + 1 = 1$$

ein unitärer Operator. Daraus ergibt sich

$$P = \frac{1}{2}[(2P-1)+1] \in R(M^U), \quad M^P \subset R(M^U), \quad M = R(M^P) \subset R(M^U).$$

Andererseits gehört $R(M^U)$ wegen $M^U \subset M$ ebenfalls zu M, so daß $R(M^U) = M$ gilt.

Folgerung 8. *Die Haupteinheit E_0 einer schwach abgeschlossenen Algebra M gehört zu $M \cap M'$.*

Die Haupteinheit E_0 gehört nämlich nach dem Hilfssatz zu M'' und zu M' und genügt der Bedingung (2), so daß sie auf Grund des obigen Theorems ebenfalls in M liegt.

3. Das Zentrum. Wir hatten in § 7, Nr. 3, die Gesamtheit der Elemente einer Algebra M, die mit allen Elementen von M vertauschbar sind, das *Zentrum* Z_M von M genannt. Offenbar ist $Z_M = M \cap M'$, so daß Z_M eine kommutative Algebra ist. Enthält M das Einselement, so ist Z_M nicht leer, sondern enthält die Algebra der Produkte $\alpha 1$, wobei α ein Skalar ist. Diese Algebra nennen wir *Skalaralgebra* und bezeichnen sie mit $(\alpha 1)$.

Mit M ist auch $Z_M = M \cap M'$ schwach abgeschlossen (vgl. § 8, Nr. 1, Satz VI). Wir nennen M einen *Faktor*, wenn Z_M nur aus $(\alpha 1)$ besteht, d. h., wenn $M \cap M' = (\alpha 1)$ ist. Beispielsweise ist $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ein Faktor. Da nämlich $(\alpha 1)' = \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ ist, müssen auf Grund von Folgerung 2 die Beziehungen $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})' = (\alpha 1)'' = (\alpha 1)$, $\mathfrak{B}(\mathfrak{H}) \cap \mathfrak{B}(\mathfrak{H})' = (\alpha 1)$ gelten. Ein anderes Beispiel ist die Skalaralgebra $(\alpha 1)$. Im folgenden sollen noch andere, weniger triviale Faktoren betrachtet werden. Ist M ein Faktor, so ist M' ebenfalls ein Faktor, denn die Gleichung $M \cap M' = (\alpha 1)$ läßt sich auch in der Form $M'' \cap M' = (\alpha 1)$ schreiben.

Ein anderer Grenzfall ist eine kommutative Algebra. Ist M kommutativ, so gilt $Z_M = M$. Ist umgekehrt $Z_M = M$, so ist die Algebra M kommutativ, da sie mit der kommutativen Algebra Z_M übereinstimmt.

4. Faktorisierung. Eine schwach abgeschlossene Algebra, die von der mengentheoretischen Summe $M_1 \cup M_2 \cup \cdots$ erzeugt wird, heißt die *Vereinigung* $R(M_1, M_2, \ldots)$ der schwach abgeschlossenen Algebren $M_1, M_2, \ldots$[1]. Offenbar gilt

$$(R(M_1, M_2, \ldots))' = M_1' \cap M_2' \cap \cdots \tag{1}$$

und, wenn $R(M_1, M_2, \ldots)$ das Einselement enthält,

$$R(M_1, M_2, \ldots) = (M_1' \cap M_2' \cap \ldots)'; \tag{2}$$

denn wegen Nr. 1, Eigenschaft 1, ist

$$(R(M_1, M_2, \ldots))' = (M_1 \cup M_2 \cup \ldots)' = M_1' \cap M_2' \cap \ldots .$$

Die Formel (2) folgt dann mit Hilfe der Folgerung 2, wenn auf (1) die Operation $'$ angewendet wird.

Die Gesamtheit $\{M_1, M_2, \ldots\}$ von (0) verschiedener schwach abgeschlossener Algebren heißt eine *Faktorisierung*, wenn die Elemente verschiedener dieser Algebren vertauschbar sind und die Vereinigung $R(M_1, M_2, \ldots)$ mit $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ übereinstimmt. Die einzelnen Algebren der Faktorisierung heißen *Elemente*. Wir können leicht erkennen, daß die Elemente einer Faktorisierung Faktoren sind; denn ist $\{M_1, M_2, \ldots\}$ eine Faktorisierung, so ist $M_i \subset M_k'$ $i \neq k$) und folglich wegen (1)

$$M_i \cap M_i' \subset M_i' \cap \bigcap_{k \neq i} M_k' = \bigcap_k M_k' = (R(M_1, M_2, \ldots))' = (\alpha 1).$$

Ist deshalb E_0 die Haupteinheit von M_i, so gilt $E_0 = \alpha 1$ wegen Folgerung 8, so daß entweder $\alpha = 0$ oder $\alpha = 1$ ist. Im ersten Fall gilt $E_0 = 0$, und für jeden Operator $A \in M_i$ wird $A = E_0 A = 0$, daher $M_i = (0)$, was der Voraussetzung widerspricht. Also muß $\alpha = 1$ sein, d. h., M_i enthält das Einselement, und es ist $M_i \cap M_i' = (\alpha 1)$. *Ist M ein Faktor, so ist $\{M, M'\}$ eine Faktorisierung*; denn es gilt

$$R(M, M') = (R(M, M'))'' = (M \cup M')'' = (M' \cap M'')' = (M' \cap M)' = (\alpha 1)' = \mathfrak{B}(\mathfrak{H}).$$

Eine Faktorisierung der Gestalt $\{M, M'\}$ heißt *gepaart*.

Murray und v. Neumann [1] zeigten, daß nicht jede Faktorisierung $\{M_1, M_2\}$ gepaart ist, und fanden einige hinreichende Bedingungen dafür, daß eine Faktorisierung diese Eigenschaft besitzt.

§ 35. Relative Äquivalenz

1. Operatoren und Teilräume, die zu einer Algebra gehören. Es sei M eine schwach abgeschlossene Algebra mit Einselement, $\mathfrak{S}$ eine Teilmenge des Raumes $\mathfrak{H}$ und R ein nicht unbedingt beschränkter Operator in $\mathfrak{H}$. Wir sagen, daß die Menge $\mathfrak{S}$ und der Operator R *zur Algebra M gehören* und schreiben $\mathfrak{S} \eta M$ bzw. $R \eta M$, wenn die Menge $\mathfrak{S}$ invariant gegenüber jedem unitären Operator aus M' bzw. der Operator R mit jedem solchen Operator aus $\mathfrak{H}$ vertauschbar ist.

---

[1]) Die Gesamtheit dieser Algebren wird nicht als abzählbar vorausgesetzt.

Ist $R \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, also R beschränkt, so ist die Beziehung $R\eta M$ äquivalent der Beziehung $R \in M$, denn $R\,\eta\,M$ bedeutet, daß

$$R \in (M'^U)' = (M')' = M$$

ist. Für einen abgeschlossenen linearen Operator R mit einem in $\mathfrak{H}$ dichten Definitionsbereich und der kanonischen Zerlegung $R = WH$ (vgl. § 21, Nr. 1, Satz II) ist infolge der Eindeutigkeit dieser Zerlegung die Beziehung

$$U^* R U = (U^* W U)(U^* H U)$$

die kanonische Zerlegung des Operators $U^* R U$. Die Gleichung $U^* R U = R$ für alle $U \in M'$ bedeutet, daß $U^* W U = W$, $U^* H U = H$, also $W \in M$, $H\,\eta\,M$ ist.

Ist ferner $\mathfrak{S}$ linear und abgeschlossen, so ist die Beziehung $\mathfrak{S}\,\eta\,M$ äquivalent mit $P_{\mathfrak{S}} \in M$, wobei $P_{\mathfrak{S}}$ der Projektionsoperator auf $\mathfrak{S}$ ist; denn aus $\mathfrak{S}\,\eta\,M$ folgt $U\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}$ für jeden unitären Operator $U \in M'$. Setzen wir hier U^* statt U, so haben wir $U^*\,\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}$, woraus $\mathfrak{S} \subset U\mathfrak{S}$ folgt, so daß $\mathfrak{S} = U\mathfrak{S}$ ist. Dann ist auch $U(\mathfrak{H} - \mathfrak{S}) = \mathfrak{H} - \mathfrak{S}$ und infolgedessen

$$P_{\mathfrak{S}} U x = U x = U P_{\mathfrak{S}} x \quad \text{für} \quad x \in \mathfrak{S},$$

$$P_{\mathfrak{S}} U x = 0 = U P_{\mathfrak{S}} x \quad \text{für} \quad x \in \mathfrak{H} - \mathfrak{S}.$$

Also gilt $P_{\mathfrak{S}} U = U P_{\mathfrak{S}}$ für alle $U \in M'$. Das bedeutet, es ist $P_{\mathfrak{S}}\,\eta\,M$, $P_{\mathfrak{S}} \in M$.

Somit bedeutet für jeden abgeschlossenen Teilraum $\mathfrak{M}$ die Beziehung $\mathfrak{M}\,\eta\,M$, daß der Operator $P_{\mathfrak{M}}$ mit allen Operatoren aus M' vertauschbar ist, d. h., daß $\mathfrak{M}$ alle Operatoren aus M' reduziert.

Ein einfaches Beispiel eines abgeschlossenen Teilraumes, der zur Algebra M gehört, erhalten wir, wenn wir auf ein festes Element $f \in \mathfrak{H}$ alle Operatoren $A \in M'$ anwenden und dann die abgeschlossene Hülle der Gesamtheit $\mathfrak{S}_f$ dieser Elemente Af bezüglich der Norm in $\mathfrak{H}$ bilden. Ist nämlich U ein unitärer Operator aus M', so ist $UA \in M'$ und folglich $UAf \in \mathfrak{S}_f$. Daraus ergibt sich $U\mathfrak{S}_f \subset \mathfrak{S}_f$, $U\overline{\mathfrak{S}}_f \subset \overline{\mathfrak{S}}_f$.

Wir führen nun die Bezeichnungen $\overline{\mathfrak{S}}_f = \mathfrak{M}_f^{M'}$ und $P_{\overline{\mathfrak{S}}_f} = E_f^{M'}$ ein. Offenbar ist f aus $\mathfrak{M}_f^{M'}$, denn es genügt, $A = 1$ zu setzen. Somit ist $\mathfrak{M}_f^{M'}$ ein minimaler abgeschlossener Teilraum, der f enthält und alle Operatoren aus M' reduziert. Daraus folgt: *Ist $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum, $\mathfrak{M}\,\eta\,M$ und $f \in \mathfrak{M}$, so gilt $\mathfrak{M}_f^{M'} \subset \mathfrak{M}$.*

2. Fundamentalhilfssatz. Für das Weitere benötigen wir den folgenden

Hilfssatz. *Ist M ein Faktor und $A \in M$, $A' \in M'$, so ist die Gleichung $AA' = 0$ nur für $A = 0$ oder $A' = 0$ erfüllt.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}$ die Menge der Elemente $f \in \mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft $AXf = 0$ für jeden Operator $X \in M$. Insbesondere ist $Af = 0$ für $f \in \mathfrak{M}$. Offenbar ist $\mathfrak{M}$ ein abgeschlossener Teilraum von $\mathfrak{H}$. Es sei P der Projektionsoperator auf $\mathfrak{M}$; wir zeigen, daß P mit allen Elementen aus M und aus M' vertauschbar ist, d. h., daß $\mathfrak{M}$ alle Operatoren aus M und aus M' reduziert.

Da die Algebren M und M' mit A auch A^* enthalten, genügt es zu beweisen, daß $\mathfrak{M}$ invariant ist gegenüber allen Operatoren aus M und aus M'. Für jeden Operator $B \in M$ ist auch $XB \in M$ und folglich $AXBf = 0$ für $f \in \mathfrak{M}$. Dann ist aber auch $Bf \in \mathfrak{M}$, so daß $\mathfrak{M}$ invariant gegenüber allen Operatoren aus M ist. Für $f \in M$, $B \in M'$ ist nun, da sich der Operator B mit den Operatoren A und X vertauschen läßt, $AXBf = BAXf = 0$. Somit ist $\mathfrak{M}$ auch gegenüber den Operatoren aus M' invariant. Aber dann ist $P \in M \cap M' = (\alpha 1)$, so daß entweder $P = 0$ oder $P = 1$, d. h. entweder $\mathfrak{M} = (0)$ oder $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$ ist.

Für beliebige $f \in \mathfrak{H}$, $X \in M$ folgt wegen $AA' = 0$

$$AXA'f = AA'Xf = 0,$$

also $A'f \in \mathfrak{M}$. Hieraus ergibt sich im ersten Fall $A'f = 0$ für jedes Element $f \in \mathfrak{H}$, d. h., es ist $A' = 0$.

Aus $P = 1$, also $\mathfrak{M} = \mathfrak{H}$, folgt aber $Af = 0$ für alle $f \in \mathfrak{H}$, also $A = 0$.

3. Definition der relativen Äquivalenz. Bis zum Schluß dieses Paragraphen wollen wir M stets als Faktor annehmen.

Zwei abgeschlossene Teilräume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ heißen *äquivalent bezüglich* M, wenn in der Algebra M ein partiell isometrischer Operator U mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{M}$ und dem Endbereich $\mathfrak{N}$ existiert. Wir schreiben in diesem Fall $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots M)$ und ebenfalls $P_{\mathfrak{M}} \sim P_{\mathfrak{N}}(\ldots M)$. Ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots M)$, so sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ offenbar von gleicher Dimension. Die Umkehrung dieser Aussage gilt nicht, denn man kann nicht einfach $\mathfrak{M}$ auf $\mathfrak{N}$ isometrisch abbilden, sondern muß diese Abbildung mit Hilfe von Operatoren aus M vornehmen. Aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots M)$ folgt $\mathfrak{M}\,\eta\,M$ und $\mathfrak{N}\,\eta\,M$; denn es ist $P_{\mathfrak{M}} = U^*U$, $P_{\mathfrak{N}} = UU^*$, so daß der Begriff der Äquivalenz nur für Teilräume sinnvoll ist, die zu M gehören. Ferner gilt für $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}, \mathfrak{P}\,\eta\,M$: Es ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}$; ferner ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$, wenn $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$ ist; aus $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$ folgt $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$. Schließlich ergibt sich aus den Beziehungen $\mathfrak{M}_\alpha \sim \mathfrak{N}_\alpha (\alpha \in \mathfrak{A})$, $\mathfrak{M}_\alpha \perp \mathfrak{M}_\beta$, $\mathfrak{N}_\alpha \perp \mathfrak{N}_\beta$ für $\alpha \neq \beta$, daß $\sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{M}_\alpha \sim \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}_\alpha$ ist; denn ist U_α ein partiell isometrischer Operator aus M mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{M}_\alpha$ und dem Endbereich $\mathfrak{N}_\alpha$, so ist $U = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} U_\alpha$ ein partiell isometrischer Operator aus M mit dem Anfangsbereich $\sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{M}_\alpha$ und dem Endbereich $\sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}_\alpha$.

Beispielsweise sind die abgeschlossenen Hüllen der Wertebereiche[1] $\mathfrak{R}(X)$, $\mathfrak{R}(X^*)$ der Operatoren X bzw. X^* abgeschlossene Teilräume, die bezüglich M äquivalent sind, wenn X ein beliebiger abgeschlossener linearer und zu M gehöriger Operator mit in $\mathfrak{H}$ dichtem Definitionsbereich ist. Denn ist $X = WH$ die kanonische Zerlegung des Operators X, so ist W ein partiell isometrischer Operator aus M mit dem Anfangsbereich $\overline{\mathfrak{R}(X^*)}$ und dem Endbereich $\overline{R(X)}$ (vgl. Nr. 1 und § 21, Nr. 1, Satz II).

---

[1]) Es ist in diesem Kapitel bequemer, die Bezeichnungen zu ändern und $\mathfrak{D}(X)$ und $\mathfrak{R}(X)$ anstelle von $\mathfrak{D}_X$ bzw. $\mathfrak{R}_X$ zu schreiben.

4. Vergleich abgeschlossener Teilräume. Wir benutzen jetzt den Begriff der Äquivalenz, um die Menge aller abgeschlossenen Teilräume $\mathfrak{M}\,\eta\,M$ zu ordnen.

Es seien $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zwei abgeschlossene, zum Faktor M gehörige Teilräume. Wir sagen, der Teilraum $\mathfrak{M}$ ist *nicht größer* als der Teilraum $\mathfrak{N}$ bezüglich M und schreiben $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}(\ldots M)$ oder $P_{\mathfrak{M}} \lesssim P_{\mathfrak{N}}(\ldots M)$, wenn $\mathfrak{M}$ einem Teilraum von $\mathfrak{N}$ äquivalent ist. Wir nennen den Teilraum $\mathfrak{M}$ *kleiner* als den Teilraum $\mathfrak{N}$ und schreiben $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}(\ldots M)$, $P_{\mathfrak{M}} < P_{\mathfrak{N}}(\ldots M)$, wenn $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ nicht äquivalent $\mathfrak{N}$ ist.

I. *Für zwei beliebige Teilräume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$, die zum Faktor M gehören, gilt stets entweder $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}(\ldots M)$ oder $\mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{M}(\ldots M)$.*

Beweis. Wir können offenbar $\mathfrak{M} \neq (0)$ und $\mathfrak{N} \neq (0)$ annehmen. Wir wollen zeigen, daß in diesem Fall in $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ von (0) verschiedene Teilräume $\mathfrak{M}_1$ bzw. $\mathfrak{N}_1$ existieren, die zu M gehören und bezüglich M äquivalent sind. Dazu wählen wir ein Element $f \neq 0$ aus $\mathfrak{M}$. Dann ist $E_f^M \in M'$, $E_f^M \neq 0$; da außerdem $P_{\mathfrak{N}} \in M$, $P_{\mathfrak{N}} \neq 0$ ist, folgt auf Grund des Hilfssatzes aus Nr. 2, daß auch $P_{\mathfrak{N}} E_f^M \neq 0$ ist. Nun ist $P_{\mathfrak{N}} E_f^M$ Projektionsoperator auf $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^M$ und demnach $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^M \neq (0)$. Wir wählen im Raum $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^M$ ein Element g, dessen Norm gleich Eins ist. Wegen $g \in \mathfrak{M}_f^M$ existiert in der Algebra M ein Operator A derart, daß $|g - Af| < 1$ und folglich erst recht $|P_{\mathfrak{N}} g - P_{\mathfrak{N}} A f| < 1$ ist. Da $P_{\mathfrak{N}} g = g$ und $P_{\mathfrak{M}} f = f$ ist, läßt sich die letzte Ungleichung in der Gestalt $|g - P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}} f| < 1$ schreiben. Aus dieser Ungleichung folgt $X = P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}} \neq 0$, denn sonst wäre $|g| < 1$, während $|g| = 1$ sein sollte. Setzen wir $\mathfrak{M}_1 = \overline{\Re(X^*)}$, $\mathfrak{N}_1 = \overline{\Re(X)}$, so ist $\mathfrak{M}_1 \neq (0)$, $\mathfrak{N}_1 \neq (0)$ und

$$\mathfrak{M}_1 = \overline{\Re(P_{\mathfrak{M}} A^* P_{\mathfrak{N}})} \subset \mathfrak{M}, \quad \mathfrak{N}_1 = \overline{\Re(P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}})} \subset \mathfrak{N}.$$

Wegen $X = P_{\mathfrak{N}} A P_{\mathfrak{M}} \in M$ sind die Teilräume $\mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{N}_1$ bezüglich M äquivalent (vgl. Nr. 3).

Auf Grund der Beziehungen

$$P_{\mathfrak{M}-\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}} - P_{\mathfrak{M}_1} \in M, \quad P_{\mathfrak{N}-\mathfrak{N}_1} = P_{\mathfrak{N}} - P_{\mathfrak{N}_1} \in M$$

gehören die Teilräume $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_1$ ebenfalls zu M. Sind sie noch beide verschieden von (0), so lassen sich nach dem Vorhergehenden in $\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1$ und $\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_1$ von (0) verschiedene Teilräume $\mathfrak{M}_2$ bzw. $\mathfrak{N}_2$ finden, die bezüglich M äquivalent sind. Dabei ist offenbar $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{M}_2$, $\mathfrak{N}_1 \perp \mathfrak{N}_2$. Wiederholen wir diese Überlegungen und wenden wir das Zornsche Lemma an, so können wir von (0) verschiedene Teilräume $\mathfrak{M}_\alpha$, $\mathfrak{N}_\alpha$ konstruieren, für welche $\mathfrak{M}_\alpha \sim \mathfrak{N}_\alpha(\ldots M)$ ist und entweder $\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{M}_\alpha = \mathfrak{M}$ oder $\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}_\alpha = \mathfrak{N}$ gilt. Wegen

$$\sum_\alpha \oplus \mathfrak{M}_\alpha \sim \sum_\alpha \oplus \mathfrak{N}_\alpha(\ldots M)$$

folgt im ersten Fall $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$, im zweiten Fall $\mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{M}$.

II. *Aus $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{M}$ folgt $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$.*

Beweis. Der Beweis verläuft analog dem des BERNSTEINschen Satzes über den Vergleich der Mächtigkeiten. Es sei

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}, \tag{1}$$

$$\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M} \tag{2}$$

und $U \in M$ ein partiell isometrischer Operator mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{N}$ und dem Endbereich $\mathfrak{M}'$. Er bildet den Teilraum $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ auf einen Teilraum $\mathfrak{M}'' \subset \mathfrak{M}'$ isometrisch ab. Daher ist $UP_{\mathfrak{N}'}$ ein partiell isometrischer Operator aus der Algebra M mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{N}'$ und dem Endbereich $\mathfrak{M}''$, so daß also $\mathfrak{N}' \sim \mathfrak{M}''$ ist. Hieraus und aus (1) folgt $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}''$. Ist nun V ein partiell isometrischer Operator aus M mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{M}$ und dem Endbereich $\mathfrak{M}''$ und setzen wir $\mathfrak{M}^{(2\nu)} = V^\nu \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^{(2\nu+1)} = V^\nu \mathfrak{M}'$ (so daß also $\mathfrak{M}^{(0)} = \mathfrak{M}$, $\mathfrak{M}^{(1)} = \mathfrak{M}'$, $\mathfrak{M}^{(2)} = \mathfrak{M}''$ ist), so finden wir leicht

$$\mathfrak{M}^{(0)} \supset \mathfrak{M}^{(1)} \supset \mathfrak{M}^{(2)} \supset \ldots \quad \text{und} \quad \mathfrak{M}^{(\nu)} \eta M \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Außerdem bildet der Operator V den Raum $\mathfrak{M}^{(p)}$ auf den Raum $\mathfrak{M}^{(p+2)}$, den Raum $\mathfrak{M}^{(p+1)}$ auf den Raum $\mathfrak{M}^{(p+3)}$ und demzufolge den Raum $\mathfrak{M}^{(p)} - \mathfrak{M}^{(p+1)}$ auf den Raum $\mathfrak{M}^{(p+2)} - \mathfrak{M}^{(p+3)}$ isometrisch ab. Daraus folgt wie oben

$$\mathfrak{M}^{(p)} - \mathfrak{M}^{(p+1)} \sim \mathfrak{M}^{(p+2)} - \mathfrak{M}^{(p+3)} (\ldots M).$$

Daher sind in der Gleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(0)} = [\mathfrak{M}^{(0)} - \mathfrak{M}^{(1)}] \oplus [\mathfrak{M}^{(1)} - \mathfrak{M}^{(2)}] \oplus [\mathfrak{M}^{(2)} - \mathfrak{M}^{(3)}] \oplus \\ \cdots \oplus \mathfrak{M}^{(0)} \cap \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \ldots \end{aligned} \tag{3}$$

der erste, dritte, ... Teilraum dem zweiten, vierten, ... Teilraum in der Gleichung

$$\begin{aligned} \mathfrak{M}^{(1)} = [\mathfrak{M}^{(1)} - \mathfrak{M}^{(2)}] \oplus [\mathfrak{M}^{(2)} - \mathfrak{M}^{(3)}] \oplus [\mathfrak{M}^{(3)} - \mathfrak{M}^{(4)}] \oplus \\ \cdots \oplus \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \mathfrak{M}^{(3)} \cap \ldots \end{aligned} \tag{4}$$

äquivalent; ebenso sind der zweite, vierte, ... Teilraum in der Gleichung (3) dem ersten, dritten, ... Teilraum in der Gleichung (4) gleich, also äquivalent. Außerdem gilt

$$\mathfrak{M}^{(0)} \cap \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \ldots = \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \mathfrak{M}^{(3)} \cap \ldots.$$

Folglich ist $\mathfrak{M}^{(0)} \sim \mathfrak{M}^{(1)}$, also $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$. Andererseits ist $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{N}$ wegen (2) und somit $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$.

III. *Für jedes dem Faktor M zugeordnete Paar von Teilräumen $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ gilt genau eine der drei Beziehungen*

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}(\ldots M), \quad \mathfrak{M} < \mathfrak{N}(\ldots M), \quad \mathfrak{M} > \mathfrak{N}(\ldots M).$$

Nach Satz I ist nämlich $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$ oder $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$. Gelten beide Beziehungen, so ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ nach Satz II. Gilt nur die erste bzw. nur die zweite Relation, so ist $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ bzw. $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$.

IV. *Für $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ sind die Beziehungen $\mathfrak{M} < \mathfrak{P}$, $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{M} > \mathfrak{P}$ den Beziehungen $\mathfrak{N} < \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$ bzw. $\mathfrak{N} > \mathfrak{P}$ äquivalent.*

Die Beziehung $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{P}$ bedeutet, daß $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ gilt. Dann ist aber auch $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, d. h. $\mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{P}$. Ist dabei $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}$, so auch $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$. Daher folgt aus $\mathfrak{M} < \mathfrak{P}$ die Beziehung $\mathfrak{N} < \mathfrak{P}$. Ferner bedeutet die Beziehung $\mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{M}$, daß $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$ ist; hieraus ergibt sich wegen $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{M}$, daß in $\mathfrak{N}$ ein dem Teilraum $\mathfrak{M}'$ äquivalenter Teilraum $\mathfrak{N}'$ existiert. Dann ist jedoch $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, also $\mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{N}$. Hieraus können wir wieder wie oben schließen, daß die Beziehungen $\mathfrak{P} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P} < \mathfrak{M}$ einander äquivalent sind.

V. *Aus* $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ *und* $\mathfrak{N} < \mathfrak{P}$ *folgt* $\mathfrak{M} < \mathfrak{P}$.

Auf Grund von Satz IV folgt aus den Beziehungen $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, daß $\mathfrak{M} < \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$, also $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}'' \subset \mathfrak{P}' \subset \mathfrak{P}$ ist. Somit gilt $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{P}$; würde $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{P}$ sein, so wäre $\mathfrak{P} < \mathfrak{N}$ wegen Satz IV, was der Voraussetzung widerspricht. Also ist $\mathfrak{M} < \mathfrak{P}$.

Wir geben noch die folgenden einfachen Sätze an:

VI. a) *Aus* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \,\eta\, M$ *und* $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{N}$ *folgt* $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$;
b) $(0) \lesssim \mathfrak{M}$, *wobei* $(0) \sim \mathfrak{M}$ *nur für* $\mathfrak{M} = (0)$ *gilt*;
c) $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{H}$.

VII. *Aus* $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \,\eta\, M$ *folgt*[1] $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N} \,\eta\, M$ *und*

$$(\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{M}. \tag{5}$$

Satz VI gilt offenbar; zum Beweis von Satz VII weisen wir darauf hin, daß der Raum $(\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{N}$ die abgeschlossene Hülle der Gesamtheit der Elemente der Form

$$P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}}(f+g) = P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}} f = P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}} h, \quad f \in \mathfrak{M}, \quad g \in \mathfrak{N}, \quad h \in \mathfrak{H},$$

ist. Also gilt

$$(\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{N} = \overline{\Re(P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}})} \sim \overline{\Re\big((P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}} P_{\mathfrak{M}})^*\big)} = \overline{\Re(P_{\mathfrak{M}} P_{\mathfrak{H}-\mathfrak{N}})} \subset \mathfrak{M},$$

woraus sich die Beziehung (5) ergibt. Somit ist $(\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{N} \,\eta\, M$ und demzufolge $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N} \,\eta\, M$.

5. Endliche und unendliche Teilräume. Ein abgeschlossener Teilraum $\mathfrak{M}$, der zum Faktor M gehört, heißt *unendlich*, wenn er einem echten Teilraum von $\mathfrak{M}$ äquivalent ist; anderenfalls heißt $\mathfrak{M}$ *endlich*. Den Projektionsoperator $P \in M$ nennen wir *endlich* bzw. *unendlich*, wenn $P\mathfrak{H}$ endlich bzw. unendlich ist.

Offenbar ist der Teilraum (0) endlich. Ferner gilt:

I. *Ist* $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$ *und ist* $\mathfrak{N}$ *endlich, so ist* $\mathfrak{M}$ *ebenfalls endlich.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$; ferner sei $U \in M$ ein partiell isometrischer Operator mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{M}$ und dem Endbereich $\mathfrak{N}'$. Ist der Teil-

[1]) Im Unterschied zu § 25 bezeichnen wir in diesem Kapitel den minimalen Teilraum, der $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ enthält, mit $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}$; dies ist offenbar die Gesamtheit aller Elemente $f+g$ mit $f \in \mathfrak{M}$, $g \in \mathfrak{N}$ und ihrer starken Grenzwerte.

raum $\mathfrak{M}$ unendlich, so gilt $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}' \subsetneqq \mathfrak{M}$; daher erhalten wir, wenn wir $U\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}''$ setzen, $\mathfrak{N}'' \sim \mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}'$, $\mathfrak{N}'' \subsetneqq \mathfrak{N}'$. Daraus folgt

$$\mathfrak{N} = \mathfrak{N}' \oplus [\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'] \sim \mathfrak{N}'' \oplus [\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'] \subsetneqq \mathfrak{N},$$

d. h., $\mathfrak{N}$ ist unendlich; das widerspricht jedoch unserer Annahme.

Somit sind entweder alle Teilräume $\mathfrak{M}\,\eta\,M$ (insbesondere $\mathfrak{H}$) endlich, oder es existieren unendliche Teilräume $\mathfrak{M}\,\eta\,M$, und dann ist der ganze Raum $\mathfrak{H}$ unendlich. Jeder endliche Teilraum ist kleiner als ein beliebiger unendlicher Teilraum.

Für die weiteren Untersuchungen der unendlichen Teilräume benutzen wir ein Verfahren, das dem Verfahren der sukzessiven Subtraktion gleicher Abschnitte analog ist.

II. *Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ zum Faktor M gehörige Teilräume und ist $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}$, so läßt sich der Teilraum $\mathfrak{M}$ in der Form*

$$\mathfrak{M} = \Big(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus\, \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P} \tag{1}$$

darstellen, wobei $\mathfrak{A}$ eine bestimmte Indexmenge, $\mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}$ für alle $\alpha \in \mathfrak{A}$ und $\mathfrak{P} < \mathfrak{N}$ ist.

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}_1 \subsetneqq \mathfrak{M}$. Ist $\mathfrak{N} > \mathfrak{M} - \mathfrak{N}_1$, so ist die Darstellung $\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 \oplus [\mathfrak{M} - \mathfrak{N}_1]$ schon die gesuchte ($\mathfrak{A} = \{1\}$, $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} - \mathfrak{N}_1$). Anderenfalls ist $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}_2 \subset \mathfrak{M} - \mathfrak{N}_1$. Wenden wir das Zornsche Lemma an, so können wir schließen, daß ein maximales System $\{\mathfrak{N}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ von zueinander orthogonalen Teilräumen $\mathfrak{N}_\alpha$ in $\mathfrak{M}$ existiert, die dem Teilraum $\mathfrak{N}$ äquivalent sind. Für $\mathfrak{P} = \mathfrak{M} - \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus\, \mathfrak{N}_\alpha$ erhalten wir $\mathfrak{M} = \Big(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus\, \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P} < \mathfrak{N}$, da wegen der Maximalität von $\{\mathfrak{N}_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ in $\mathfrak{P}$ kein zu $\mathfrak{N}$ äquivalenter Teilraum enthalten ist.

III. *Ist die Menge $\mathfrak{A}$ unendlich, so darf man in Gleichung* (1) $\mathfrak{P} = (0)$ *setzen.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{A}' = \mathfrak{A} - \{1\}$. Da die Mengen $\mathfrak{A}'$ und $\mathfrak{A}$ von der gleichen Mächtigkeit sind, gilt

$$\mathfrak{M} = \Big(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus\, \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P} \sim \Big(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}'} \oplus\, \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P} \lesssim \Big(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}'} \oplus\, \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{N}_1 \lesssim \mathfrak{M}.$$

Hieraus folgt $\mathfrak{M} \sim \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus\, \mathfrak{N}_\alpha$. Ist U ein partiell isometrischer Operator aus der Algebra M mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{M}$ und dem Endbereich $\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus\, \mathfrak{N}_\alpha$ und setzen wir $\mathfrak{N}'_\alpha = U^* \mathfrak{N}_\alpha$, so ergibt sich

$$\mathfrak{N}'_\alpha \perp \mathfrak{N}'_\beta \quad \text{für} \quad \alpha \neq \beta, \qquad \mathfrak{N}'_\alpha \sim \mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}(\ldots M),$$

$$\mathfrak{M} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus\, \mathfrak{N}'_\alpha.$$

IV. *Jeder unendliche Teilraum $\mathfrak{M}$ läßt sich in der Gestalt*

$$\mathfrak{M} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus\, \mathfrak{N}_\alpha$$

darstellen, wobei die Teilräume $\mathfrak{N}_\alpha$ von (0) *verschieden und einander äquivalent sind und $\mathfrak{A}$ eine unendliche Menge bezeichnet.*

Beweis. Nach Voraussetzung ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}' \subsetneqq \mathfrak{M}$. Ist U ein partiell isometrischer Operator aus der Algebra M mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{M}$ und dem Endbereich $\mathfrak{M}'$ und setzen wir

$$\mathfrak{M}^{(n)} = U^n \mathfrak{M}, \qquad \mathfrak{N}'_n = \mathfrak{M}^{(n)} - \mathfrak{M}^{(n+1)} \quad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

so gilt

$$\mathfrak{M}^{(n+1)} \subsetneqq \mathfrak{M}^{(n)}, \qquad \mathfrak{N}'_{n+1} = U \mathfrak{N}'_n.$$

Also ist $\mathfrak{N}'_n \neq (0)$, die Teilräume $\mathfrak{N}'_n$ sind einander äquivalent, und es gilt

$$\mathfrak{M} = \left(\sum_{n=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{N}'_n \right) \oplus \mathfrak{M}^{(0)} \cap \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \ldots.$$

Die Anwendung von Satz II auf die Teilräume $\mathfrak{M}^{(0)} \cap \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \ldots$ und $\mathfrak{N}'_0$ (statt $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$) liefert die Beziehungen

$$\mathfrak{M}^{(0)} \cap \mathfrak{M}^{(1)} \cap \mathfrak{M}^{(2)} \cap \ldots = \left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}'} \oplus \mathfrak{N}'_\alpha \right) \oplus \mathfrak{P}', \qquad \mathfrak{P}' < \mathfrak{N}'_0,$$

und

$$\mathfrak{M} = \left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}'_\alpha \right) \oplus \mathfrak{P}', \qquad \mathfrak{A} = \{0, 1, 2, 3, \ldots\} + \mathfrak{A}'.$$

Da $\mathfrak{A}$ unendlich ist, gilt nach Satz III

$$\mathfrak{M} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}_\alpha \quad \text{mit} \quad \mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}_\beta \quad \text{für alle} \quad \alpha, \beta \in \mathfrak{A}.$$

V. *In jedem unendlichen Teilraum* $\mathfrak{M}$ *gibt es einen Teilraum* $\mathfrak{N}$ *mit der Eigenschaft* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} - \mathfrak{N}$.

Beweis. Wir zerlegen die Menge $\mathfrak{A}$ aus Satz IV in zwei unendliche Teilmengen $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ von gleicher Mächtigkeit und setzen $\mathfrak{N} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}_\alpha$. Dann erhalten wir

$$\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}_\alpha \sim \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_1} \oplus \mathfrak{N}_\alpha \sim \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}_2} \oplus \mathfrak{N}_\alpha,$$

also

$$\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N} \sim \mathfrak{M} - \mathfrak{N}.$$

VI. *Ist der Raum* $\mathfrak{H}$ *separabel, so sind alle unendlichen Teilräume von* $\mathfrak{H}$ *einander äquivalent.*

Beweis. Die Teilräume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$ seien unendlich. Nach Satz IV läßt sich $\mathfrak{M}$ in der Gestalt $\mathfrak{M} = \sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}_\alpha$ darstellen, wobei $\mathfrak{A}$ abzählbar ist. Wenden wir ferner den Satz II auf die Teilräume $\mathfrak{M}'$ und $\mathfrak{N}_1$ an, so erhalten wir

$$\mathfrak{M}' = \left(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}'} \oplus \mathfrak{N}_\alpha \right) \oplus \mathfrak{P}';$$

dabei ist die Menge $\mathfrak{A}'$ endlich (und eventuell sogar leer) oder abzählbar und $\mathfrak{P}' < \mathfrak{N}_1$. Ist $\mathfrak{A}'$ endlich, so ist offenbar $\mathfrak{M}' \lesssim \mathfrak{M}$; ist dagegen $\mathfrak{A}'$ abzählbar, so können wir $\mathfrak{P}' = (0)$ setzen, woraus sich $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}$ ergibt. In jedem dieser Fälle ist also $\mathfrak{M}' \lesssim \mathfrak{M}$. Vertauschen wir die Rollen von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{M}'$, so folgt $\mathfrak{M}' \sim \mathfrak{M}$.

VII. *Die Summe von endlich vielen endlichen Teilräumen ist endlich.*

Diesen Satz wollen wir in vier Schritten beweisen.

1°. *Sind* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$, $\mathfrak{P}\ \eta\ M$ *abgeschlossene Teilräume und ist* $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$, $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, *so läßt sich* $\mathfrak{P}$ *in der Form* $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}' \oplus \mathfrak{N}' \oplus \mathfrak{P}'$ *darstellen, wobei* $\mathfrak{M}'$, $\mathfrak{N}'$, $\mathfrak{P}'$ *zueinander orthogonale und zur Algebra* M *gehörige Teilräume bezeichnen. Dabei ist* $\mathfrak{M}' \subset \mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}' \subset \mathfrak{N}$, *und* $\mathfrak{P}'$ *ist der Wertebereich des Operators* $1 + A$, *wobei* A *ein zur Algebra* M *gehöriger abgeschlossener linearer Operator mit einem zu* $\mathfrak{M}'$ *orthogonalen Definitionsbereich und einem zu* $\mathfrak{N}'$ *orthogonalen Wertebereich ist, so daß die Gleichung* $Af = 0$ *nur für* $f = 0$ *erfüllt ist. Dabei ist* $\mathfrak{P}' \sim \overline{\mathfrak{D}(A)} \sim \overline{\mathfrak{R}(A)}$.

Wir setzen $\mathfrak{M}' = \mathfrak{M} \cap \mathfrak{P}$, $\mathfrak{N}' = \mathfrak{N} \cap \mathfrak{P}$, $\mathfrak{P}' = \mathfrak{P} - [\mathfrak{M}' \oplus \mathfrak{N}']$. Gehört f zu $\mathfrak{P}'$, so ist $f \in \mathfrak{P} \subset \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$, so daß sich also das Element f in der Form $f = g + h$ mit $g \in \mathfrak{M}$, $h \in \mathfrak{N}$ darstellen läßt. Wegen $f \perp \mathfrak{M}'$ und $h \in \mathfrak{N} \perp \mathfrak{M}'$ ist auch $g = f - h \perp \mathfrak{M}'$. Analog ist $h \perp \mathfrak{N}'$. Setzen wir $h = Ag$, so definiert diese Beziehung den Operator A eindeutig. Aus $g = 0$ folgt nämlich $h = f \in \mathfrak{P}'$ und daher $h \in \mathfrak{P} \cap \mathfrak{N} = \mathfrak{N}'$; da andererseits $h \in \mathfrak{P}' \perp \mathfrak{N}'$ ist, folgt $h = 0$. Analog ergibt sich aus $h = 0$ die Beziehung $g = 0$.

Daraus, daß die Menge $\mathfrak{P}'$ linear und abgeschlossen und $\mathfrak{P}'\ \eta\ M$ ist, können wir schließen, daß der Operator A dieselben Eigenschaften besitzt. Wir setzen $\mathfrak{M}'' = \overline{\mathfrak{D}(A)}$, $\mathfrak{N}'' = \overline{\mathfrak{R}(A)}$, $A_0 = (1 + A) P_{\mathfrak{M}''}$. Dann gehört A_0 zum Faktor M und ist auf einer in $\mathfrak{H}$ dichten Menge definiert. Es gilt also[1])

$$\begin{aligned}\mathfrak{P}' = \mathfrak{R}(1 + A) = \mathfrak{R}(A_0) \sim \overline{\mathfrak{R}(A_0^*)} = \mathfrak{H} - \{f : A_0 f = 0\}\\ = \mathfrak{H} - \{f : P_{\mathfrak{M}''} f = 0\} = \mathfrak{H} - (\mathfrak{H} - \mathfrak{M}'') = \mathfrak{M}''.\end{aligned}$$

Ebenso ergibt sich $\mathfrak{P}' \sim \mathfrak{N}''$.

2°. *Sind die Teilräume* $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ *und* $\mathfrak{P}$ *die gleichen wie in Satz* 1°, *so ist entweder* $\mathfrak{P} \precsim \mathfrak{M}$ *oder* $(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{P} \precsim \mathfrak{N}$.

Wenden wir den Satz 1° auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P}$ an, so erhalten wir die Teilräume $\mathfrak{M}_1'$, $\mathfrak{M}_1''$, $\mathfrak{N}_1'$, $\mathfrak{N}_1''$, $\mathfrak{P}_1'$ und den Operator A_1, und wenden wir danach den Satz 1° auf $\mathfrak{M}$, $\mathfrak{N}$ und $(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{P}$ an, so ergeben sich die Teilräume $\mathfrak{M}_2'$, $\mathfrak{M}_2''$, $\mathfrak{N}_2'$, $\mathfrak{N}_2''$, $\mathfrak{P}_2'$ und der Operator A_2.

Wir sehen sofort, daß $\mathfrak{M}_1' \perp \mathfrak{M}_2'$ und $\mathfrak{N}_1' \perp \mathfrak{N}_2'$ ist. Ferner setzen wir

$$\mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M} - (\mathfrak{M}_1' \oplus \mathfrak{M}_2'), \qquad \mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N} - (\mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2').$$

Aus $f \in \mathfrak{D}(A_1)$ folgt $f + A_1 f \in \mathfrak{P}_1' \subset \mathfrak{P}$, $f + A_1 f \perp \mathfrak{M}_2' \subset (\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{P}$. Andererseits ist $A_1 f$ als Element von $\mathfrak{N}$ ebenfalls zu $\mathfrak{M}_2' \subset \mathfrak{M}$ orthogonal. Daraus ergibt sich $f \perp \mathfrak{M}_2'$ und somit $\mathfrak{M}_1'' \perp \mathfrak{M}_2'$ und $\mathfrak{M}_1'' \subset \mathfrak{M}_0$. Analog erhalten wir $\mathfrak{M}_2'' \subset \mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{N}_1''$, $\mathfrak{N}_2'' \subset \mathfrak{N}_0$. Für die Teilräume $\mathfrak{N}_1'$ und $\mathfrak{M}_2'$ gilt eine der beiden Beziehungen $\mathfrak{N}_1' \precsim \mathfrak{M}_2'$, $\mathfrak{M}_2' \precsim \mathfrak{N}_1'$. Im ersten Fall existiert in $\mathfrak{M}_2'$ ein Teilraum $\mathfrak{M}_2$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{N}_1' \sim \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_2'$; also ist

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{M}_1' \oplus \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{P}_1' \sim \mathfrak{M}_1' \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \mathfrak{M}_1'' \subset \mathfrak{M}_1' \oplus \mathfrak{M}_2' \oplus \mathfrak{M}_0 = \mathfrak{M},$$

---

[1]) Der Ausdruck $\{f : A_0 f = 0\}$ bezeichnet hier den Nullraum des Operators A_0, d. h. die Gesamtheit derjenigen Elemente f, für die $A_0 f = 0$ gilt.

d. h.

$$\mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{M}.$$

Im zweiten Fall gibt es in $\mathfrak{N}_1'$ einen Teilraum $\mathfrak{N}_1$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{M}_2' \sim \mathfrak{N}_1 \subset \mathfrak{N}_1'$; daraus folgt

$$(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{P} = \mathfrak{M}_2' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \mathfrak{P}_2' \sim \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \mathfrak{N}_2'' \subset \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \mathfrak{N}_0 = \mathfrak{N},$$
$$(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{N}.$$

3°. *Die direkte Summe zweier zueinander orthogonaler endlicher Teilräume ist endlich.*

Es sei $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ endlich. Ist der Raum $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ unendlich, so existiert in ihm nach Satz V ein Teilraum $\mathfrak{P}$ mit der Eigenschaft

$$\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N} \sim \mathfrak{P} \sim (\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{P}.$$

Nach Satz 2° ist dann entweder $\mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{M}$ oder $(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{N}$; also ist $\mathfrak{M}$ oder $\mathfrak{N}$ genau wie $\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}$ unendlich. Das ist aber nicht möglich, da $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ nach Voraussetzung endlich sind.

4°. *Die Summe $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}$ zweier endlicher Teilräume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ ist endlich.*

Wir setzen $\mathfrak{P} = (\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}) - \mathfrak{N}$. Nach Nr. 4, Satz VII, ist $\mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{M}$, also $\mathfrak{P}$ endlich. Andererseits ist $\mathfrak{P} \perp \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N} = \mathfrak{P} \oplus \mathfrak{N}$, so daß $\mathfrak{M} \dotplus \mathfrak{N}$ nach Satz 3° endlich ist.

Hieraus erhalten wir durch Induktion den Satz VII.

§ 36. Relative Dimension

1. Der ganze Teil des Quotienten zweier Teilräume. Wir zeigen jetzt, daß jedem endlichen Teilraum eine nichtnegative Zahl zugeordnet werden kann, die die Eigenschaften einer Dimension besitzt. Dabei zeigt es sich, daß die Dimension beliebige (sogar irrationale) Werte annehmen kann.

Wir erinnern vor allem daran (§ 35, Nr. 5, Satz II), daß für zwei gegebene Teilräume $\mathfrak{M}, \mathfrak{N} \,\eta\, M$ ($\mathfrak{N} \neq (0)$) die Darstellung

$$\mathfrak{M} = \Big(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P}$$

gilt, wobei $\mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{P} < \mathfrak{N}$ ist (für $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ ist die Menge $\mathfrak{A}$ leer). Wir setzen nun voraus, $\mathfrak{N}$ sei endlich, und untersuchen, wie $\mathfrak{A}$ beschaffen sein muß, damit $\mathfrak{M}$ ebenfalls endlich ist.

Hilfssatz. *Ist der Teilraum $\mathfrak{N}$ endlich und von* (0) *verschieden, so ist die Menge $\mathfrak{A}$ in der Darstellung*

$$\mathfrak{M} = \Big(\sum_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}_\alpha\Big) \oplus \mathfrak{P}, \qquad \mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}, \qquad \mathfrak{P} < \mathfrak{N}, \tag{1}$$

genau dann endlich, wenn der Teilraum $\mathfrak{M}$ endlich ist. Ist $\mathfrak{M}$ endlich, so hängt die Anzahl der Elemente von $\mathfrak{A}$ nicht von der speziellen Darstellung (1) *ab.*

Beweis. Die Notwendigkeit der Bedingung folgt unmittelbar aus § 35, Nr. 5, Satz VII. Wir nehmen nun an, $\mathfrak{M}$ sei endlich. Wäre dann $\mathfrak{A}$ unendlich, so würden wir, wenn wir $\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_3 \oplus \cdots$ setzen,

$$\mathfrak{M}' = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_3 \oplus \cdots \sim \mathfrak{N}_2 \oplus \mathfrak{N}_3 \cdots \subsetneqq \mathfrak{M}'$$

erhalten, d. h., $\mathfrak{M}'$ wäre ein unendlicher Teilraum mit $\mathfrak{M}' \lesssim \mathfrak{M}$. Das ist aber infolge der Endlichkeit von $\mathfrak{M}$ und § 35, Nr. 5, Satz I, nicht möglich.

Wir bezeichnen mit k die Anzahl dieser Räume, und es sei

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1' \oplus \mathfrak{N}_2' \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_l' \oplus \mathfrak{P}' \tag{2}$$

eine zweite Darstellung. Ist beispielsweise $k < l$, so existiert auf Grund der Bedingung $\mathfrak{P} < \mathfrak{N} \sim \mathfrak{N}_{k+1}'$ ein Teilraum $\mathfrak{R}$ derart, daß $\mathfrak{P} \sim \mathfrak{R} \subset \mathfrak{N}_{k+1}'$ ist. Daraus folgt

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{N}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_k \oplus \mathfrak{P} \sim \mathfrak{N}_1' \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_k' \oplus \mathfrak{R} \subsetneqq \mathfrak{M};$$

dies widerspricht jedoch der Tatsache, daß $\mathfrak{M}$ endlich ist.

Die Darstellung (1) läßt sich in diesem Fall symbolisch in der Form

$$\mathfrak{M} = k\,\mathfrak{N} \dotplus \mathfrak{P} \tag{3}$$

schreiben; die Zahl k nennen wir den *ganzen Teil* des Quotienten aus $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ und bezeichnen sie mit $\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}\right]$.

Die Gleichung (3) ist auch für $\mathfrak{M} \lesssim \mathfrak{N}$ sinnvoll; für $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ ist $k = 1$ und $\mathfrak{P} = (0)$, für $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ ist $k = 0$ und $\mathfrak{P} = \mathfrak{M}$.

Offenbar gelten die Ungleichungen

$$\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right]\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}\right] \leqq \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}\right] \leqq \left(\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}\right] + 1\right)\left(\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}\right] + 1\right) \tag{4}$$

und für $\mathfrak{N} \perp \mathfrak{M}$

$$\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}\right] + \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}\right] \leqq \left[\frac{\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}\right] \leqq \left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}\right] + \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}}\right] + 1; \tag{5}$$

ihren Beweis überlassen wir dem Leser.

2. Existenz eines minimalen Teilraumes. Wir setzen voraus, im Raum $\mathfrak{H}$ existiere ein *zum Faktor M gehöriger minimaler Teilraum*, d. h. ein Teilraum $\mathfrak{M}_0 \neq (0)$ und $\mathfrak{M}_0 \eta M$ mit der Eigenschaft, daß aus $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}_0$ und $\mathfrak{N}\,\eta\,M$ die Beziehung $\mathfrak{N} = (0)$ folgt. Ersetzen wir $\mathfrak{N}$ in (3) durch dieses minimale $\mathfrak{M}_0$, so ist $\mathfrak{P}$ wegen $\mathfrak{P} < \mathfrak{M}_0$ gleich (0), d. h., es ist $\mathfrak{M} = k\mathfrak{M}_0$. Diese Zahl k heißt der *Quotient aus* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{M}_0$, $k = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}$. Sind $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ beide von (0) verschieden und beliebige endliche Teilräume, so wird ihr Quotient durch

$$\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \frac{\dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}}{\dfrac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_0}}$$

definiert. Die folgenden Behauptungen lassen sich leicht beweisen:

a) $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{N}}$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{M}'$;

b) $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} < \frac{\mathfrak{M}'}{\mathfrak{N}}$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} < \mathfrak{M}'$;

c) $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = 0$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \sim (0)$;

d) $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} = 1$ genau dann, wenn $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$;

e) $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} \cdot \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{P}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{P}}$;

f) $\frac{\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{P}}{\mathfrak{N}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}} + \frac{\mathfrak{P}}{\mathfrak{N}}$ für $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{P}$.

3. Das Fehlen eines minimalen Teilraumes. Wir nehmen nun an, in $\mathfrak{H}$ existiere kein minimaler Teilraum, aber es gebe wenigstens einen endlichen Teilraum, und konstruieren dann eine Folge von endlichen Teilräumen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ mit der Eigenschaft $\left[\frac{\mathfrak{M}_k}{\mathfrak{M}_{k+1}}\right] \geqq 2$. Dazu gehen wir von einem beliebigen endlichen Teilraum $\mathfrak{M}_1$ aus. Da $\mathfrak{M}_1$ nicht minimal ist, existiert ein von (0) verschiedener Teilraum $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}_1$, d. h., es ist $\mathfrak{N} \sim \mathfrak{P} \subsetneqq \mathfrak{M}_1$. Nach § 35, Nr. 4, Satz III, gilt entweder $\mathfrak{N} \lesssim \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{P}$ oder $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{P} \lesssim \mathfrak{N}$. Im ersten Fall setzen wir $\mathfrak{N} = \mathfrak{M}_2$, im zweiten $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{P} = \mathfrak{M}_2$. Dann ist $\left[\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{M}_2}\right] \geqq 2$. Wenden wir auf $\mathfrak{M}_2$ dasselbe Verfahren an, so erhalten wir $\mathfrak{M}_3$ usw., so daß sich auf diese Weise die Folge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ ergibt.

Es seien $\mathfrak{M}, \mathfrak{N}$ beliebige endliche und von (0) verschiedene Teilräume. Wir zeigen, daß dann der Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}$$

existiert. Aus den Ungleichungen

$$\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_{n+1}}\right] \geqq \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]\left[\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+1}}\right] \geqq 2\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]$$

[vgl. Nr. 1, (4)] folgt entweder

$$\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right] = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots) \quad \text{oder} \quad \lim_{n\to\infty}\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right] = \infty.$$

Im ersten Fall ist $\mathfrak{N} < \mathfrak{M}_n$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$; dann folgt aus den Ungleichungen

$$\left[\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right] \geqq \left[\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+1}}\right]\left[\frac{\mathfrak{M}_{n+1}}{\mathfrak{M}_{n+2}}\right] \cdots \left[\frac{\mathfrak{M}_{n+m-1}}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right] \geqq 2^m$$

die Beziehung $\mathfrak{M}_1 \lesssim 2^{m-1}\,\mathfrak{M}_m \lesssim 2^{m-1}\,\mathfrak{N}$, also $\left[\frac{\mathfrak{M}_1}{\mathfrak{N}}\right] \geqq 2^{m-1}$ für jedes natürliche m; das ist jedoch nicht möglich. Somit gilt $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]=\infty$ und analog $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]=\infty$. Dann folgt aus den Ungleichungen

$$\frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]} \leqq \frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]+1}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]} \cdot \frac{\left[\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]+1}{\left[\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]} \leqq \frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]+1}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}\,\frac{2^m+1}{2^m}$$

[vgl. Nr. 1, (4)] die Beziehung

$$\overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]} = \overline{\lim_{m\to\infty}}\,\frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_{n+m}}\right]} \leqq \frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]+1}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}. \tag{1}$$

Andererseits ergibt sich aus (1) wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]=\infty$

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]} = \underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]+1}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]} \geqq \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}.$$

Daher ist

$$\underline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]} = \overline{\lim_{n\to\infty}}\,\frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}, \tag{2}$$

und der Grenzwert $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}$ existiert; er ist endlich und nichtnegativ. Da die Endlichkeit bei Vertauschung von $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ nicht verletzt werden darf, kann der Grenzwert nicht gleich Null sein; also ist

$$0 < \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right]}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]} < \infty.$$

Wir nennen diesen Grenzwert den *Quotienten aus* $\mathfrak{M}$ *und* $\mathfrak{N}$ und bezeichnen ihn mit $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$. Für $\mathfrak{M}=(0)$ setzen wir $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}=0$.

Später werden wir zeigen, daß der Quotient $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ nicht von der Wahl der Folge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ abhängt; bis dahin werden wir diese Quotienten untersuchen, indem wir die Folge auf irgendeine Art festlegen. Wie bei der Existenz eines minimalen Teilraumes hat der Quotient $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ die Eigenschaften a) bis f) aus Nr. 2; sie folgen sofort aus den analogen Eigenschaften des Ausdrucks $\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}\right]$ und den Ungleichungen (4) und (5) aus Nr. 1.

4. Existenz und Eigenschaften der relativen Dimension. Die Ergebnisse der Nr. 2 und 3 können wir in der Form des folgenden Hauptsatzes formulieren.

Theorem 1. *Es existiert eine für alle abgeschlossenen und zum Faktor M gehörigen Teilräume definierte Funktion $D(\mathfrak{M})$, die den folgenden Bedingungen genügt:*

a′) $D(\mathfrak{M}) = 0$ *für* $\mathfrak{M} = (0)$; $D(\mathfrak{M}) > 0$ *für* $\mathfrak{M} \neq (0)$;
b′) $D(\mathfrak{M}) = \infty$ *genau dann, wenn* $\mathfrak{M}$ *unendlich*;
c′) *für* $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}$ *ist* $D(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{N})$;
d′) *für* $\mathfrak{M} \perp \mathfrak{N}$ *ist* $D(\mathfrak{M} \oplus \mathfrak{N}) = D(\mathfrak{M}) + D(\mathfrak{N})$;
e′) *für* $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ *und endliches*[1] $\mathfrak{M}$ *ist* $\mathfrak{D}(\mathfrak{M}) < \mathfrak{D}(\mathfrak{N})$.

Die Bedingungen a′), c′) *und* d′) *definieren die Funktion* $D(\mathfrak{M})$ *eindeutig bis auf einen konstanten Faktor, sobald* $D(\mathfrak{M})$ *mindestens einen endlichen positiven Wert annimmt.*

Beweis. Enthält der Raum $\mathfrak{H}$ keine endlichen, von (0) verschiedenen Teilräume, so nimmt die Funktion $D(\mathfrak{M})$ nur die beiden Werte 0 für $\mathfrak{M} = (0)$ und ∞ für $\mathfrak{M} \neq (0)$ an. Offenbar sind dann die Bedingungen a′) bis e′) erfüllt. Wir wollen von diesem trivialen Fall absehen und annehmen, daß es in $\mathfrak{H}$ endliche, von (0) verschiedene Teilräume gibt. Es sei $\mathfrak{N}$ einer von ihnen. Dann setzen wir $D(\mathfrak{M}) = \dfrac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ für endliches $\mathfrak{M}$. Die so konstruierte Funktion $D(\mathfrak{M})$ erfüllt alle fünf Bedingungen.

Es sei nun $D(\mathfrak{M})$ eine beliebige Funktion, die den Bedingungen a′), c′) und d′) genügt. Dann ist $D(\mathfrak{M}) = \infty$ für unendliches $\mathfrak{M}$; denn ist $\mathfrak{M}$ unendlich, so existiert ein Teilraum $\mathfrak{M}_1 \subsetneqq \mathfrak{M}$, der dem Raum $\mathfrak{M}$ äquivalent ist. Hieraus und aus den Bedingungen d′), c′) und a′) folgt

$$D(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{M}_1) + D(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1) = D(\mathfrak{M}) + D(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1),$$

wobei $D(\mathfrak{M} - \mathfrak{M}_1)$ positiv ist. Dies gilt aber nur für $D(\mathfrak{M}) = \infty$. Es sei nun $\mathfrak{M}$ endlich, und $\mathfrak{N}$ sei ein Teilraum, für den $D(\mathfrak{N})$ endlich und positiv ist. Auf Grund des eben Bewiesenen ist $\mathfrak{N}$ endlich; infolge der Bedingung a′) ist $\mathfrak{N} \neq (0)$. Wenden wir a′), c′) und d′) auf die Formel (3) aus Nr. 1 an, so erhalten wir

$$D(\mathfrak{M}) \leqq k D(\mathfrak{N}) + D(\mathfrak{P}) \leqq (k+1)\, D(\mathfrak{N});$$

also ist $D(\mathfrak{M})$ endlich. Daher folgt aus a′), c′) und d′) die Bedingung b′).

Existiert in $\mathfrak{H}$ ein minimaler Teilraum $\mathfrak{M}_0$, so gilt für jedes endliche $\mathfrak{M}$

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_k \quad \text{mit} \quad \mathfrak{M}_j \sim \mathfrak{M}_0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k) \quad \text{und} \quad k = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}.$$

Hieraus folgt mit d′) und c′)

$$D(\mathfrak{M}) = D(\mathfrak{M}_1) + \cdots + D(\mathfrak{M}_k) = k D(\mathfrak{M}_0) = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0} D(\mathfrak{M}_0),$$

---

[1]) Ist $\mathfrak{H}$ ein separabler Raum, so folgt schon aus der Beziehung $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$ die Endlichkeit von $\mathfrak{M}$ (vgl. § 35, Nr. 5, Satz VI).

also (wegen a′) $\frac{D(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{M}_0)} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}$ und

$$\frac{D(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{N})} = \frac{\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_0}}{\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_0}} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}. \tag{1}$$

Wir setzen nun voraus, $\mathfrak{H}$ besitze keinen minimalen Teilraum. Ferner wählen wir eine Folge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$, deren Glieder der Bedingung $\left[\frac{\mathfrak{M}_n}{\mathfrak{M}_{n+1}}\right] \geqq 2$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ genügen. Dann gilt für alle endlichen und von (0) verschiedenen Teilräume $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$

$$\mathfrak{M} = \left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right] \mathfrak{M}_n \dotplus \mathfrak{P}_n, \qquad \mathfrak{P}_n < \mathfrak{M}_n,$$

$$\mathfrak{N} = \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right] \mathfrak{M}_n \dotplus \mathfrak{K}_n, \qquad \mathfrak{K}_n < \mathfrak{M}_n,$$

so daß wir mit Hilfe von d′)

$$\left.\begin{aligned} D(\mathfrak{M}) &= \left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right] D(\mathfrak{M}_n) + D(\mathfrak{P}_n), \\ D(\mathfrak{N}) &= \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right] D(\mathfrak{M}_n) + D(\mathfrak{K}_n) \end{aligned}\right\} \tag{2}$$

erhalten. Aus der Beziehung $\mathfrak{P}_n < \mathfrak{M}_n$ folgt andererseits $\mathfrak{P}_n \sim \mathfrak{M}'_n \subsetneqq \mathfrak{M}_n$, also ist wegen d′), a′) und c′)

$$D(\mathfrak{M}_n) = D(\mathfrak{M}'_n) + D(\mathfrak{M}_n - \mathfrak{M}'_n) > D(\mathfrak{M}'_n) = D(\mathfrak{P}_n),$$

so daß hiermit aus (2)

$$D(\mathfrak{M}) < \left(\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right] + 1\right) D(\mathfrak{M}_n), \qquad D(\mathfrak{N}) > \left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right] D(\mathfrak{M}_n),$$

also

$$\frac{D(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{N})} < \frac{\left[\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{M}_n}\right] + 1}{\left[\frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}_n}\right]}$$

und nach Grenzübergang für $n \to \infty$

$$\frac{D(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{N})} \leqq \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$$

folgt. Da analog $\frac{D(\mathfrak{N})}{D(\mathfrak{M})} \leqq \frac{\mathfrak{N}}{\mathfrak{M}}$ ist, folgt $\frac{D(\mathfrak{M})}{D(\mathfrak{N})} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ [vgl. Nr. 2, d) und e)].

Somit gilt die Gleichung (1) auch dann, wenn kein minimaler Teilraum existiert. Hieraus können wir erstens schließen, daß der Quotient $\frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}}$ nicht von der Wahl des minimalen Teilraumes oder der Folge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ abhängt, und zweitens, daß für endliche $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$

$$\frac{D_1(\mathfrak{M})}{D_1(\mathfrak{N})} = \frac{D_2(\mathfrak{M})}{D_2(\mathfrak{N})} = \frac{\mathfrak{M}}{\mathfrak{N}},$$

also
$$\frac{D_1(\mathfrak{M})}{D_2(\mathfrak{M})} = \frac{D_1(\mathfrak{N})}{D_2(\mathfrak{N})} = \text{const}$$

ist, wenn $D_1(\mathfrak{M})$ und $D_2(\mathfrak{M})$ zwei verschiedene, den Bedingungen a′), c′) und d′) genügende Funktionen sind.

Wir haben hiermit bewiesen, daß die Funktion $D(\mathfrak{M})$ durch die Bedingungen a′), c′) und d′) bis auf einen konstanten Faktor definiert ist.

Die durch die Bedingungen a′), c′) und d′) definierte Funktion $D(\mathfrak{M})$ heißt *relative Dimension.* Wollen wir betonen, daß sich die Dimension auf den Faktor M bezieht, so schreiben wir $D_M(\mathfrak{M})$. Die Wahl des konstanten Faktors nennen wir *Normierung* der Funktion $D(\mathfrak{M})$.

Die relative Dimension läßt sich auch als eine auf den Projektionsoperatoren $P \in M$ definierte Funktion betrachten, wenn wir $D(P) = D(\mathfrak{M})$ für $P = P_{\mathfrak{M}}$ setzen. Die Bedingungen a′) bis e′) nehmen dann folgende Gestalt an:

a″) $D(P) = 0$ für $P = 0$; $D(P) > 0$ für $P \neq 0$;
b″) $D(P) = \infty$ genau dann, wenn P unendlich ist;
c″) für $P_1 \sim P_2$ ist $D(P_1) = D(P_2)$;
d″) für $P_1 P_2 = 0$ ist $D(P_1 + P_2) = D(P_1) + D(P_2)$;
e″) für $P_1 < P_2$ und endliches P_1 ist $D(P_1) < D(P_2)$.

I. *Sind* $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots$ *zueinander orthogonale und zur Algebra M gehörige Teilräume, so gilt*
$$D(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots) = D(\mathfrak{M}_1) + D(\mathfrak{M}_2) + \cdots. \tag{3}$$

Beweis. Wir untersuchen zunächst den Fall, daß $\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots$ ein endlicher Teilraum ist. Offenbar können wir annehmen, daß alle $D(\mathfrak{M}_k)$ positiv sind. Aus
$$\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n < \mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots$$
folgt
$$D(\mathfrak{M}_1) + D(\mathfrak{M}_2) + \cdots + D(\mathfrak{M}_n) < D(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots)$$
und somit
$$D(\mathfrak{M}_1) + D(\mathfrak{M}_2) + \cdots \leqq D(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots). \tag{4}$$

Die Reihe auf der linken Seite dieser Ungleichung konvergiert. Wir brauchen also nur noch zu zeigen, daß das Gleichheitszeichen gilt. Dazu nehmen wir das Gegenteil an; es sei also
$$\varepsilon = D(\mathfrak{M}_1 \oplus \mathfrak{M}_2 \oplus \cdots) - [D(\mathfrak{M}_1) + D(\mathfrak{M}_2) + \cdots] > 0. \tag{5}$$

Da die linke Seite von (4) konvergiert, strebt $D(\mathfrak{M}_n)$ gegen Null. Also existiert ein Index ν, für den $0 < D(\mathfrak{M}_\nu) < \varepsilon$ gilt. Wir setzen $\mathfrak{M}_\nu = \mathfrak{N}$. Ferner können wir schreiben:
$$\begin{aligned} \varepsilon &= D(\mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n) + D(\mathfrak{M}_{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+2} \oplus \cdots) \\ &\quad - [D(\mathfrak{M}_1) + \cdots + D(\mathfrak{M}_n)] - [D(\mathfrak{M}_{n+1}) + D(\mathfrak{M}_{n+2}) + \cdots] \\ &= D(\mathfrak{M}_{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+2} \oplus \cdots) - [D(\mathfrak{M}_{n+1}) + D(\mathfrak{M}_{n+2}) + \cdots]; \end{aligned}$$
somit ist
$$\begin{aligned} D(\mathfrak{N}) &< D(\mathfrak{M}_{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+2} \oplus \cdots) - [D(\mathfrak{M}_{n+1}) + D(\mathfrak{M}_{n+2}) + \cdots] \\ &< D(\mathfrak{M}_{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+2} \oplus \cdots). \end{aligned} \tag{6}$$

Andererseits können wir aber n so groß wählen, daß

$$D(\mathfrak{M}_{n+1}) + D(\mathfrak{M}_{n+2}) + \cdots < D(\mathfrak{N}) \tag{7}$$

gilt. Dann ist insbesondere $D(\mathfrak{M}_{n+1}) < D(\mathfrak{N})$, also $\mathfrak{M}_{n+1} < \mathfrak{N}$. Daher existiert ein Teilraum $\mathfrak{N}_{n+1} \subset \mathfrak{N}$ mit der Eigenschaft $\mathfrak{M}_{n+1} \sim \mathfrak{N}_{n+1} \subsetneqq \mathfrak{N}$, und die Ungleichung (7) läßt sich in der Form

$$D(\mathfrak{N}_{n+1}) + D(\mathfrak{M}_{n+2}) + D(\mathfrak{M}_{n+3}) + \cdots < D(\mathfrak{N}_{n+1}) + D(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_{n+1})$$

oder

$$D(\mathfrak{M}_{n+2}) + D(\mathfrak{M}_{n+3}) + \cdots < D(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}_{n+1})$$

schreiben. Wiederholen wir dieses Verfahren, so können wir solche Teilräume $\mathfrak{N}_{n+2}, \mathfrak{N}_{n+3}, \ldots$ konstruieren, für die $\mathfrak{N}_k \sim \mathfrak{M}_k$ $(k = n+1, n+2, \ldots)$ und $\sum_{k=n+1}^{\infty} \oplus \mathfrak{N}_k \subset \mathfrak{N}$ gilt. Dann ist aber

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}_k \sim \sum_{k=n+1}^{\infty} \oplus \mathfrak{N}_k \subset \mathfrak{N}$$

und folglich

$$D(\mathfrak{M}_{n+1} \oplus \mathfrak{M}_{n+2} \oplus \cdots) \leqq D(\mathfrak{N}); \tag{8}$$

dies widerspricht jedoch der Ungleichung (6). Somit kann (5) nicht gelten, sondern es muß der Fall (3) eintreten.

Aus diesen Überlegungen ergibt sich, daß die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} D(\mathfrak{M}_k)$ divergiert, wenn der Teilraum $\sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}_k$ unendlich ist. Denn würde diese Reihe konvergieren, so kämen wir wie oben von der Ungleichung (7) auf die Ungleichung (8), woraus wir schließen müßten, daß der Teilraum $\sum_{k=n+1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}_k$ und demzufolge auch der Teilraum $\sum_{k=1}^{\infty} \oplus \mathfrak{M}_k$ endlich ist.

II. *Ist* $\mathfrak{M}_1 \subset \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_3 \subset \ldots$ *und* $\mathfrak{M}_k \eta M$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$, *so gilt*

$$D\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k\right) = \lim_{n\to\infty} D(\mathfrak{M}_n).$$

Beweis. Setzen wir $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{N}_k = \mathfrak{M}_k - \mathfrak{M}_{k-1}$ $(k = 2, 3, \ldots)$, so erhalten wir

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k = \mathfrak{N}_1 \oplus \mathfrak{N}_2 \oplus \cdots, \qquad \mathfrak{M}_k = \mathfrak{N}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_k.$$

Hieraus folgt

$$D\left(\sum_{k=1}^{\infty} \mathfrak{M}_k\right) = D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2) + \cdots = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} D(\mathfrak{N}_k)$$

$$= \lim_{n\to\infty} D(\mathfrak{N}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_n) = \lim_{n\to\infty} D(\mathfrak{M}_n).$$

III. *Ist* $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2 \supset \mathfrak{M}_3 \supset \ldots$, *sind alle* $\mathfrak{M}_n \eta M$ *und ist* $\mathfrak{M}_1$ *endlich, so gilt*

$$D(\mathfrak{M}_1 \cap \mathfrak{M}_2 \cap \mathfrak{M}_3 \cap \ldots) = \lim_{n\to\infty} D(\mathfrak{M}_n).$$

Dieser Satz läßt sich auf den vorhergehenden zurückführen, denn es ist

$$\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2 \subset \mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_3 \subset \cdots.$$

IV. *Sind die Teilräume $\mathfrak{N}_k$ $(k = 1, 2, 3, \ldots)$ endlich und konvergiert die Reihe $D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2) + \cdots$, so ist der Raum $\mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2 \dotplus \mathfrak{N}_3 \dotplus \cdots$ endlich, und es gilt*

$$D(\mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2 \dotplus \mathfrak{N}_3 \dotplus \cdots) \leqq D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2) + D(\mathfrak{N}_3) + \cdots.$$

Beweis. Zunächst ist auf Grund von § 35, Nr. 4, Satz VII,

$$D(\mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2) - D(\mathfrak{N}_2) \leqq D(\mathfrak{N}_1)$$

und folglich

$$D(\mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2) \leqq D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2).$$

Durch Induktion erhalten wir hieraus für jedes natürliche n

$$D(\mathfrak{N}_1 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{N}_n) \leqq D(\mathfrak{N}_1) + \cdots + D(\mathfrak{N}_n).$$

Setzen wir nun $\mathfrak{M}_n = \mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2 \dotplus \cdots \dotplus \mathfrak{N}_n$, so erhalten wir unter Anwendung von Satz II

$$D(\mathfrak{N}_1 \dotplus \mathfrak{N}_2 \dotplus \mathfrak{N}_3 \dotplus \cdots) = \lim_{n\to\infty} D(\mathfrak{M}_n) \leqq \lim_{n\to\infty} [D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2) + \cdots + D(\mathfrak{N}_n)]$$
$$= D(\mathfrak{N}_1) + D(\mathfrak{N}_2) + \cdots.$$

5. Der Wertebereich der relativen Dimension. Klassifikation der Faktoren. Wir bezeichnen mit Δ den Wertebereich der relativen Dimension $D(\mathfrak{M})$ und wollen untersuchen, wie die Menge Δ beschaffen ist. In jedem Fall enthält Δ die Zahl 0 und besteht aus nichtnegativen Zahlen. Gibt es im Raum $\mathfrak{H}$ keine von (0) verschiedenen endlichen Teilräume, so ist $\Delta = \{0, \infty\}$. Sehen wir von diesem trivialen Fall ab, so finden wir, daß Δ noch die folgenden beiden Eigenschaften besitzt:

a) Aus α, $\beta \in \Delta$ und $\alpha > \beta$ folgt $\alpha - \beta \in \Delta$;
b) aus α_k, $\alpha \in \Delta$ und $\sum\limits_k \alpha_k \leqq \alpha$ (die Summe soll endlich oder abzählbar sein) folgt $\sum\limits_k \alpha_k \in \Delta$.

Ist nämlich $D(\mathfrak{N}) = \alpha$, $D(\mathfrak{M}) = \beta$, so folgt aus $D(\mathfrak{N}) > D(\mathfrak{M})$ die Ungleichung $\mathfrak{M} < \mathfrak{N}$, also ist $\mathfrak{M} \sim \mathfrak{N}' \subsetneqq \mathfrak{N}$; dann ist aber

$$\alpha = D(\mathfrak{N}) = D(\mathfrak{N}') + D(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}') = \beta + D(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}'),$$

woraus sich $\alpha - \beta = D(\mathfrak{N} - \mathfrak{N}') \in \Delta$ ergibt.

Gehören ferner α_k und α zu Δ, so wählen wir ein $\mathfrak{M}_1 \eta M$ mit $D(\mathfrak{M}_1) = \alpha_1$ und ein $\mathfrak{M} \eta M$ mit $D(\mathfrak{M}) = \alpha$. Mit Hilfe der Überlegungen aus Nr. 4, Satz I, konstruieren wir dann eine Folge $\mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ derart, daß $\mathfrak{M}_j \perp \mathfrak{M}_k$ für $j \neq k$, $D(\mathfrak{M}_k) = \alpha_k$ und $\sum\limits_k \oplus \mathfrak{M}_k \subset \mathfrak{M}$ ist. Hieraus folgt auf Grund des eben erwähnten Satzes, daß

$$\sum_k \alpha_k = \sum_k D(\mathfrak{M}_k) = D\left(\sum_k \oplus \mathfrak{M}_k\right)$$

zu Δ gehört.

Wir setzen nun voraus, in der Menge $\varDelta$ sei ein kleinstes positives Element ε enthalten. Für ein $\alpha \in \varDelta$ mit $\alpha \neq \infty$ und für ein gewisses n gilt dann

$$n\varepsilon \leqq \alpha < (n+1)\,\varepsilon.$$

Setzen wir $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = \varepsilon$ in der Bedingung b), so gehört $n\varepsilon$ und folglich auf Grund der Bedingung a) auch $\alpha - n\varepsilon$ zu $\varDelta$. Nun ist $\alpha - n\varepsilon < \varepsilon$, so daß, da ε ein kleinstes positives Element von $\varDelta$ ist, $\alpha - n\varepsilon = 0$ bzw. $\alpha = n\varepsilon$ sein muß. Enthält $\varDelta$ das Element $m\varepsilon$, so gehören nach Eigenschaft b) auch alle $k\varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, m-1)$ zu $\varDelta$. Daher besteht $\varDelta$ aus allen Zahlen der Form $k\varepsilon$ $(k = 1, 2, \ldots, m)$, wobei m eine natürliche Zahl oder ∞ ist.

Wir nehmen nun an, die Menge $\varDelta$ enthalte kein kleinstes positives Element, und setzen $\varepsilon = \inf x$, $x \in \varDelta$, $x > 0$. Wir wollen zeigen, daß $\varepsilon = 0$ ist. Wäre ε positiv, so würde in $\varDelta$ ein positives Element α mit $\alpha < 2\varepsilon$ existieren. Dann müßte $\alpha > \varepsilon$ sein, weil sonst die Zahl ε im Fall $\alpha = \varepsilon$ ein kleinstes positives Element von $\varDelta$ wäre. Wegen $\alpha > \varepsilon$ würde es dann in $\varDelta$ ein positives Element $\beta < \alpha$ geben. Also wäre $\varepsilon < \beta < \alpha < 2\varepsilon$, $\alpha - \beta < \varepsilon$, $\alpha - \beta > 0$, $\alpha - \beta \in \varDelta$ [auf Grund der Eigenschaft a)]; dies widerspricht jedoch der Definition von ε.

Es ist also $\varepsilon = 0$. Dann existiert für jedes $\delta > 0$ ein Element $\alpha \in \varDelta$ mit der Eigenschaft $0 < \alpha < \delta$. Ist β ein beliebiges positives Element von $\varDelta$ und gilt $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \beta$, so läßt sich zeigen, daß zwischen γ_1 und γ_2 mindestens ein Element von $\varDelta$ liegt. Dazu setzen wir $\delta = \gamma_2 - \gamma_1$; dann gilt für ein geeignetes $n = 0, 1, 2, \ldots$ die Ungleichung $n\alpha \leqq \gamma_1 < (n+1)\alpha < \gamma_2$. Wie oben folgt hieraus $(n+1)\alpha \in \varDelta$, so daß $(n+1)\alpha$ schon das gesuchte Element ist. Wir zeigen ferner, daß jede Zahl γ zwischen 0 und β zu $\varDelta$ gehört. Wählen wir nämlich eine Folge $\beta_1 > \beta_2 > \beta_3 > \cdots$ mit $\beta_n \to \gamma$, $\beta_n < \beta$ und ferner Zahlen $\gamma_k \in \varDelta$ mit $\beta_{k-1} < \gamma_k < \beta_k$, so gilt $\gamma_k \to \gamma$, also

$$\gamma = \gamma_1 + (\gamma_2 - \gamma_1) + (\gamma_3 - \gamma_2) + \cdots < \beta.$$

Auf Grund von Eigenschaft b) ergibt sich hieraus $\gamma \in \varDelta$.

Möglich sind somit nur die beiden folgenden Fälle.

a) Der Raum $\mathfrak{H}$ ist endlich; dann ist $\bar{\alpha} = D(\mathfrak{H})$ das größte Element von $\varDelta$, und es ist $\varDelta = [0, \bar{\alpha}]$. Normieren wir die Funktion $D(\mathfrak{M})$ so, daß $D(\mathfrak{H}) = 1$ ist, erhalten wir $\varDelta = [0, 1]$.

b) Der Raum $\mathfrak{H}$ ist unendlich; ist $\mathfrak{N}$ ein beliebiger, von (0) verschiedener endlicher abgeschlossener Teilraum, so gilt nach § 35, Nr. 5, Satz IV, die Beziehung $\mathfrak{H} = \sum\limits_{\alpha \in \mathfrak{A}} \oplus \mathfrak{N}_\alpha$, wobei $\mathfrak{N}_\alpha \sim \mathfrak{N}$ und $\mathfrak{A}$ unendlich ist. Hieraus folgt, daß in $\varDelta$ hinreichend große Zahlen $D(\mathfrak{N}_{\alpha_1} \oplus \cdots \oplus \mathfrak{N}_{\alpha_n}) = nD(\mathfrak{N})$ existieren; also ist $\varDelta = [0, \infty]$.

Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Theorem 2. *Der Wertebereich der relativen Dimension ist eine der folgenden Mengen:*

(I_n) *die Gesamtheit aller Zahlen* $k\varepsilon$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, n)$;
(I_∞) *die Gesamtheit aller Zahlen* $k\varepsilon$ $(k = 0, 1, 2, \ldots, \infty)$;
(II_1) *das Intervall* $[0, \bar{\alpha}]$;
(II_∞) *das Intervall* $[0, \infty]$;
(III) *die Zahlen* 0 *und* ∞.

Wir sagen, M sei ein Faktor der Klasse (I_n), (I_∞), (II_1), (II_∞) bzw. (III), wenn Δ die in der entsprechenden Klasse genannte Menge ist. Die Klassen (I_n) und (I_∞) heißen *diskret*, (II_1) und (II_∞) *stetig*, (I_n) und (II_1) *endlich* und (I_∞) und (II_∞) *unendlich*. Die Klasse (III) wollen wir *vollunendlich* nennen. Keine dieser Klassen ist leer, d. h., es existieren in jeder dieser Klassen Faktoren; in § 38 werden einige Beispiele solcher Faktoren angegeben.

In den Fällen (I_n), (I_∞) und (II_1) kann die Funktion $D(\mathfrak{M})$ so normiert werden, daß $\varepsilon = 1$ und $\bar{\alpha} = 1$ ist. Ein solches $D(\mathfrak{M})$ heißt *standardnormiert*.

6. Die Invarianz der Faktorklasse gegenüber einem symmetrischen Isomorphismus.

Theorem 3. *Die Klassen* (I_n), (I_∞), (II_1), (II_∞), (III), *die Funktion* $D(\mathfrak{M})$ *(bis auf einen Faktor), sowie die Äquivalenz, die Endlichkeit, die Unendlichkeit und die Minimaleigenschaft von Projektionsoperatoren sind invariant gegenüber jedem symmetrischen Isomorphismus von Algebren.*

Beweis. Die Beziehung $E \sim F(\ldots M)$ bedeutet, daß ein Operator $U \in M$ existiert, der die Eigenschaften

$$UU^*U = U, \quad U^*U = E, \quad UU^* = F \tag{1}$$

besitzt; ferner besagt die Unendlichkeit des Projektionsoperators E, daß in M ein Operator F existiert, für den

$$F^2 = F^* = F, \quad EF = F, \quad F \neq E, \quad F \sim E \tag{2}$$

gilt, und die Tatsache, daß der Operator E minimal ist, ist gleichbedeutend damit, daß es keinen Operator $F \in M$ gibt, der die Eigenschaft

$$F^2 = F^* = F, \quad EF = F, \quad F \neq 0, \quad F \neq E \tag{3}$$

besitzt.

Da die Beziehungen (1), (2) und (3) invariant gegenüber einem symmetrischen Isomorphismus von Algebren sind, gilt dies auch für die Äquivalenz, Endlichkeit, Unendlichkeit und Minimaleigenschaft. Hieraus ergibt sich die Invarianz der Klassen. Da ferner $D_M(E)$ durch Ausdrücke der Gestalt $E = 0$, $E \sim F$, $G = E + F$, $EF = 0$ charakterisiert wird, ist die Funktion $D_M(E)$ ebenfalls invariant bis auf einen konstanten Faktor. Damit ist der Satz bewiesen.

Es ergibt sich die Frage, ob die aufgezählten Begriffe tatsächlich ein vollständiges Invariantensystem für einen Faktor in bezug auf einen symmetrischen Isomorphismus bilden. Diese Frage können wir für einen Faktor der Klasse (I_n) oder (I_∞) bejahen, müssen sie jedoch für einen Faktor der Klasse (II_1) oder (II_∞) verneinen (vgl. § 38, Nr. 3 und 6). Die Frage nach einem vollständigen Invariantensystem für Faktoren der Klasse (II_1) oder (II_∞) ist bis jetzt noch nicht beantwortet.

§ 37. Relative Spur

1. Definition der Spur. Als *Spur* eines hermiteschen Operators im endlichdimensionalen Raum bezeichnen wir die Summe seiner Eigenwerte, wobei jeder Eigenwert so oft auftritt, wie seine Vielfachheit beträgt.

Die Ergebnisse des vorhergehenden Paragraphen geben uns die Möglichkeit, den Begriff der Spur auf beliebige Faktoren einer endlichen Klasse auszudehnen. Es sei M ein Faktor einer endlichen Klasse, A ein hermitescher Operator aus M und $P(\lambda)$ die Spektralschar von A. Dann gehört $P(\lambda)$ zu M, d. h., $D_M(P(\lambda))$ hat einen Sinn und ist eine nichtfallende Funktion von λ.[1] Ist $|A| = C$, so ist die Funktion $P(\lambda)$ und demzufolge auch die Funktion $D_M(P(\lambda))$ außerhalb des Intervalls $[-C, C]$ konstant. Daher existiert

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \lambda\, d D_M(P(\lambda)) = \int_{-C}^{+C} \lambda\, d D_M(P(\lambda)).$$

Diese Zahl nennen wir die *relative Spur* des Operators A und bezeichnen sie mit $T_M(A)$. Dabei normieren wir die Funktion $D_M(E)$ so, daß $D_M(1) = 1$ ist.

Ist beispielsweise M ein Faktor aus einer diskreten Klasse, so muß die Funktion $P(\lambda)$, die für jeden Wert von λ gleich der Summe der minimalen orthogonalen Projektionsoperatoren ist, Sprünge haben, und die Sprungstellen sind zugleich die Eigenwerte des Operators A. Daher ist $T_M(A) = \sum_n k_n \lambda_n$, wobei k_n der entsprechende Sprung der Funktion $D_M(P(\lambda))$ ist. Ist insbesondere M die Algebra aller Operatoren im endlichdimensionalen (etwa N-dimensionalen) Raum, so ist k_n die mit $\frac{1}{N}$ multiplizierte Vielfachheit des Eigenwertes λ_n, und $T_M(A)$ stimmt mit der mit $\frac{1}{N}$ multiplizierten gewöhnlichen Spur überein.

Für die Herleitung der Haupteigenschaften der Spur beweisen wir zunächst den folgenden Hilfssatz.

Hilfssatz. *Für* $D(\mathfrak{M}) > D(\mathfrak{N})$ *ist* $\mathfrak{M} \cap (\mathfrak{H} - \mathfrak{N}) \neq (0)$.

Beweis. Auf Grund von § 35, Nr. 4, Satz VII, ist

$$D([\mathfrak{N} \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{M})] \cap \mathfrak{M}) = D([\mathfrak{N} \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{M})] - (\mathfrak{H} - \mathfrak{M})) \leqq D(\mathfrak{N}) < D(\mathfrak{M}),$$

so daß der Raum $[\mathfrak{N} \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{M})] \cap \mathfrak{M}$ ein echter Teilraum des Raumes $\mathfrak{M}$ ist. Daraus folgt

$$\begin{aligned}(0) \neq \mathfrak{M} - [\mathfrak{N} \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{M})] \cap \mathfrak{M} &= \mathfrak{M} \cap (\mathfrak{H} - [\mathfrak{N} \dotplus (\mathfrak{H} - \mathfrak{M})]) \\ &= \mathfrak{M} \cap [(\mathfrak{H} - \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{M}] = (\mathfrak{H} - \mathfrak{N}) \cap \mathfrak{M}.\end{aligned}$$

2. Eigenschaften der Spur. In diesem Paragraphen werden wir von jetzt an stets voraussetzen, daß M ein Faktor endlicher Klasse und die Funktion $D(\mathfrak{M})$ so normiert ist, daß $D(\mathfrak{H}) = 1$ gilt. Ist $P(\lambda)$ die Spektralschar eines hermiteschen Operators A aus M, so sei

$$\varepsilon = \varepsilon(\alpha) = \inf \lambda \qquad (0 \leqq \alpha \leqq 1)$$

[1]) In diesem Paragraphen wird die Spektralschar $P(\lambda)$ als von rechts stetig vorausgesetzt. Man erhält eine solche Spektralschar, wenn man im Beweis von § 17, Nr. 4, Satz IV, Δ_λ durch $\{M : H(M) \leqq \lambda\}$ erklärt. An den übrigen Eigenschaften der Spektralschar ändert sich hierdurch nichts. — *Anm. d. Red.*

für $$D_M(P(\lambda)) \geqq \alpha.$$

Die Zahl $\varepsilon(\alpha)$ nennen wir den *Eigenwert von A mit der Nummer α.*

Ist beispielsweise $\mathfrak{H}$ ein n-dimensionaler Raum und M die Gesamtheit der linearen Operatoren aus $\mathfrak{H}$, so besitzt $P(\lambda)$ und infolgedessen auch $\varepsilon(\alpha)$ Sprünge. Die Funktion $D_M(P(\lambda))$ kann dabei nur die Werte $0, \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, 1$ annehmen, und $\varepsilon\left(\frac{k}{n}\right)$ ist der k-te Eigenwert von A (im gewöhnlichen Sinne). Somit stimmt in diesem Fall die Definition des Eigenwerts mit der gewöhnlichen Definition überein, und die Nummer des Eigenwerts ist gleich dem Produkt aus der gewöhnlichen Nummer und $\frac{1}{n}$.

Im stetigen Fall (II_1) kann jedoch die Nummer des Eigenwertes jede Zahl aus dem Intervall $[0, 1]$ sein.

In der Theorie der endlichen hermiteschen Matrizen wird bewiesen, daß die Eigenwerte des Operators A auf bestimmte Weise mit dem Maximum der Form $\langle Af, f\rangle$, $|f| = 1$, zusammenhängen (dies ist das sogenannte Minimum-Maximum-Prinzip; vgl. etwa COURANT-HILBERT, Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Kap. I). Wir wollen zeigen, daß diese Eigenschaft auf alle Faktoren endlicher Klasse verallgemeinert werden kann.

I. *Ist A ein hermitescher Operator aus M, so gilt*

$$\varepsilon(\alpha) = \inf_{D_M(\mathfrak{M}) \geqq \alpha} \left\{ \sup_{|f| = 1, f \in \mathfrak{M}} \langle Af, f\rangle \right\}. \tag{1}$$

Beweis. Wir bezeichnen die rechte Seite der Gleichung (1) mit λ_0. Nach Definition von ε gilt für $\lambda > \varepsilon$ die Ungleichung $D_M(P(\lambda)) \geqq \alpha$. Da die Funktion $P(\lambda)$ von rechts stetig ist, muß nach Nr. 4, Satz III, auch $D_M(P(\varepsilon)) \geqq \alpha$ sein. Setzen wir $P(\varepsilon)\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_0$, so ist für $f \in \mathfrak{M}_0$, $|f| = 1$

$$\langle Af, f\rangle = \int_{-\infty}^{\varepsilon} \lambda\, d\langle P(\lambda) f, f\rangle \leqq \varepsilon |f|^2 = \varepsilon;$$

nach Definition der Zahl λ_0 folgt hieraus $\lambda_0 \leqq \varepsilon$. Wir setzen nun $\lambda_0 < \varepsilon$ voraus. Dann existiert ein Teilraum $\mathfrak{M} \eta M$, für den

$$D_M(\mathfrak{M}) \geqq \alpha \quad \text{und} \quad \sup_{|f| = 1, f \in \mathfrak{M}} \langle Af, f\rangle < \varepsilon$$

ist. Daher wählen wir eine Zahl ε_1 mit der Eigenschaft

$$\sup_{|f| = 1, f \in \mathfrak{M}} \langle Af, f\rangle < \varepsilon_1 < \varepsilon,$$

setzen $\mathfrak{M}_1 = P(\varepsilon_1)\mathfrak{H}$ und erhalten

$$D_M(\mathfrak{M}_1) = D_M(P(\varepsilon_1)) < \alpha \leqq D_M(\mathfrak{M}).$$

Auf Grund des Hilfssatzes aus Nr. 1 existiert in $\mathfrak{M}$ ein Element f_0, dessen Norm gleich Eins und das orthogonal zu $\mathfrak{M}_1$ ist. Für dieses Element gilt

$$\langle Af_0, f_0\rangle = \int_{\varepsilon_1}^{+\infty} \lambda\, d\langle P(\lambda) f_0, f_0\rangle \geqq \varepsilon_1 |f_0|^2 = \varepsilon_1.$$

Dies widerspricht jedoch der Wahl von ε_1. Damit ist Satz I bewiesen.

Die Spur $T_M(A)$ läßt sich mit Hilfe der Funktion $\varepsilon(\alpha)$ durch die Formel

$$T_M(A) = \int_0^1 \varepsilon(\alpha)\, d\alpha \tag{2}$$

ausdrücken.

Beweis. Es sei $[a, b]$ ein das Intervall $[-|A|, |A|]$ enthaltendes Intervall. Wir betrachten dann eine beliebige Zerlegung des Intervalls $(a, b]$ in Teilintervalle $(\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$, wobei $a = \lambda_0 < \lambda_1 < \cdots < \lambda_n = b$ ist, und setzen $\alpha_k = D_M(P(\lambda_k))$. So erhalten wir eine Zerlegung des Intervalls $(0, 1]$ in Intervalle $(\alpha_{k-1}, \alpha_k]$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Ist $P(\lambda)$ auf dem Intervall $(\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ konstant, so ist das entsprechende „Intervall" $(\alpha_{k-1}, \alpha_k]$ die leere Menge.

Es sei nun $(\lambda_{k-1}, \lambda_k]$ ein Intervall, auf welchem $P(\lambda)$ nicht konstant ist. Dann ist $D_M(P(\lambda_k)) \geqq D_M(P(\lambda))$ für $\lambda_{k-1} < \lambda \leqq \lambda_k$, wobei das Gleichheitszeichen nicht für alle diese λ gilt. Hieraus folgt, wenn wir die Definition der Funktion $\varepsilon(\alpha)$ berücksichtigen, $\lambda_{k-1} < \varepsilon(\alpha_k) \leqq \lambda_k$; daher ist die linke Seite der Gleichung

$$\sum_{k=1}^{n} \varepsilon(\alpha_k)\,[D_M(P(\lambda_k)) - D_M(P(\lambda_{k-1}))] = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(\alpha_k)\,(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \tag{3}$$

eine Näherungssumme für $\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d D_M(P(\lambda))$. Sind andererseits alle $\lambda_k - \lambda_{k-1}$ kleiner als ε, so gilt

$$\left| \int_0^1 \varepsilon(\alpha)\, d\alpha - \sum_{k=1}^{n} \varepsilon(\alpha_k)\,(\alpha_k - \alpha_{k-1}) \right| \leqq \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} |\varepsilon(\alpha) - \varepsilon(\alpha_k)|\, d\alpha < \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \int_{\alpha_{k-1}}^{\alpha_k} d\alpha = \varepsilon.$$

Gehen wir also in (3) für $\max_k (\lambda_k - \lambda_{k-1}) \to 0$ zur Grenze über, so erhalten wir die Beziehung (2).

Die Formel (2) ist die Verallgemeinerung der Definition der Spur eines hermiteschen Operators im endlichdimensionalen Raum.

II. *Die Spur $T_M(A)$ ist eine stetige Funktion des Operators A im Sinne der gleichmäßigen Topologie.*[1])

Beweis. Zunächst weisen wir darauf hin, daß $T_M(A_1) \leqq T_M(A_2)$ ist, wenn die Ungleichung $\langle A_1 f, f\rangle \leqq \langle A_2 f, f\rangle$ für alle $f \in \mathfrak{H}$ gilt. Auf Grund der Gleichung (1) ist in diesem Fall nämlich $\varepsilon_1(\alpha) \leqq \varepsilon_2(\alpha)$, wobei $\varepsilon_1(\alpha)$ und $\varepsilon_2(\alpha)$ die Eigenwerte der Operatoren A_1 bzw. A_2 mit der Nummer α sind, so daß unsere Behauptung aus (2) folgt.

Analog läßt sich die Beziehung $T_M(A + \lambda 1) = T_M(A) + \lambda$ nachweisen, wobei λ eine beliebige reelle Zahl ist. Ist nun $|A - B| < \varepsilon$, so gilt

$$\langle A f, f\rangle \leqq \langle (B + \varepsilon 1) f, f\rangle$$

---

[1]) Man kann auch zeigen (vgl. Murray und von Neumann [1], II, Satz IV), daß die Spur $T_M(A)$ eine stetige Funktion des Operators A im Sinne der schwachen Topologie ist.

und somit $T_M(A) \leqq T_M(B + \varepsilon 1) = T_M(B) + \varepsilon$ oder $T_M(A) - T_M(B) < \varepsilon$. Vertauschen wir A und B, so erhalten wir $T_M(B) - T_M(A) < \varepsilon$, also

$$|T_M(A) - T_M(B)| < \varepsilon.$$

Theorem 1. *Ist M ein Faktor endlicher Klasse, so existiert genau eine Funktion $T(A)$, die für alle hermiteschen Operatoren A aus M definiert ist und den folgenden Bedingungen genügt:*

a) $T(1) = 1$;
b) $T(\alpha A) = \alpha T(A)$ *für alle reellen* α;
c) $T(A + B) = T(A) + T(B)$, *wenn A und B vertauschbar sind*;
d) $T(A) \geqq 0$, *wenn A positiv definit ist*;
e) $T(U^{-1}AU) = T(A)$, *wenn U ein unitärer Operator aus M ist.*

Diese Funktion ist die relative Spur $T_M(A)$.

Beweis. Die Spur $T_M(A)$ genügt den Bedingungen a) bis e). Die Bedingungen a) und d) folgen aus der Definition von $T_M(A)$, die Bedingung b) ergibt sich für $\alpha \geqq 0$ aus den Gleichungen (1) und (2) und für $\alpha < 0$ aus

$$T_M(-A) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d D_M(1 - P(-\lambda - 0)) = -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d D_M(P(-\lambda - 0))$$
$$= -\int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d D_M(P(\lambda)) = -T_M(A),$$

wobei $P(\lambda)$ die Spektralschar von A und infolgedessen $1 - P(-\lambda - 0)$ die von $-A$ ist; schließlich erhalten wir die Bedingung e) aus den Beziehungen

$$T_M(U^{-1}AU) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d D_M(U^{-1}P(\lambda)U) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d D_M(P(\lambda)) = T_M(A).$$

Es bleibt noch zu zeigen, daß $T_M(A)$ auch die Bedingung c) erfüllt. Sind zwei Operatoren A und B vertauschbar und sind $E(\lambda)$ bzw. $F(\lambda)$ ihre Spektralscharen, so sind auch $E(\lambda)$ und $F(\lambda)$ vertauschbar. Außerdem folgt aus den Beziehungen

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d E(\lambda), \quad B = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d F(\lambda),$$

daß die Operatoren A und B in der gleichmäßigen Topologie Grenzwerte von Summen der Form

$$A_1 = \sum_k a_k E(\lambda_k), \quad B_1 = \sum_k b_k F(\lambda_k)$$

sind (a_k, b_k reell). Auf Grund von Satz II genügt es daher zu beweisen, daß die Bedingung c) für die Operatoren A_1 und B_1 gilt, d. h., wir brauchen nur zu zeigen, daß

$$T_M\left(\sum_{k=1}^{p} c_k E_k\right) = \sum_{k=1}^{p} c_k T_M(E_k) \tag{4}$$

ist, wenn alle Projektionsoperatoren E_k paarweise vertauschbar und die c_k reelle Zahlen sind.

Wir betrachten alle Summanden F_j des ausmultiplizierten Produkts

$$[E_1 + (1 - E_1)]\,[E_2 + (1 - E_2)] \cdots [E_p + (1 - E_p)];$$

sie sind paarweise orthogonal, ihre Summe ist gleich 1, und jeder Operator E_k ist die Summe solcher Operatoren F_j. Daher brauchen wir die Gleichung (4) nur für die Operatoren F_j als erfüllt nachzuweisen, oder, was dasselbe ist, wir setzen voraus, daß die Operatoren E_k paarweise orthogonal sind und ihre Summe gleich 1 ist. Dann folgt aber die Gleichung (4) unmittelbar aus der Definition der Spur, denn die Spektralschar $G(\lambda)$ des Operators $\sum_{k=1}^{p} c_k E_k$ wird durch die Beziehung

$$G(\lambda) = \sum_{c_k \leqq \lambda} E_k$$

definiert. Wir haben also bewiesen, daß die Spur $T_M(A)$ den fünf Bedingungen genügt.

Es genüge nun eine beliebige Funktion $T(A)$, die auf allen hermiteschen Operatoren $A \in M$ definiert sei, den fünf Bedingungen. Für einen Projektionsoperator $P \in M$ setzen wir $D(P) = T(P)$. Aus der Bedingung c) folgt dann, daß $D(P)$ der Bedingung d′) aus § 36, Nr. 4, Theorem 1, genügt. Außerdem ist $D(P) \geqq 0$, und auf Grund der Bedingung b) ergibt sich $D(P) = 0$ für $P = 0$. Ist ferner $E \sim F(\ldots M)$, so existiert in M ein unitärer[1]) Operator U, für den $F = U^{-1} E U$ gilt. Dann ist aber $D(F) = D(E)$ auf Grund von e), so daß auch die Bedingung c′) aus § 36, Nr. 4, Theorem 1, erfüllt ist. Es bleibt noch nachzuprüfen, daß aus $D(P) = 0$ die Beziehung $P = 0$ folgt. Wäre $P \neq 0$, so würden wir, wenn wir die Zerlegung $1 = P_1 + P_2 + \cdots + P_k + P_0$ mit $P_k \sim P$, $P_0 \precsim P$ und $P_i P_k = 0$ für $i \neq k$ bilden, $T(1) = D(1) = 0$ erhalten; dies widerspricht jedoch der Bedingung a). Nach § 36, Nr. 4, Theorem 1, ist $D(P) = a D_M(P)$; für $P = 1$ folgt $a = 1$, also ist $D(P) = D_M(P)$. Sind ferner A und B zwei vertauschbare hermitesche Operatoren aus M mit $|A - B| < \varepsilon$, so ist der Operator $\varepsilon 1 - (A - B)$ nichtnegativ und somit

$$T(\varepsilon 1 - (A - B)) \geqq 0.$$

Hieraus folgt

$$\varepsilon - [T(A) - T(B)] \geqq 0.$$

Da wir nach Vertauschen von A und B die Ungleichung $\varepsilon - [T(B) - T(A)] \geqq 0$ erhalten, ergibt sich schließlich $|T(A) - T(B)| < \varepsilon$. Somit ist die Funktion $T(A)$ in der gleichmäßigen Topologie stetig auf jeder Menge von vertauschbaren hermiteschen Operatoren. Ist A ein beliebiger hermitescher Operator aus M und $P(\lambda)$ seine Spektralschar, so gilt

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, dP(\lambda) = \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0} \sum_k \lambda_k [P(\lambda_k) - P(\lambda_{k-1})]$$

---

[1]) Es ist nämlich $D_M(1 - E) = 1 - D_M(E) = D_M(1 - F)$.

und infolgedessen

$$T(A) = \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0} \sum \lambda_k [T(P(\lambda_k)) - T(P(\lambda_{k-1}))]$$
$$= \lim_{\lambda_k - \lambda_{k-1} \to 0} \sum \lambda_k [D_M(P(\lambda_k)) - D_M(P(\lambda_{k-1}))]$$
$$= \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, d\, D_M(P(\lambda)) = T_M(A).$$

Theorem 2. *Existiert eine Funktion $T(A)$, die auf allen hermiteschen Operatoren eines Faktors M definiert ist, den Bedingungen* a) *bis* d) *aus Theorem* 1 *genügt und die Zusatzbedingungen*

e′) $T(AB) = T(BA)$, *wenn A, $B \in M$ und AB, BA hermitesche Operatoren sind;*

f′) $P = 0$, *wenn $T(P) = 0$ und P ein Projektionsoperator ist;*

erfüllt, so ist M ein Faktor endlicher Klasse und $T(A)$ die relative Spur in M.

Beweis. Wir setzen $D(P) = T(P)$ für einen Projektionsoperator $P \in M$. Aus e′) erhalten wir

$$T(U^{-1}HU) = T(H), \tag{5}$$

wenn $A = U^{-1}H$, $B = U$, U ein unitärer und H ein hermitescher Operator aus M ist. Die Funktion $T(A)$ genügt also der Bedingung e) aus Theorem 1. Dann genügt $D(P)$ den Bedingungen a′), c′) und d′) aus § 36, Nr. 4, Theorem 1, so daß auf Grund dieses Satzes $D(P)$ eine relative Dimension ist. Da nach Voraussetzung $D(1) = T(1) = 1$ gilt, ist M ein Faktor endlicher Klasse. Hieraus und aus (5) ergibt sich mit Hilfe von Theorem 1, daß $T(A)$ die relative Spur in M ist.

Es läßt sich zeigen (vgl. Murray und von Neumann [1], II, Satz III), daß die Spur $T(A)$ in der Algebra M durch die Formel

$$T(A) = \sum_{k=1}^{m} \langle A g_k, g_k \rangle$$

gegeben ist, wobei die g_k feste Elemente[1]) aus $\mathfrak{H}$ sind. Hieraus folgt insbesondere, daß $T(A + B) = T(A) + T(B)$ auch dann gilt, wenn A und B nicht vertauschbar sind.

Ist nun A ein beliebiger Operator aus M, so können wir $A = H_1 + iH_2$, $T(A) = T(H_1) + iT(H_2)$ setzen, wobei H_1 und H_2 hermitesche Operatoren aus M sind. Die so erhaltene Funktion $T(A)$ ist für alle Operatoren $A \in \mathfrak{M}$ definiert und genügt den folgenden Bedingungen:

a) $T(\lambda A + \mu B) = \lambda T(A) + \mu T(B)$ für alle komplexen Zahlen λ und μ;

b) $T(A^*A) \geqq 0$;

c) $T(AB) = T(BA)$.

---

[1]) Die Anzahl m der Elemente g_k wird durch die Bedingung $\frac{1}{m} C \leqq 1$ bestimmt, wobei C die in § 38, Nr. 7, Theorem 4, erklärte Konstante ist. Für $C \leqq 1$ existiert insbesondere ein Element $g \in \mathfrak{H}$ mit der Eigenschaft $T(A) = \langle Ag, g \rangle$.

3. Die Spur in den Faktoren der Klassen (I_∞) und (II_∞). Die Spur $T(A)$ läßt sich auch in den Faktoren der Klassen (I_∞) und (II_∞) definieren, jedoch ist die Funktion $T(A)$ nicht für alle $A \in M$ definiert (vgl. MURRAY und VON NEUMANN [1]). Um dies zu beweisen, führen wir den Begriff des Ranges eines Operators ein.

Wir nennen die Zahl $r(A) = D_M(\overline{\mathfrak{R}(A)})$ den *Rang* des Operators $A \in M$. Wegen $\overline{\mathfrak{R}(A)} \sim \overline{\mathfrak{R}(A^*)}$ (vgl. § 35, Nr. 3) ist $r(A) = r(A^*)$.

Es sei A ein Operator endlichen Ranges; dann existiert ein endlicher Teilraum $\mathfrak{M}$, etwa $\overline{\mathfrak{R}(A)} \dotplus \overline{\mathfrak{R}(A^*)}$, so daß $\mathfrak{R}(A)$ und $\mathfrak{R}(A^*)$ in $\mathfrak{M}$ enthalten sind. Wir setzen ferner

$$T_M(A) = D(\mathfrak{M})\, T_{M_{(\mathfrak{M})}}(A_{(\mathfrak{M})})\,; \tag{1}$$

dabei ist $A_{(\mathfrak{M})}$ die Einschränkung des Operators A auf $\mathfrak{M}$ und $M_{(\mathfrak{M})}$ die Gesamtheit der Einschränkungen auf $\mathfrak{M}$ aller Operatoren aus M, die durch den Raum $\mathfrak{M}$ reduziert werden (näheres darüber ist in § 38, Nr. 1, enthalten). Es läßt sich zeigen, daß die rechte Seite von (1) nicht von der Wahl des Raumes $\mathfrak{M}$ abhängt.

Damit ist die Spur $T_M(A)$ für alle Operatoren A endlichen Ranges bestimmt. Wir definieren für diese Operatoren eine neue Norm $\|A\|$, indem wir

$$\|A\| = \sqrt{T_M(A^*A)}$$

setzen (mit A ist auch A^*A von endlichem Rang). Durch Grenzübergang nach dieser Norm läßt sich die Funktion $T_M(A)$ auf umfangreichere Klassen von Operatoren A aus M ausdehnen. Diese Operatoren heißen *normierbar*. Dabei ist ein Projektionsoperator genau dann normierbar, wenn er endlich ist.

§ 38. Struktur und Beispiele von Faktorklassen

1. Die Abbildung $M \to M_{(\mathfrak{M})}$. Es sei $\mathfrak{M}$ ein von (0) verschiedener Teilraum. Wir betrachten diejenigen Operatoren A aus M, die durch M reduziert werden; ihre Einschränkung auf $\mathfrak{M}$ sei $A_{(\mathfrak{M})}$, und die Gesamtheit aller Operatoren $A_{(\mathfrak{M})}$ sei $M_{(\mathfrak{M})}$. Wir beweisen folgende Eigenschaften des Übergangs von M nach $M_{(\mathfrak{M})}$.

I. *Ist $\mathfrak{M}\eta M$ und $E = P_{\mathfrak{M}}$, so ist $(M')_{(\mathfrak{M})}$ die Gesamtheit aller (beschränkten) linearen Operatoren in $\mathfrak{M}$, die mit allen Operatoren*

$$C = EBE \quad \text{in} \quad \mathfrak{M},\ B \in M, \tag{1}$$

vertauschbar sind.

B e w e i s. Offenbar ist jeder Operator aus $(M')_{(\mathfrak{M})}$ mit jedem Operator der Gestalt (1) vertauschbar; daher können wir annehmen, daß sich der Operator A in $\mathfrak{M}$ mit jedem Operator C der Form (1) vertauschen läßt. Wir haben zu zeigen, daß dann A zu $(M')_{(\mathfrak{M})}$ gehört. Setzen wir $\alpha = |A|$ und $H = \sqrt{\alpha^2 1 - A^*A}$, so ist der Operator H ebenfalls mit allen $C = EBE$ vertauschbar. Sind

also $B_1, \ldots, B_n$ beliebige Operatoren aus M und $f_1, \ldots, f_n$ beliebige Elemente aus $\mathfrak{M}$, so gilt[1])

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{j=1}^{n} B_j H f_j\right|^2 + \left|\sum_{j=1}^{n} B_j A f_j\right|^2 \\
&= \langle \sum_{j=1}^{n} B_j H f_j, \sum_{k=1}^{n} B_k H f_k\rangle + \langle \sum_{j=1}^{n} B_j A f_j, \sum_{k=1}^{n} B_k A f_k\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \langle (H E B_k^* B_j E H + A^* E B_k^* B_j E A) f_j, f_k\rangle \\
&= \sum_{j,k=1}^{n} \langle E B_k^* B_j (H^2 + A^* A) f_j, f_k\rangle \\
&= \alpha^2 \sum_{j,k=1}^{n} \langle B_k^* B_j f_j, f_k\rangle = \alpha^2 \left|\sum_{j=1}^{n} B_j f_j\right|^2.
\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\left|\sum_{j=1}^{n} B_j A f_j\right| \leqq \alpha \left|\sum_{j=1}^{n} B_j f_j\right|. \tag{2}$$

Wir setzen

$$A_0 \sum_{j=1}^{n} B_j f_j = \sum_{j=1}^{n} B_j A f_j. \tag{3}$$

Ist $\sum_{j=1}^{n} B_j f_j = 0$, so ist wegen (2) ebenfalls $\sum_{j=1}^{n} B_j A f_j = 0$. Daher ist der Operator A_0 durch die Gleichung (3) auf der Gesamtheit $\mathfrak{S}$ aller Elemente der Form $\sum_{j=1}^{n} B_j f_j$ eindeutig bestimmt. Infolge der Ungleichung (2) ist er beschränkt, also kann er stetig auf die abgeschlossene Hülle $\mathfrak{M}_0$ von $\mathfrak{S}$ fortgesetzt werden. Ferner ist $A_0 \eta M'$. Für $B \in M$ gilt nämlich

$$A_0 B \sum_{j=1}^{n} B_j f_j = A_0 \sum_{j=1}^{n} B B_j f_j = \sum_{j=1}^{n} B B_j A f_j = B \sum_{j=1}^{n} B_j A f_j = B A_0 \sum_{j=1}^{n} B_j f_j;$$

wegen der Stetigkeit gilt die analoge Gleichung für den ganzen Raum $\mathfrak{M}_0$. Also ist insbesondere $\mathfrak{M}_0 \eta M'$, so daß $A_1 = A_0 P_{\mathfrak{M}_0}$ zu M' gehört. Andererseits ist $\mathfrak{M}_0 \supset \mathfrak{M}$. Somit folgt $A_{1(\mathfrak{M})} = A$, $A \in (M')_{(\mathfrak{M})}$.

Offenbar stimmt die Gesamtheit aller Operatoren C der Form (1) mit $M_{(\mathfrak{M})}$ überein; also ist die Gesamtheit aller beschränkten linearen Operatoren aus $\mathfrak{M}$, die mit den Operatoren C vertauschbar sind, gleich $(M_{(\mathfrak{M})})'$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

II. *Für* $\mathfrak{M} \eta M$ *ist* $(M_{(\mathfrak{M})})' = (M')_{(\mathfrak{M})}$.

Hieraus folgt insbesondere, daß $M_{(\mathfrak{M})}$ und $(M')_{(\mathfrak{M})}$ schwach abgeschlossene Algebren sind. Ferner ist

$$M_{(\mathfrak{M})} \cap (M_{(\mathfrak{M})})' = M_{(\mathfrak{M})} \cap (M')_{(\mathfrak{M})} = (M \cap M')_{(\mathfrak{M})} = (\alpha\, 1)_{(\mathfrak{M})} = (\alpha\, 1_{(\mathfrak{M})}),$$

wobei $1_{(\mathfrak{M})}$ der Einsoperator des Raumes $\mathfrak{M}$ ist.

---

[1]) Es gilt nämlich $E H f_k = H f_k$ für $H f_k \in \mathfrak{M}$.

Somit sind mit M auch die Algebren $M_{(\mathfrak{M})}$ und $(M_{(\mathfrak{M})})'$ Faktoren.

III. *Ist $\mathfrak{M}\eta M$ und $E = P_{\mathfrak{M}}$, so ist die Zuordnung $A \to A_{(\mathfrak{M})}$ ein symmetrischer Isomorphismus zwischen*

a) *der Algebra aller Operatoren A aus M mit der Eigenschaft $EA = AE = A$ und der Algebra $M_{(\mathfrak{M})}$;*

b) *den Algebren M' und $(M')_{(\mathfrak{M})}$.*

Beweis. Für $A \in M$ und $AE = EA = A$ ist $A = 0$ auf $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$; die Operatoren A und $A_{(\mathfrak{M})}$ sind also durch die Beziehung $A = A_{(\mathfrak{M})}E$ eineindeutig miteinander verknüpft. Daraus folgt a).

Sind ferner A und B Operatoren aus M', so bedeutet die Gleichung $A_{(\mathfrak{M})} = B_{(\mathfrak{M})}$, daß $(A - B)E = 0$ gilt. Dann ist aber $A - B = 0$ bzw. $A = B$ nach dem Hilfssatz aus § 35, Nr. 2, d. h., die Zuordnung zwischen den Algebren M' und $(M')_{(\mathfrak{M})}$ ist eineindeutig. Daraus ergibt sich b).

IV. *Ist $\mathfrak{M}\eta M$ und $E = P_{\mathfrak{M}}$ und durchläuft F alle Projektionsoperatoren aus M, die die Eigenschaft $EF = FE = F$ haben, und F' alle Projektionsoperatoren aus M', so durchläuft*

a) *$F_{(\mathfrak{M})}$ alle Projektionsoperatoren aus $M_{(\mathfrak{M})}$, wobei die Beziehung*

$$F_{(\mathfrak{M})} \sim G_{(\mathfrak{M})} \; (\ldots M_{(\mathfrak{M})})$$

der Beziehung $F \sim G \; (\ldots M)$ äquivalent ist;

b) *$F'_{(\mathfrak{M})}$ alle Projektionsoperatoren aus $(M_{(\mathfrak{M})})'$, wobei die Beziehung*

$$F'_{(\mathfrak{M})} \sim G'_{(\mathfrak{M})} (\ldots (M_{(\mathfrak{M})})')$$

der Beziehung $F' \sim G' \; (\ldots M')$ äquivalent ist.

Beweis. Die Behauptung b) folgt unmittelbar daraus, daß die Algebren M' und $(M')_{(\mathfrak{M})}$ symmetrisch isomorph sind. Ferner ergibt sich der erste Teil von a) sofort aus Satz III a). Zum Beweis des zweiten Teils weisen wir darauf hin, daß auf Grund der Beziehungen

$$F \sim G (\ldots M) \tag{4}$$

und

$$F_{(\mathfrak{M})} \sim G_{(\mathfrak{M})} \; (\ldots M_{(\mathfrak{M})}) \tag{5}$$

partiell isometrische Operatoren $V \in M$ bzw. $U_{(\mathfrak{M})} \in M_{(\mathfrak{M})}$ existieren, die die Eigenschaften

$$F = V^*V, \quad G = VV^*, \quad F_{(\mathfrak{M})} = U^*_{(\mathfrak{M})} U_{(\mathfrak{M})}, \quad G_{(\mathfrak{M})} = U_{(\mathfrak{M})} U^*_{(\mathfrak{M})} \tag{6}$$

besitzen; dabei wird der Operator U eindeutig durch den Operator $U_{(\mathfrak{M})}$ bestimmt, wenn $UE = EU = U$ ist, und dann ist auf Grund von Satz III a) auch $F = U^*U$, $G = UU^*$. Somit folgt (4) aus (5). Um zu zeigen, daß auch die Umkehrung gilt, genügt es zu beweisen, daß der in (6) auftretende Operator V die Bedingung $VE = EV = V$ erfüllt. Dies ergibt sich aber aus $F\mathfrak{H} \subset \mathfrak{M}$, $G\mathfrak{H} \subset \mathfrak{M}$. Damit ist der Satz bewiesen.

Aus Satz IV folgt, daß die Funktionen

$$D_M^{(\mathfrak{M})}(F_{(\mathfrak{M})}) = D_M(F) \quad \text{für} \quad FE = F$$

und

$$D_{M'}^{(\mathfrak{M})}(F'_{(\mathfrak{M})}) = D_{M'}(F')$$

relative Dimensionen in $M_{(\mathfrak{M})}$ bzw. $M'_{(\mathfrak{M})}$ sind. Wir erhalten somit:

V. *Für endliches $\mathfrak{M}$ ist $M_{(\mathfrak{M})}$ ein Faktor endlicher Klasse.*

2. Die Beschreibung der Faktoren der Klassen (I) und (II) durch Matrizen. Zwei Algebren M_1 und M_2 auf den Räumen $\mathfrak{H}_1$ bzw. $\mathfrak{H}_2$ heißen *raumisomorph*, wenn eine isometrische Abbildung von $\mathfrak{H}_1$ auf $\mathfrak{H}_2$ existiert, bei der M_1 in M_2 übergeht. Offenbar ist jeder Raumisomorphismus auch ein voller Isomorphismus. Die Umkehrung gilt jedoch im allgemeinen nicht, wie wir in Nr. 3 sehen werden. Wir werden zeigen, daß sich gewisse Faktorklassen bis auf einen Raumisomorphismus genau beschreiben lassen.

Es sei M ein Faktor der Klasse (I) oder (II) und $\mathfrak{M}\eta M$ ein endlicher Teilraum. Ferner setzen wir $n = \frac{D_M(\mathfrak{H})}{D_M(\mathfrak{M})}$. Ist M ein Faktor unendlicher Klasse, so ist $n = \infty$. Gehört jedoch der Faktor M zu einer endlichen Klasse, so sei der Raum $\mathfrak{M}$ so gewählt, daß n eine ganze Zahl ist. Dann läßt sich der Raum $\mathfrak{H}$ in der Form

$$\mathfrak{H} = \sum_\alpha \oplus \mathfrak{M}_\alpha, \quad \alpha \in \mathfrak{A}, \tag{1}$$

darstellen, wobei die $\mathfrak{M}_\alpha$ zueinander orthogonale und dem Teilraum $\mathfrak{M}$ äquivalente Teilräume sind, deren Anzahl gleich n ist; im Fall $n = \infty$ gibt es also unendlich viele solche Teilräume.[1]

Auf Grund der Definition der Äquivalenz existieren partiell isometrische Operatoren $U \in M_\alpha$ mit dem Anfangsbereich $\mathfrak{M}_\alpha$ und dem Endbereich $\mathfrak{M}$.

Es sei

$$H = \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M} \oplus \mathfrak{M} \oplus \cdots$$

die direkte Summe von $|\mathfrak{A}|$ Räumen, die mit $\mathfrak{M}$ zusammenfallen. Der durch die Beziehungen

$$U\mathfrak{M}_\alpha = U_\alpha \mathfrak{M}_\alpha$$

definierte Operator U bildet $\mathfrak{H}$ isometrisch auf H ab. Wir wollen nun die Algebren M und M' im Raum H beschreiben.

Wir betrachten zunächst die Algebra M'. Nach Nr. 1, Satz III, ist die Zuordnung $A \to A_{(\mathfrak{M}_\alpha)}$ ein symmetrischer Isomorphismus zwischen den Algebren M' und $(M')_{(\mathfrak{M}_\alpha)}$. Wegen $\mathfrak{M}_\alpha \eta M$ werden die Operatoren $A \in M'$ durch alle diese Teilräume reduziert. Daher können wir jeden Operator $A \in M'$ in Übereinstimmung mit (1) in Form einer Diagonalmatrix

$$A \sim \| \delta_{\alpha\beta} A_\alpha \|, \quad \delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad \alpha \neq \beta, \\ 1 & \text{für} \quad \alpha = \beta, \end{cases}$$

schreiben, wobei A_α die Einschränkung von A auf $\mathfrak{M}_\alpha$ ist.

---

[1]) Ist $\mathfrak{H}$ separabel, so ist die Anzahl der Teilräume $\mathfrak{M}_\alpha$ höchstens abzählbar; im allgemeinen kann sie auch nicht abzählbar sein.

Es sei nun A_0 die Einschränkung des Operators $A \in M'$ auf den Raum $\mathfrak{M}$. Bei der Abbildung U geht jeder der Operatoren A_α in ein und denselben Operator A_0 aus $\mathfrak{M}$ über. Ist nämlich $f \in \mathfrak{M}_\alpha$, so folgt $A_\alpha f = A f$; bei der Abbildung U geht das Element f in $U_\alpha f \in \mathfrak{M}$ und der Operator A_α in den Operator $U_\alpha A_\alpha U_\alpha^*$ über; dabei ist

$$U_\alpha^* U_\alpha f = P_{\mathfrak{M}_\alpha} f = f, \quad A_\alpha f = A f,$$

also

$$U_\alpha A_\alpha U_\alpha^* U_\alpha f = U_\alpha A_\alpha f = U_\alpha A f = A U_\alpha f = A_0 U_\alpha f,$$

denn wegen $U_\alpha \in M$, $A \in M'$ sind die Operatoren U_α und A vertauschbar.

Somit wird bei der Abbildung U jeder der Operatoren $A \in M'$ auf eine Diagonalmatrix

$$A \sim \| \delta_{\alpha\beta} A_0 \| \tag{2}$$

mit den gleichen Diagonalelementen A_0 abgebildet, wobei A_0 die Einschränkung des Operators A auf $\mathfrak{M}$ ist.

Auf Grund der Beziehung $M = M''$ muß die Algebra M im Raum H aus allen mit allen Matrizen der Form (2) vertauschbaren Matrizen $B \sim \|B_{\alpha\beta}\|$ bestehen (die beschränkt sein müssen, falls sie unendlich sind), wobei die $B_{\alpha\beta}$ Operatoren aus $\mathfrak{M}$ sind. Die Forderung der Vertauschbarkeit dieser Matrizen führt auf die Gleichungen

$$A_0 B_{\alpha\beta} = B_{\alpha\beta} A_0,$$

und somit gehört $B_{\alpha\beta}$ zu $((M')_{(\mathfrak{M})})'$. Diese Algebra stimmt aber nach Nr. 1, Satz II, mit $(M_{(\mathfrak{M})})'' = M_{(\mathfrak{M})}$ überein.

Damit haben wir den folgenden Satz hergeleitet:

Theorem 1. *Ist M ein Faktor der Klasse* (I) *oder* (II) *und $\mathfrak{M}\,\eta\,M$ ein endlicher Teilraum, für den*

$$n = \frac{D_M(\mathfrak{H})}{D_M(\mathfrak{M})}$$

eine ganze Zahl ist, wenn M ein Faktor endlicher Klasse ist[1]*), dann ist die Algebra M symmetrisch isomorph der Algebra aller Matrizen $A \sim \|A_{\alpha\beta}\|$ der Ordnung n (die für $n = \infty$ beschränkt sind); dabei ist $A_{\alpha\beta} \in M_{(\mathfrak{M})}$. Ferner besteht die Algebra M' aus allen Diagonalmatrizen $A \sim \|\delta_{\alpha\beta} A_0\|$, $A_0 \in M'_{(\mathfrak{M})}$.*

3. Beschreibung der Faktoren der Klasse (I). Es sei $\mathfrak{H}_0$ ein beliebiger endlichdimensionaler oder unendlichdimensionaler Hilbertscher Raum. Die Algebra aller beschränkten Operatoren aus $\mathfrak{H}_0$ bezeichnen wir mit $\mathfrak{B}_0$. Wir bilden die direkte Summe

$$\mathfrak{H} = \sum \oplus \mathfrak{H}_0.$$

Jedem in $\mathfrak{H}_0$ beschränkten Operator $A \in \mathfrak{B}_0$ ordnen wir den Diagonaloperator $A^{(1)}$ aus $\mathfrak{H}$ zu, der durch die Matrix $\|\delta_{pq} A\|$ definiert ist, d. h., der Operator $A^{(1)}$ ist in $\mathfrak{H}$ durch die Beziehung

$$A^{(1)}\{f_p\} = \{A f_p\}$$

[1]) $\mathfrak{M}$ ist ein beliebiger endlicher Teilraum, falls $\mathfrak{M}$ ein Faktor unendlicher Klasse ist.

definiert. Offenbar ist $A^{(1)}$ ein beschränkter Operator in $\mathfrak{H}$, der dieselbe Norm wie A hat. Die Gesamtheit der Operatoren $A^{(1)}$, $A \in B_0$, sei $\mathfrak{B}_0^{(1)}$. Da die Zuordnung $A \sim A^{(1)}$ ein voller Isomorphismus[1]) der Algebren $\mathfrak{B}_0$ und $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ ist, ist $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ ein Faktor. Jeder Faktor, der einer Algebra $\mathfrak{B}_0^{(1)}$ raumisomorph ist, heißt *direkter Faktor.*[2])

Aus dieser Definition ergibt sich unmittelbar der Satz:

I. *Jeder direkte Faktor ist der Algebra* $\mathfrak{B}_0$ *vollisomorph.*

Alle Teilräume des Raumes $\mathfrak{H}_0$ gehören zu $\mathfrak{B}_0$; sie sind genau dann bezüglich $\mathfrak{B}_0$ äquivalent, wenn sie die gleiche Dimension haben, und die relative Dimension stimmt mit der gewöhnlichen überein. Insbesondere ist ein Teilraum genau dann bezüglich $\mathfrak{B}_0$ endlich, wenn er im gewöhnlichen Sinne endlichdimensional ist. Daher nimmt $D_{\mathfrak{B}_0}(\mathfrak{M})$ in Standardnormierung die Werte $1, 2, 3, \ldots, n$ an, wenn $\mathfrak{H}_0$ endlichdimensional ist, und die Werte $1, 2, 3, \ldots, \infty$, wenn $\mathfrak{H}_0$ unendliche Dimension hat. (Minimal ist hier offenbar jeder eindimensionale Teilraum.) Da die Funktion $D(\mathfrak{M})$ invariant ist gegenüber einem vollen Isomorphismus von Algebren, gilt auf Grund von Satz I:

II. *Jeder direkte Faktor gehört einer diskreten Klasse an.*

Wir wollen nun zeigen, daß auch die Umkehrung gilt, d. h., daß jeder Faktor einer diskreten Klasse ein direkter Faktor ist. Dazu beweisen wir zunächst den folgenden Satz:

III. *Der Raum* $\mathfrak{M}_f^M$ $(f \neq 0)$ *ist genau dann minimal, wenn* $\mathfrak{M}_f^M \cap \mathfrak{M}_f^{M'} = \{\alpha f\}$ *ist, so daß die Räume* M_f^M *und* $\mathfrak{M}_f^{M'}$ *gleichzeitig minimal sind.*

Beweis. Es sei $\mathfrak{M}_f^{M'}$ minimal; setzen wir $E = E_f^{M'}$ und $E' = E_f^M$, so erhalten wir $E \in M$ und $E' \in M'$. Die Operatoren E und E' sind also miteinander vertauschbar. Außerdem ist $Ef = f$. Daraus folgt

$$\mathfrak{M}_f^{M'} \cap \mathfrak{M}_f^M = E\,\mathfrak{M}_f^M = \overline{\{EAf : A \in M\}} = \overline{\{EAEf : A \in M\}}.$$

Ist $\tilde{M}$ die Gesamtheit derjenigen Operatoren B aus M, die der Bedingung $EB = BE = B$ genügen, so ist $\tilde{M}$ eine Algebra, die aus den Operatoren EAE, $A \in M$, besteht. Also ist $\mathfrak{M}_f^{M'} \cap \mathfrak{M}_f^M = \overline{\{Bf : B \in \tilde{M}\}}$. Ist P ein Projektionsoperator aus $\tilde{M}$, so gilt $PE = EP = P$ und somit $P \leq E$. Da E minimal ist, muß entweder $P = 0$ oder $P = E$ sein. Daraus folgt (vgl. § 34, Nr. 2, Folgerung 6) $\tilde{M}^P = \{0, E\}$, $\tilde{M} = R(\tilde{M}^P) = R(0, E) = (\alpha E)$ und

$$\mathfrak{M}_f^{M'} \cap \mathfrak{M}_f^M = \{\alpha E f\} = \{\alpha f\}. \tag{1}$$

---

[1]) Der Isomorphismus $A \sim A^{(1)}$ ist kein Raumisomorphismus; denn ein Raumisomorphismus müßte auch $\mathfrak{B}_0'$ auf $\mathfrak{B}_0^{(1)\prime}$ isomorph abbilden. Das ist aber wegen $\mathfrak{B}_0' = (\alpha 1)$ und $\mathfrak{B}_0^{(1)\prime} \neq (\alpha 1)$ nicht möglich.

[2]) Murray und von Neumann geben eine andere gleichwertige Definition des direkten Faktors an, die sich auf die von ihnen entwickelte Theorie des direkten Produkts von Räumen stützt. Da wir aus Platzmangel nicht die Möglichkeit haben, diese Theorie zu skizzieren, verweisen wir auf die Arbeiten Murray und von Neumann [1] I, von Neumann [6].

Wir nehmen nun an, daß die Beziehung (1) gilt und der Raum $\mathfrak{M}_f^M$ nicht minimal ist; dann existiert ein von (0) verschiedener und zur Algebra M' gehöriger Teilraum $\mathfrak{N}$ mit $\mathfrak{N} \subsetneqq \mathfrak{M}_f^M$. Setzen wir $\mathfrak{N}_1 = \mathfrak{M}_f^M - \mathfrak{N}$, so ist $\mathfrak{N}_1 \neq (0)$, $\mathfrak{N}_1 \eta M'$. Hieraus ergibt sich infolge des Hilfssatzes aus § 35, Nr. 2, daß $P_{\mathfrak{N}} E \neq 0$, $P_{\mathfrak{N}_1} E \neq 0$, also

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^{M'} \neq (0), \quad \mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}_f^{M'} \neq (0)$$

ist. Andererseits ist

$$\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^{M'} \subset \mathfrak{M}_f^M \cap \mathfrak{M}_f^{M'} = \{\alpha f\},$$
$$\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}_f^{M'} \subset \mathfrak{M}_f^M \cap \mathfrak{M}_f^{M'} = \{\alpha f\},$$

so daß f zu $\mathfrak{N} \cap \mathfrak{M}_f^{M'}$ und zu $\mathfrak{N}_1 \cap \mathfrak{M}_f^{M'}$ gehört. Das ist jedoch nicht möglich, denn diese Teilräume sind zueinander orthogonal.

Aus Satz III folgt:

IV. *Die Faktoren M und M' gehören entweder beide zur Klasse* (I), *oder keiner von ihnen gehört ihr an.*

Es sei nun M und demzufolge auch M' ein Faktor der Klasse (I) und $\mathfrak{M} \eta M'$ ein minimaler Teilraum. Wenden wir auf den Faktor M' und den Teilraum $\mathfrak{M}$ das Theorem 1 aus Nr. 2 an, so spielt jetzt $M'' = M$ die Rolle von M'. Folglich besteht die Algebra M aus den Diagonalmatrizen der Form $A \sim \| \delta_{pq} A_0 \|$, wobei A_0 aus $M_{(\mathfrak{M})} = (M'_{(\mathfrak{M})})'$ ist.

Nun durchlaufe F alle Projektionsoperatoren aus M', die der Bedingung $F \leqq P_{\mathfrak{M}}$ genügen; nach Nr. 1, Satz IV, durchläuft dann $F_{\mathfrak{M}}$ alle Projektionsoperatoren aus $(M')_{(\mathfrak{M})}$. Da der Raum $\mathfrak{M}$ minimal ist bezüglich M', nimmt F nur die beiden Werte 0 und $P_{\mathfrak{M}}$ an. Folglich enthält die Algebra $(M')_{(\mathfrak{M})}$ nur die Projektionsoperatoren 0 und 1. Auf Grund von § 34, Nr. 2, Folgerung 6, ergibt sich hieraus $(M')_{(\mathfrak{M})} = R(0, 1) = (\alpha 1)$. Also ist

$$M_{(\mathfrak{M})} = ((M')_{(\mathfrak{M})})' = (\alpha 1)' = \mathfrak{B}_0,$$

wobei $\mathfrak{B}_0$ die Algebra der beschränkten linearen Operatoren in $\mathfrak{M}$ ist.

Damit erhalten wir den folgenden Satz.

Theorem 2. *Ein Faktor gehört genau dann zu einer diskreten Klasse, wenn er direkt und infolgedessen vollisomorph der Algebra $\mathfrak{B}_0$ aller beschränkten linearen Operatoren eines endlichdimensionalen oder unendlichdimensionalen* Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}_0$ ist. Ist dabei $\mathfrak{H}_0$ von der endlichen Dimension n, so gehört der Faktor der endlichen Klasse* (I_n) *an. Daraus folgt, daß alle Faktoren der endlichen Klasse* (I_n), $n = 1, 2, \ldots$, *und ebenfalls alle Faktoren der Klasse* (I_∞) *im separablen Raum einander vollisomorph sind, so daß im Fall* (I_n) *und im separablen Fall* (I_∞) *die relative Dimension ein vollständiges Invariantensystem gegenüber vollen Isomorphismen von Algebren bildet.*

4. Die Struktur der Faktoren der Klasse (II_∞). Theorem 1 aus Nr. 2 gibt uns die Möglichkeit, die Faktoren aus (II_∞) mit Hilfe der Faktoren aus (II_1) zu beschreiben. Ist nämlich M ein Faktor aus (II_∞) und $\mathfrak{M} \eta M$ ein endlicher Teilraum und berücksichtigen wir, daß die Algebra $M_{(\mathfrak{M})}$ nach Nr. 1, Satz V, ein Faktor aus (II_1) ist, so erhalten wir, wenn wir das Theorem 1 aus Nr. 2 auf den Faktor M und den Teilraum $\mathfrak{M}$ anwenden, den folgenden Satz.

Theorem 3. *Jeder Faktor M aus* (II_∞) *ist raumisomorph der Algebra der beschränkten unendlichen Matrizen* $A \sim \|A_{\alpha\beta}\|$, *wobei* $A_{\alpha\beta}$ *ein Operator aus einem bestimmten Faktor der Klasse* (II_1) *ist.*

Dieser Satz führt die Untersuchung der Faktoren aus (II_∞) auf die der Faktoren aus (II_1) zurück.

5. Ein Beispiel für einen Faktor aus der Klasse (II_1). Die Frage nach der Struktur der Faktoren aus (II_1) ist bis heute noch nicht beantwortet. Wir kennen nur einzelne Beispiele und wissen, daß es in (II_1) auch nichtisomorphe Faktoren gibt.

Wir geben jetzt das einfachste Beispiel für einen Faktor der Klasse (II_1) an. Es sei $\mathfrak{G}$ eine abzählbare diskrete Gruppe mit der Eigenschaft[1]):

Für $a \neq e$ ist die Klasse $\mathfrak{C}_a$ aller Elemente $c^{-1}ac$, $c \in \mathfrak{G}$, unendlich. (A)

Wir bilden den Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$, dessen Elemente alle möglichen Systeme $f = \{x_a, a \in \mathfrak{G}\}$ von komplexen Zahlen x_a sind, die der Bedingung

$$\sum_{a \in \mathfrak{G}} |x_a|^2 < \infty$$

genügen; dabei wird das Skalarprodukt zweier Vektoren $f = \{x_a, a \in \mathfrak{G}\}$ und $g = \{y_a, a \in \mathfrak{G}\}$ durch die Formel

$$\langle f, g\rangle = \sum_{a \in \mathfrak{G}} x_a \bar{y}_a$$

definiert. Führen wir in $\mathfrak{H}$ die Operatoren U_{a_0} und V_{a_0} $(a_0 \in \mathfrak{G})$ ein, indem wir

$$U_{a_0}\{x_a, a \in \mathfrak{G}\} = \{x_{a a_0}, a \in \mathfrak{G}\},$$

$$V_{a_0}\{x_a, a \in \mathfrak{G}\} = \{x_{a_0 a}, a \in \mathfrak{G}\}$$

setzen, so sind U_{a_0} und V_{a_0} unitäre Operatoren in $\mathfrak{H}$.

Es seien nun M_1 bzw. M_2 die Algebren der beschränkten linearen und mit allen Operatoren V_{a_0} bzw. U_{a_0} vertauschbaren Operatoren A bzw. B. Jeder Operator U_{a_0} läßt sich mit jedem Operator V_{a_0} vertauschen; daher ist

$$U_{a_0} \in M_1, \ V_{a_0} \in M_2 \quad \text{für alle} \quad a_0 \in \mathfrak{G}. \tag{1}$$

Jeden beschränkten Operator A aus $\mathfrak{H}$ können wir in Form einer beschränkten Zahlenmatrix $A \sim \|\eta_{a,b}\|_{a,b \in \mathfrak{G}}$ schreiben. Gehört A zur Algebra M_1, so ergibt die Bedingung der Vertauschbarkeit mit den Operatoren V_{a_0} die Beziehung $\eta_{a_0 a, a_0 b} = \eta_{a,b}$. Setzen wir hier $a_0 = a^{-1}$, so erhalten wir

$$\eta_{a,b} = \eta_{e,a^{-1}b} = \eta_{a^{-1}b},$$

wobei wir $\eta_c = \eta_{e,c}$ gesetzt haben.

Somit kann die Matrix des Operators $A \in M_1$ nur die Form

$$A \sim \|\eta_{a^{-1}b}\|_{a,b \in \mathfrak{G}}$$

---

[1]) Beispielsweise ist die Gruppe der Transformationen $x' = ax + b$ $(a > 0)$ mit rationalen Koeffizienten a und b eine solche Gruppe.

haben. Analog hat die Matrix des Operators $B \in M_2$ die Gestalt

$$B \sim \|\zeta_{ab^{-1}}\|_{a,b \in \mathfrak{G}}.$$

Wir wollen jetzt zeigen, daß $M_1' = M_2$ und $M_2' = M_1$ ist. Dazu bemerken wir, daß jede Matrix $\eta = \|\eta_{a^{-1}b}\|$ mit jeder Matrix $\zeta = \|\zeta_{ab^{-1}}\|$ vertauschbar ist. Es ist nämlich

$$\eta\zeta = \left\|\sum_c \eta_{a^{-1}c}\zeta_{bc^{-1}}\right\|, \quad \zeta\eta = \left\|\sum_c \zeta_{ac^{-1}}\eta_{c^{-1}b}\right\|;$$

setzen wir in die erste Summe $c = ac'^{-1}b$ ein, ergibt sich

$$\sum_c \eta_{a^{-1}c}\zeta_{cb^{-1}} = \sum_{c'} \eta_{a^{-1}a\,c'^{-1}b}\zeta_{ac'^{-1}bb^{-1}} = \sum_{c'} \eta_{c'^{-1}b}\zeta_{ac'^{-1}}$$

und somit $\eta\zeta = \zeta\eta$. Daraus folgt

$$M_2 \subset M_1', \quad M_1 \subset M_2'. \tag{2}$$

Andererseits liefert die Beziehung (1)

$$M_1 = \{R(V_{a_0} : a_0 \in \mathfrak{G})\}' \supset M_2', \tag{3}$$

$$M_2 = \{R(U_{a_0} : a_0 \in \mathfrak{G})\}' \supset M_1'. \tag{4}$$

Vergleichen wir (3), (4) und (2), so finden wir

$$M_1 = M_2' = R(U_{a_0} : a_0 \in \mathfrak{G}), \quad M_2 = M_1' = R(V_{a_0} : a_0 \in \mathfrak{G}).$$

Wir wollen nun den Durchschnitt $M_1 \cap M_2$ bestimmen. Liegt der Operator A in diesem Durchschnitt, so muß die Matrix $\|\eta_{a,b}\|$ von A den beiden Bedingungen

$$\eta_{a_0 a, a_0 b} = \eta_{a,b}, \quad \eta_{a a_0, b a_0} = \eta_{a,b}$$

genügen. Aus der ersten Formel folgt $\eta_{a,b} = \eta_{a^{-1}b}$, die zweite ergibt

$$\eta_{a_0^{-1}a^{-1}b a_0} = \eta_{a^{-1}b},$$

d. h., die Funktion η_a, $a \in \mathfrak{G}$, ist auf jeder Klasse $\mathfrak{C}_a$ konstant. Andererseits muß auf Grund der Beschränktheit von $\|\eta_{a,b}\|$

$$\sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_c|^2 = \sum_{c \in \mathfrak{G}} |\eta_{e,c}|^2 < \infty \tag{5}$$

sein. Da infolge (A) die Klasse $\mathfrak{C}_a$ für $a \neq e$ unendlich ist, gilt die Bedingung (5) nur dann, wenn der konstante Wert von η_c auf $\mathfrak{C}_a$ gleich Null ist. Also ist $\eta_c = 0$ für $c \neq e$ und somit $\eta_{a,b} = \delta_{a,b}\,\eta_e$ mit

$$\delta_{a,b} = \begin{cases} 0 & \text{für} \quad a \neq b, \\ 1 & \text{für} \quad a = b. \end{cases}$$

Die Algebra $M_1 \cap M_2 = M_1 \cap M_1' = M_2' \cap M_2$ besteht infolgedessen aus den Skalaren $\alpha 1$, d. h., M_1 und M_2 sind Faktoren.

Wir zeigen nun, daß M_1 und M_2 Faktoren der Klasse (II_1) sind, und betrachten dazu den Faktor M_1. Jedem Operator $A \sim \|\eta_{a^{-1}b}\|$ aus M_1 ordnen wir die Zahl

$$T(A) = \eta_e$$

zu und beweisen, daß die so erhaltene Funktion $T(A)$ allen Forderungen von Theorem 2 aus § 37, Nr. 2, genügt. Offenbar ist $T(1) = 1$, $T(\alpha A) = \alpha T(A)$, $T(A + B) = T(A) + T(B)$, so daß schon die ersten drei Bedingungen aus Theorem 1 von § 37, Nr. 2, erfüllt sind. Ist ferner A ein positiv definiter hermitescher Operator aus M_1, so ist $A = B^* B$ mit $B \in M_1$. Für $A \sim \|\eta_{a^{-1}b}\|$ und $B \sim \|\zeta_{a^{-1}b}\|$ gilt

$$\eta_{a^{-1}b} = \sum_c \bar{\zeta}_{c^{-1}a} \zeta_{c^{-1}b}$$

und infolgedessen für $a = b = e$

$$T(A) = \eta_e = \sum_c |\zeta_{c^{-1}}|^2 \geqq 0,$$

wobei das Gleichheitszeichen nur für $\zeta_c \equiv 0$, also für $A = 0$ eintritt. Die Bedingungen d) und f') erweisen sich also als richtig. Analog läßt sich zeigen, daß $T(AB) = T(BA)$ für alle $A, B \in M_1$ gilt.

Somit genügt die Funktion $T(A)$ allen Bedingungen aus Theorem 2 von § 37, Nr. 2. Folglich ist M_1 auf Grund dieses Satzes ein Faktor endlicher Klasse. Andererseits ist der Fall (I_n) hier nicht möglich, denn M_1 enthält unendlich viele linear unabhängige Elemente U_a. Infolgedessen ist M_1 ein Faktor der Klasse (II_1). Ebenso können wir beweisen, daß M_2 ein Faktor der Klasse (II_1) ist.

Auf kompliziertere Art kann man auch einen Faktor der Klasse (III) konstruieren (vgl. Murray und von Neumann [1]). Eine andere Konstruktion von Faktoren der Klassen (I) und (II), die sich auf den Begriff des direkten Produkts von endlich oder unendlich (sogar nichtabzählbar) vielen Hilbertschen Räumen stützt, ist bei von Neumann [6] angegeben.

Ein allgemeineres Verfahren zur Konstruktion von Faktoren der Klasse (II) wurde unlängst von Wright [1] angewendet.

6. Approximativ endliche Faktoren der Klasse (II_1). Ein Faktor M heißt *approximativ endlich,* wenn eine Folge von Faktoren

$$M_1 \subset M_2 \subset M_3 \subset \cdots \subset M$$

der endlichen Klassen (I_{n_1}), (I_{n_2}), (I_{n_3}), ... mit der Eigenschaft $R(M_1, M_2, M_3, \ldots) = M$ existiert. Offenbar ist die approximative Endlichkeit eines Faktors invariant gegenüber symmetrischen Isomorphismen von Algebren. Es zeigt sich, daß jeder Faktor der Klasse (II_1) eine Teilalgebra enthält, die ein approximativ endlicher Faktor derselben Klasse ist (vgl. Murray und von Neumann [1], Satz XIII). In dieser Arbeit wird bewiesen, daß *auch nicht approximativ endliche Faktoren der Klasse* (II_1) *existieren. Also existieren nichtisomorphe Faktoren der Klasse* (II_1).

7. Der Zusammenhang zwischen den Klassen der Faktoren M und M'. In Nr. 3, Satz IV, haben wir gesehen, daß M und M' entweder beide zur Klasse (I) gehören, oder es gehört keiner von beiden der Klasse (I) an. Dieses Ergebnis erlaubt die folgende Verallgemeinerung (vgl. Murray und von Neumann [1], I).

Theorem 4. *Die Faktoren M und M' gehören entweder beide oder keiner von beiden zur Klasse* (I) *bzw.* (II) *bzw.* (III), *und es ist* $D_M(\mathfrak{M}_f^{M'}) = C D_{M'}(\mathfrak{M}_f^{M})$ *für jedes* $f \neq 0$, *wobei* C *eine gewisse Konstante ist. Dabei ist* $C = 1$ *für einen Faktor der Klasse* (I), *wenn die Funktionen* D_M *und* $D_{M'}$ *standardnormiert sind. Sind* M *und* M' *aus* (I), *so ist für sie jede Kombi-*

nation (I_n) *und* (I_m) *mit* $m, n = 1, 2, \ldots, \infty$ *möglich; gehören* M *und* M' *zu* (II), *so ist für sie jede der Kombinationen* (II_1) *und* (II_1), (II_1) *und* (II_∞), (II_∞) *und* (II_∞) *mit beliebigem positivem* C *möglich.*

8. Der Zusammenhang zwischen symmetrischen Isomorphismen und Raumisomorphismen. Einem Faktor M aus (I) oder (II) ordnen wir die Zahl

$$\theta = \frac{1}{C} \frac{D_{M'}(\mathfrak{H})}{D_M(\mathfrak{H})}$$

zu; dabei ist C die in Theorem 4 definierte Konstante. Sind $D_{M'}(\mathfrak{H})$ und $D_M(\mathfrak{H})$ nicht beide unendlich, so ist θ definiert und hängt nicht von der Normierung der Funktionen $D_{M'}(\mathfrak{M})$ und $D_M(\mathfrak{M})$ ab; sind $D_{M'}(\mathfrak{H})$ und $D_M(\mathfrak{H})$ beide unendlich, so bezeichnet θ das Symbol $\frac{\infty}{\infty}$. Es läßt sich zeigen (vgl. MURRAY und VON NEUMANN [1], II, Satz X), daß *zwei Faktoren* M_1 *und* M_2 *aus separablen Räumen* $\mathfrak{H}_1$ *bzw.* $\mathfrak{H}_2$ *genau dann einander raumisomorph sind, wenn die Faktoren* M_1 *und* M_1' *den Faktoren* M_2 *bzw.* M_2' *symmetrisch isomorph sind und die Zahl* θ *für beide Faktoren* M_1 *und* M_2 *übereinstimmt.*

Verschiedene Verallgemeinerungen dieses Resultats finden sich bei DIXMIER [11] und GRIFFIN [1].

9. Unbeschränkte Operatoren, die zu einem Faktor endlicher Klasse gehören. Es sei M ein Faktor endlicher Klasse und U_M die Gesamtheit der abgeschlossenen linearen Operatoren $A \eta M$ mit einem in $\mathfrak{H}$ dichten Definitionsbereich $\mathfrak{D}(A)$. Dann ist jedes (nichtkommutative) Polynom von Operatoren aus U_M auf einer in $\mathfrak{H}$ dichten Menge definiert und läßt sich zu einem abgeschlossenen Operator fortsetzen. Die Rechenoperationen mit diesen abgeschlossenen Operatoren und der Übergang zum adjungierten Operator vollziehen sich nach den üblichen Regeln aus der Matrizenalgebra. Jeder symmetrische Operator $H \in U_M$ ist selbstadjungiert, und für $A_1, A_2 \in U_M$ mit $A_1 \subset A_2$ gilt $A_1 = A_2$. Die Beweise dieser Ergebnisse sind bei MURRAY und VON NEUMANN [1], I, Satz IV, zu finden.

§ 39. Unitäre Algebren und Algebren mit Spur

1. Definition der unitären Algebra. Eine Menge X von Elementen $x, y, \ldots$ ist eine *unitäre Algebra*, wenn

a) X eine symmetrische Algebra ist;
b) X ein euklidischer Raum ist;
c) $\langle xy, z \rangle = \langle y, x^* z \rangle$ für alle $x, y, z \in X$;
d) $\langle x, y \rangle = \langle y^*, x^* \rangle$ für alle $x, y \in X$;
e) für jedes $x \in X$ der Operator $U_x y = xy$ auf X stetig ist;
f) die Elemente der Form xy mit $x, y \in X$ eine in X dichte Menge bilden.

Offenbar ist jede HILBERTsche Algebra (vgl. § 25, Nr. 5) eine unitäre Algebra. Die Umkehrung gilt jedoch nicht, da eine unitäre Algebra nicht unbedingt eine normierte Algebra mit der Norm $|x| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$ zu sein braucht, d. h. nicht unbedingt der Ungleichung $|xy| \leq |x|\,|y|$ zu genügen braucht. Außerdem braucht eine unitäre Algebra nicht vollständig zu sein.

2. Definition einer Algebra mit Spur. Es sei M eine schwach abgeschlossene Algebra beschränkter linearer Operatoren eines HILBERTschen Raumes, die den Einheitsoperator enthält. Wir bezeichnen mit M_+ die Menge aller positiv definiten hermiteschen Operatoren aus M. Als *Spur* auf M bezeichnen wir jede auf M_+ erklärte Funktion $T(H)$ mit Werten im Intervall $[0, \infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

a) $T(UHU^{-1}) = T(H)$ für alle unitären $U \in M$;

b) aus $H \in M_+$ und $T(H) = 0$ folgt $H = 0$;

c) ist $H \in M_+$ und ist H die Summe einer stark konvergenten Reihe von Operatoren $H_\alpha \in M_+$, so ist $T(H) = \sum_\alpha T(H_\alpha)$.

Eine Algebra R, auf der eine solche Spur $T(H)$ gegeben ist, heißt eine *Algebra mit Spur.*

Beispiele für Algebren mit Spur sind Faktoren der Klassen (I) und (II).

3. Konstruktion einer unitären Algebra mit Hilfe der Spur. Es sei M eine Algebra mit der Spur $T(H)$. Ein Operator A aus M heißt *endlich*, wenn er eine endliche Linearkombination von Operatoren aus M_+ mit endlicher Spur ist. Mit M_1 bezeichnen wir die Gesamtheit aller endlichen Operatoren aus M.

Gilt $T(A^*A) < \infty$, so heißt der Operator A aus M *normierbar*. Ist M_2 die Gesamtheit der normierbaren Operatoren aus M, so können wir aus der Beziehung[1] $(A+B)^*(A+B) \leqq 2(A^*A + B^*B)$ und den Eigenschaften der Spur schließen, daß M_2 ein Teilraum von M ist. Daraus ergibt sich sofort $B^*A \in M_1$ für $A, B \in M_2$. Wir können also in M_2 durch die Beziehung $\langle A, B\rangle = T(B^*A)$ ein Skalarprodukt definieren. Wir gelangen so zu folgendem Satz, den wir ohne Beweis angeben (vgl. GODEMENT [10]).

Theorem 1. *Ist M eine Algebra mit der Spur $T(H)$, so ist die Gesamtheit M_2 aller normierbaren Operatoren aus M, in der die natürliche Involution $A \to A^*$ und das Skalarprodukt*

$$\langle A, B\rangle = T(B^*A)$$

definiert sind, eine unitäre Algebra.

4. Die kanonische Spur in einer unitären Algebra. Die in Nr. 3 beschriebene Methode zur Konstruktion einer unitären Algebra mit Hilfe der Spur gibt uns die Möglichkeit, eine beliebige unitäre Algebra zu erhalten; wir können also jede unitäre Algebra in eine andere unitäre Algebra einbetten, die wir nach dem oben beschriebenen Verfahren mit Hilfe der Spur konstruieren. Um dies zu beweisen, betrachten wir zunächst einige einfache Eigenschaften der unitären Algebren.

Es sei X eine unitäre Algebra und $\mathfrak{H}$ die vollständige Hülle des euklidischen Raumes X. Dann ist $\mathfrak{H}$ ein HILBERTscher Raum. Aus der Eigenschaft e) der unitären Algebra (vgl. Nr. 1) folgt, daß sich der Operator $U_x y = xy$, $x, y \in X$, eindeutig zu einem beschränkten linearen Operator auf $\mathfrak{H}$ fortsetzen läßt; diesen Operator auf $\mathfrak{H}$ bezeichnen wir ebenfalls mit U_x.

[1]) Wie stets bedeutet für hermitesche Operatoren A und B die Beziehung $A \leqq B$, daß $\langle Af, f\rangle \leqq \langle Bf, f\rangle$ für alle $f \in \mathfrak{G}$ ist.

Offenbar ist die Zuordnung $x \to U_x$ ein Homomorphismus und wegen Nr. 1, Eigenschaft c), sogar ein symmetrischer Homomorphismus.

Wir bezeichnen mit $M(X)$ die von den Operatoren U_x erzeugte schwach abgeschlossene Algebra.

Benutzen wir die Eigenschaft d) aus Nr. 1, so können wir leicht zeigen, daß der Operator $V_x y = yx$ ebenfalls auf X beschränkt ist und sich daher eindeutig zu einem beschränkten linearen Operator auf $\mathfrak{H}$ fortsetzen läßt; diesen Operator bezeichnen wir wieder mit V_x.

Ein Element $f \in \mathfrak{H}$ heißt *beschränkt*, wenn ein beschränkter linearer Operator U_f existiert, für den

$$U_f x = V_x f \quad \text{für alle} \quad x \in X$$

gilt. Wir definieren nun in $M_+(X)$ eine Spur, indem wir

$$T(H) = \begin{cases} \langle f, f \rangle, & \text{wenn } \sqrt{H} = U_f \text{ für ein beschränktes } f \in \mathfrak{H} \text{ ist,} \\ +\infty & \text{sonst} \end{cases}$$

setzen. Wir überlassen es dem Leser, zu zeigen, daß sämtliche Axiome der Spur (vgl. Nr. 2) erfüllt sind (ein ausführlicher Beweis ist bei GODEMENT [10] gegeben). Mit Hilfe der kanonischen Darstellung $A = WH$ erhalten wir, daß der Operator A aus $M(X)$ genau dann normierbar ist, wenn A für ein beschränktes $f \in \mathfrak{H}$ gleich U_f ist; dabei gilt für zwei normierbare Operatoren $A = U_f$ und $B = U_\varphi$

$$T(B^* A) = \langle f, \varphi \rangle$$

Wir gelangen so zu folgendem Satz.

Theorem 2. *Es sei X eine unitäre Algebra, $\mathfrak{H}$ die vollständige Hülle des euklidischen Raumes X und $M(X)$ die von den Operatoren U_x, $x \in X$, erzeugte schwach abgeschlossene Algebra. Dann gibt es in $M(X)$ genau eine Spur $T(A)$, die die folgenden Eigenschaften besitzt:*

a) *Ein Operator $A \in M(X)$ ist genau dann normierbar, wenn $A = U_f$ für ein beschränktes $f \in \mathfrak{H}$ ist;*

b) *für zwei beliebige normierbare Operatoren $A = U_f$ und $B = U_\varphi$ gilt*

$$T(B^* A) = \langle f, \varphi \rangle,$$

und insbesondere ist $\langle x, y \rangle = T(U_y^* U_x\rangle$ für alle $x, y \in X$.

Die mit Hilfe einer gegebenen unitären Algebra X definierte Spur $T(H)$ heißt *kanonische Spur* in $M(X)$. Im allgemeinen können in $M(X)$ auch noch andere Spuren existieren; zum Beispiel ist jede Funktion $T'(H) = T(AH)$, wobei A ein positiv definiter Operator aus dem Zentrum von $M(X)$ ist, ebenfalls eine Spur in $M(X)$. Damit die Spur in $M(X)$ bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist, ist notwendig, daß $M(X)$ ein Faktor ist. Ist $M(X)$ ein Faktor, so ist die unitäre Algebra X *irreduzibel*. Auf Grund der Ergebnisse aus § 37 ist die Irreduzibilität nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür, daß die Spur bis auf einen konstanten Faktor eindeutig bestimmt ist.

Somit stimmt im Fall einer irreduziblen Algebra die kanonische Spur bis auf einen konstanten Faktor mit der relativen Spur in $M(X)$ überein; Theorem 2 gibt an, wie sich die relative Spur in $M(X)$ unmittelbar konstruieren läßt.

Theorem 3. *Es sei R eine symmetrische Algebra von beschränkten Operatoren eines* HILBERT*schen Raumes, und es gelte $M = R''$; ferner setzen wir voraus:*

a) *M ist die abgeschlossene Hülle von R in der starken Topologie;*

b) *M ist ein Faktor aus* (I) *oder* (II);

c) *ist S die relative Spur in M, so gilt $S(A^*A) < +\infty$ für alle $A \in R$.*

Dann ist die Algebra M, in der die natürliche Involution $A \rightarrow A^*$ und das Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = S(B^*A)$ definiert sind, eine irreduzible unitäre Algebra. Dabei gilt:

α) Die vollständige Hülle $\mathfrak{H}$ des euklidischen Raumes R ist bezüglich des Skalarprodukts $\langle A, B\rangle = S(B^*A)$ isomorph der vollständigen Hülle der aus den normierbaren Elementen von M gebildeten unitären Algebra M_2.

β) Die Algebra[1] *$M(R)$ ist isomorph der Algebra M, wobei der Isomorphismus von M auf $M(R)$ dadurch bestimmt ist, daß er auf der Einheitskugel von M schwach stetig sein und jedem Operator $A \in R$ den auf R durch die Gleichung $U_A B = AB$ definierten Operator $U_A \in M(R)$ zuordnen muß.*

γ) Die kanonische Spur T auf $M(R)$ ist durch die Formel

$$T(U_H) = S(H) \quad \text{für alle} \quad H \in M_+(R)$$

gegeben, wobei $A \rightarrow U_A$ der oben definierte Isomorphismus von M auf $M(R)$ ist.

Zum Beweis dieses Satzes muß man nachprüfen, ob

1. die durch die Formel $U_A B = AB$ definierte Zuordnung $A \rightarrow U_A$ tatsächlich ein Isomorphismus von M auf $M(R)$ ist;

2. R mit der Involution $A \rightarrow A^*$ und dem Skalarprodukt $\langle A, B\rangle = S(B^*A)$ allen Axiomen einer unitären Algebra genügt;

3. die Funktion $T(U_H) = S(H)$, $H \in M_+(R)$, allen Axiomen einer Spur genügt und der konstante Faktor, durch den sich diese Spur eventuell von der kanonischen Spur unterscheidet, in diesem Fall gleich 1 ist.

Die Ergebnisse aus § 33 bis § 38 stammen von MURRAY und VON NEUMANN [1] (vgl. auch VON NEUMANN [1, 4, 7]), die aus § 39 von GODEMENT [10]; ein dem Theorem 3 ähnlicher Satz (jedoch nur für Faktoren endlicher Klasse) ist in Kap. II der Arbeit [1] von MURRAY und VON NEUMANN enthalten.

Die Resultate von MURRAY und VON NEUMANN wurden in zahlreichen Arbeiten weiterentwickelt, von denen am interessantesten die Arbeiten von DIXMIER [1—12], GODEMENT [8, 10, 11] und SEGAL [8—12] sind. In den DIXMIERschen Arbeiten ist der Begriff der Spur auf beliebige schwach abgeschlossene Algebren erweitert, wobei die Werte der Spur nicht Zahlen, sondern Operatoren aus dem Zentrum der Algebra sind. SEGAL entwickelt in seinen Arbeiten die Theorie der nichtkommutativen Integration; außerdem wendet er die Ergebnisse aus § 33 bis § 38 auf die Theorie der unitären Darstellungen einer Gruppe an.

---

[1]) Wir erinnern daran (vgl. S. 494), daß wir mit $M(X)$ die von den Operatoren U_x, $x \in X$, erzeugte schwach abgeschlossene Algebra bezeichnet hatten.

Von Interesse sind auch die Arbeiten von Fuglede und Kadison [1—3], die die Determinantentheorie in den Faktoren endlicher Klasse entwickeln (vgl. auch Pallu de la Barrière [1—5]).

Godement [8, 10, 11] benutzte die Ergebnisse dieses Kapitels in der von ihm begründeten Theorie der Charaktere nichtkommutativer Gruppen, die eine Verallgemeinerung der Resultate von I. M. Gelfand und Neumark [7] darstellt. Der Begriff der kommutativen unitären Algebra, der sich nur wenig von der in diesem Paragraphen gegebenen Definition unterscheidet, und die Theorie dieser Algebren wurden zuerst von W. A. Rochlin [1] aufgestellt.

KAPITEL VIII

DIE ZERLEGUNG EINER OPERATORENALGEBRA IN IRREDUZIBLE ALGEBREN

§ 40. Problemstellung. Die Zerlegung eines positiven Funktionals in elementare Funktionale

1. Problemstellung. Eine Menge S von beschränkten linearen Operatoren eines HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}$ heißt *irreduzibel*, wenn $\mathfrak{H}$ keinen von (0) und $\mathfrak{H}$ verschiedenen abgeschlossenen Teilraum enthält, der invariant bezüglich aller Operatoren $A \in S$ ist. Anderenfalls heißt S eine *reduzible* Menge. Insbesondere ist eine symmetrische Algebra $R \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *irreduzibel* oder *reduzibel*, wenn sie eine irreduzible bzw. reduzible Menge ist.

Ist R eine reduzible symmetrische Operatorenalgebra im endlichdimensionalen HILBERTschen Raum $\mathfrak{H}$, so gibt es in $\mathfrak{H}$ einen von (0) und $\mathfrak{H}$ verschiedenen und bezüglich der Operatoren $A \in R$ invarianten Teilraum $\mathfrak{M}$. Dann ist das orthogonale Komplement $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ ebenfalls invariant bezüglich $A \in R$. Die Einschränkungen $A_{\mathfrak{M}}$ der Operatoren $A \in R$ auf $\mathfrak{M}$ bilden eine Algebra $R_{\mathfrak{M}}$ von Operatoren auf $\mathfrak{M}$, die eine *Komponente* der ursprünglichen Algebra R auf $\mathfrak{M}$ heißt. Ist $R_{\mathfrak{M}}$ reduzibel, so können wir $\mathfrak{M}$ wieder in orthogonale Teilräume zerlegen, und genauso verfahren wir mit $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$. Da $\mathfrak{H}$ endlichdimensional ist, gelangen wir nach endlich vielen Schritten zu einer Zerlegung $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_n$ von $\mathfrak{H}$ in die orthogonale Summe endlich vieler bezüglich R invarianter Teilräume; in jedem von ihnen ist R (genauer die Komponente $R_k = R_{\mathfrak{M}_k}$ von R) irreduzibel. Wir sagen, die Zerlegung $\mathfrak{H} = \mathfrak{M}_1 \oplus \cdots \oplus \mathfrak{M}_k$ realisiert die *Zerlegung von R in irreduzible Algebren R_k*.

Entsprechend dieser Zerlegung läßt sich jedes Element $\xi \in \mathfrak{H}$ in der Form

$$\xi = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}, \quad \xi_k \in \mathfrak{M}_k, \tag{1}$$

schreiben, und der Operator $A \in R$ wird durch die Beziehung

$$A\xi = \{A_1\xi_1, A_2\xi_2, \ldots, A_n\xi_n\}, \quad A_k \in R_k, \tag{2}$$

mit $k = 1, 2, \ldots, n$ definiert.

Diese Überlegungen lassen sich nicht wörtlich auf einen unendlichdimensionalen Raum $\mathfrak{H}$ übertragen. Um zu sehen, wie sie geändert werden müssen, untersuchen wir eine symmetrische, kommutative und bezüglich der Norm abgeschlossene Algebra R in einem beliebigen HILBERTschen Raum $\mathfrak{H}$. Dann ist R isomorph der Algebra aller auf einem lokal bikompakten Raum $\mathfrak{M}$ stetigen Funktionen $a(M)$. Zusätzlich nehmen wir an, daß in $\mathfrak{H}$ ein zyklischer Vektor ξ_0 existiert, für den die Gesamtheit der Vektoren $A\xi_0$, $A \in R$, in $\mathfrak{H}$ dicht ist. In diesem Fall ist $\mathfrak{H}$ isometrisch dem HILBERTschen Raum $L^2_\mu(\mathfrak{M})$ bezüg-

lich eines Maßes μ, und die Operatoren $A \in R$ gehen bei der isometrischen Abbildung

$$\xi \rightarrow \xi(M) \tag{3}$$

in Operatoren der Multiplikation mit stetigen, im Unendlichen verschwindenden Funktionen $a(M)$ über:

$$A\{\xi(M)\} = \{a(M)\,\xi(M)\} \tag{4}$$

(vgl. § 17, Nr. 4, Satz I).

Die Formeln (3) und (4) lassen sich als stetiges Analogon der Formeln (1) bzw. (2) auffassen. Den Vektoren ξ_k entsprechen jetzt die einzelnen Werte $\xi(M)$ und den Operatoren A_k die Werte der Funktionen $a(M)$. Da R kommutativ ist, sind diese Werte keine Vektoren, sondern Zahlen. Es versteht sich, daß dies auch schon vorher eingetreten wäre, wenn wir R im endlichdimensionalen Raum als kommutativ vorausgesetzt hätten.

Wir können also beweisen, daß $L^2_\mu(\mathfrak{M})$ die stetige Summe eindimensionaler Räume und R die stetige Summe von Operatorenalgebren in eindimensionalen (und demzufolge irreduziblen) Räumen ist. Es entsteht nun die Frage, ob diese Überlegungen nicht auf beliebige und sogar nichtkommutative Operatorenalgebren übertragen werden können. Man wird natürlich erwarten, daß sich dann eine stetige Summe von mehrdimensionalen Räumen $\mathfrak{H}_M$ ergibt und R die stetige Summe der Algebren R_M in diesen Räumen wird, wobei alle oder wenigstens fast alle R_M irreduzibel sind.

Das vorliegende Kapitel ist der präzisen Formulierung und Beantwortung dieses Problems gewidmet.

2. Reduzible und zentral reduzible positive Funktionale. Im folgenden wird R stets eine BANACHsche symmetrische Teilalgebra von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ mit Einselement und Z das Zentrum dieser Algebra bedeuten.

Da Z eine vollreguläre BANACHsche kommutative Algebra ist, muß sie der Algebra $C(\mathfrak{M})$ vollisomorph sein, wobei $\mathfrak{M}$ hier und im folgenden den Raum der maximalen Ideale von Z bezeichnet. Für zwei positive Funktionale f_1, f_2 über R werden wir $f_1 < f_2$ schreiben, wenn $f_2 - f_1$ ebenfalls ein positives Funktional über R ist. Ferner gilt für zwei hermitesche Operatoren $A, B \in \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ die Ungleichung $A \leq B$, wenn $B - A$ ein positiv definiter Operator ist. Mit $f^Z(A)$ wollen wir die Einschränkung des Funktionals $f(A)$ auf Z bezeichnen. Ein positives Funktional f über R heißt *reduzibel*, wenn für jedes positive Funktional $f_1 < f$ und alle $A \in R$ ein Operator $B \in Z$ mit der Eigenschaft $f_1(A) = f(BA)$ existiert. Ein positives Funktional f über R heißt *zentral reduzibel*, wenn seine Einschränkung f^Z ein reduzibles Funktional über Z ist. Auf Grund von § 20, Nr. 4, Folgerung 1, wird jedes positive Funktional $p(B)$ über Z durch die Formel

$$p(B) = \int B(M)\,d\mu(M) \tag{1}$$

gegeben; dabei ist μ ein Maß auf $\mathfrak{M}$. Ferner existiert ein *Träger des Funktionals* p, d. h. eine minimale abgeschlossene Menge $D_p \subset \mathfrak{M}$, die die Eigenschaft $\mu(D_p) = \mu(\mathfrak{M})$ hat (vgl. § 20, Nr. 4). Dann läßt sich offenbar das Integral (1) als Integral über D_p allein auffassen.

Theorem 1. *Ist f ein zentral reduzibles positives Funktional über R, so entspricht jedem Punkt $M \in D_{f^Z}$ ein einziges positives Funktional f_M über R, das den folgenden Bedingungen genügt:*

a) *$f_M(A)$ ist eine auf D_{f^Z} für jedes feste $A \in R$ stetige Funktion;*

b) *$f_M(AB) = f_M(A)B(M)$ für alle $A \in R$, $B \in Z$;*

c) *$f(A) = \int f_M(A)\,d\mu_f(M)$ für alle $A \in R$,* (2)

wobei μ_f das dem Funktional f^Z entsprechende Maß auf $\mathfrak{M}$ ist.

Beweis. Es sei $A \in R$ und $0 \leqq A \leqq 1$. Wir definieren ein positives Funktional φ_A über Z, indem wir $\varphi_A(B) = f(AB)$, $B \in Z$, setzen. Dann ist $0 \leqq AB \leqq B$, also $0 \leqq f(AB) = \varphi_A(B) \leqq f(B)$ für $B \geqq 0$. Da das Funktional f zentral reduzibel ist, gibt es einen Operator $C_A \in Z$, für den

$$f(AB) = \varphi_A(B) = f^Z(C_A B) \tag{3}$$

gilt. Diese Definition von C_A läßt sich auf alle Operatoren $A \in R$ unter Beibehaltung der Beziehung (3) übertragen, da jeder Operator aus R eine Linearkombination der Operatoren $A\,(0 \leqq A \leqq 1)$ ist. Setzen wir

$$f_M(A) = C_A(M),$$

so ist

α) $f_M(A) = C_A(M)$ eine stetige Funktion von $M \in D_{f^Z}$;

β) für $A \in R$, $B \in Z$

$$f(AB) = f^Z(C_A B) = \int f_M(A)\,B(M)\,d\mu_f(M). \tag{4}$$

Aus (4) folgt insbesondere für $B = 1$ die Formel (2). Offenbar ist die Funktion $f_M(A)$ durch die Bedingungen α) und β) eindeutig auf D_{f^Z} definiert. Schließlich ist für $B, B_1 \in Z$

$$\begin{aligned} f(ABB_1) &= \int f_M(AB)\,B_1(M)\,d\mu_f(M) \\ &= \int f_M(A)\,B(M)\,B_1(M)\,d\mu_f(M), \end{aligned}$$

woraus sich, da die Funktion $B_1(M)$ beliebig ist,

$$f_M(AB) = f_M(A)\,B(M)$$

ergibt. Damit ist der Satz vollständig bewiesen.

Wir erwähnen noch, daß die Beziehung

$$f_M(1) = 1 \quad \text{für} \quad M \in D_{f^Z} \tag{5}$$

gilt. Setzen wir nämlich $A = 1$ in (4), so erhalten wir

$$f(B) = \int f_M(1)\,B(M)\,d\mu_f(M) = \int B(M)\,d\mu_f(M);$$

hieraus folgt (5), da $B(M)$ beliebig ist.

Das Funktional $f_M(A)$ heißt die *Ableitung des Funktionals $f(A)$ im Punkt M*, und die Formel (2) nennen wir die *Spektralzerlegung des Funktionals f.*

Wir wollen noch auf die folgenden Eigenschaften der Ableitungen eines Funktionals hinweisen; dabei soll der Terminus „fast alle" den Ausdruck „alle, mit Ausnahme einer Menge vom μ_f-Maß Null" ersetzen.

Theorem 2. *Ist f zentral reduzibel und sind fast alle Ableitungen f_M, $M \in D_{fz}$, unzerlegbare Funktionale, so ist f auch reduzibel.*

Beweis. Es sei $0 \leqq \varphi \leqq f$. Da f zentral reduzibel ist, existiert ein Operator $C \in Z$, $C \geqq 0$, derart, daß $\varphi^Z(B) = f^Z(CB)$ für $B \in Z$ ist; folglich ist φ ebenfalls zentral reduzibel. Es seien

$$f(A) = \int f_M(A)\, d\mu_f(M),$$

$$\varphi(A) = \int \varphi_M(A)\, d\mu_\varphi(M)$$

die Spektralzerlegungen der Funktionale f bzw. φ. Offenbar ist $D_{\varphi z} \subset D_{fz}$. Wir definieren $\varphi_M(A)$ auf ganz D_{fz}, indem wir $\varphi_M(A) = 0$ für $M \in D_{fz} - D_{\varphi z}$ setzen. Dann ist die Funktion $C(M)\varphi_M(A)$ für jedes feste $A \in R$ auf D_{fz} stetig. Die Menge $U = \{M : C(M) > 0,\ M \in D_{fz}\}$ ist nämlich in D_{fz} offen und wegen $d\mu_\varphi(M) = C(M)\, d\mu_f(M)$ in $D_{\varphi z}$ enthalten; also ist die Funktion $C(M)\varphi_M(A)$ stetig auf U; da sie jedoch in $D_{fz} - U$ verschwindet, ist sie auf ganz D_{fz} stetig.

Ist nun $A \in R$, $B \in Z$ und $A \geqq 0$, $B \geqq 0$, so gilt die Ungleichung $\varphi(AB) \leqq f(AB)$, d. h.

$$\int \varphi_M(A) B(M) C(M)\, d\mu_f(M) \leqq \int f_M(A) B(M)\, d\mu_f(M),$$

also

$$\varphi_M(A) C(M) \leqq f_M(A)$$

für alle $M \in D_{fz}$ und alle nichtnegativen $A \in R$. Da nach Voraussetzung fast alle f_M unzerlegbar sind, müssen fast alle $\varphi_M(A)C(M)$ Vielfache des Funktionals $f_M(A)$ sein:

$$\varphi_M(A) C(M) = \alpha(M) f_M(A) \quad \text{für fast alle} \quad M \in D_{fz}.$$

Nun gelten in allen Punkten $M \in D_{\varphi z}$ und insbesondere in allen Punkten $M \in D_{fz}$, für welche $C(M) > 0$ ist, die Beziehungen $\varphi_M(1) = 1$ und $f_M(1) = 1$. Daher ist fast überall auf D_{fz}

$$\alpha(M) = \alpha(M) f_M(1) = \varphi_M(1) C(M) = C(M),$$

so daß

$$\varphi(A) = \int C(M) \varphi_M(A)\, d\mu_f(M) = \int \alpha(M) f_M(A)\, d\mu_f(M)$$
$$= \int C(M) f_M(A)\, d\mu_f(M) = f(CA)$$

für alle $A \in R$ gilt. Dies bedeutet aber, daß f reduzibel ist.

3. Sätze über konvexe Mengen.

I. *Es sei E ein reeller* Banachscher *Raum, E' der konjugierte Raum, Q eine der Norm nach beschränkte schwach abgeschlossene Menge aus E' und $K(Q)$*

die schwach abgeschlossene konvexe Hülle von Q. Dann ist $K(Q)$ die Gesamtheit aller Funktionale der Gestalt

$$F(x) = \int_Q f(x)\, d\varrho(f),$$

wobei ϱ die nichtnegativen Maße auf Q durchläuft, die der Bedingung $\varrho(Q) = 1$ genügen.

Beweis. Wir setzen für $x \in E$ und $f \in Q$

$$\alpha_x(f) = f(x);$$

dann ist $\alpha_x(f)$ eine schwach stetige Funktion auf Q. Da Q beschränkt ist, gilt $|f| \leqq C$ für alle $f \in Q$. Also ist

$$|\alpha_x(f)| \leqq C|x|. \tag{1}$$

Diese Ungleichung besagt, daß die Zuordnung $x \to \alpha_x$ eine beschränkte lineare Abbildung des Raumes E in den Banachschen Raum $C^r(Q)$ aller reellen und auf Q stetigen Funktionen ist.

Jedem beschränkten linearen Funktional $\varphi(\alpha)$ über $C^r(Q)$ ordnen wir ein lineares Funktional

$$\varphi'(x) = \varphi(\alpha_x)$$

über E zu. Aus (1) ergibt sich, daß $\varphi'(x)$ beschränkt und somit $\varphi' \in E'$ ist. Durch Vergleich der schwachen Topologie von $C^r(Q)$ und E' folgt, daß die Zuordnung $\varphi \to \varphi'$ schwach stetig ist.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{P}$ die Gesamtheit aller linearen Funktionale $\varphi(\alpha)$ über $C^r(Q)$, die den Bedingungen $\varphi(\alpha) \geqq 0$ für $\alpha(f) \geqq 0$ und $\varphi(1) = 1$ genügen, und mit $\mathfrak{N}$ die Gesamtheit der Funktionale

$$\delta_{f_0}(\alpha) = \alpha(f_0), \quad f_0 \in Q,$$

über $C^r(Q)$, und wir wollen beweisen, daß $K(\mathfrak{N}) = \mathfrak{P}$ ist.

Offenbar ist $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{P}$; da $\mathfrak{P}$ eine in der schwachen Topologie abgeschlossene beschränkte konvexe Menge ist, gilt auch

$$K(\mathfrak{N}) \subset \mathfrak{P}.$$

Ferner ist $\mathfrak{P}$ bikompakt in der schwachen Topologie von $[C^r(Q)]'$ (vgl. § 3, Nr. 7, Satz III) und $K(\mathfrak{N})$ abgeschlossen, so daß also $K(\mathfrak{N})$ ebenfalls bikompakt ist. Setzen wir $K(\mathfrak{N}) \neq \mathfrak{P}$ voraus und ist $\varphi_0 \in \mathfrak{P}$, $\varphi_0 \notin K(\mathfrak{N})$, so existiert auf Grund von § 3, Nr. 9, Satz III, eine Funktion $\alpha_0(f) \in C^r(Q)$, die φ_0 von $K(\mathfrak{N})$ „trennt", d. h. für die

$$\max_{\varphi \in K(\mathfrak{N})} \varphi(\alpha_0) < \varphi_0(\alpha_0)$$

gilt. Insbesondere ist[1])

$$\max_{f \in Q} \alpha_0(f) = \sup_{f \in Q} \delta_f(\alpha_0) < \varphi_0(\alpha_0).$$

---

[1]) Der Wert $\max_{f \in Q} \alpha_0(f)$ wird auf Q erreicht, denn Q ist bikompakt (vgl. § 2, Nr. 7, Satz VII).

Diese Ungleichung ist jedoch unmöglich; denn setzen wir $c = \max_{f \in Q} \alpha_0(f)$, so haben wir $c \cdot 1 - \alpha_0(f) \geqq 0$ und demnach

$$c - \varphi_0(\alpha_0) = \varphi_0(c \cdot 1 - \alpha_0(f)) \geqq 0.$$

Also ist $K(\mathfrak{N}) = \mathfrak{P}$. Daher geht die Menge $\mathfrak{P}$ bei der Abbildung $\varphi \to \varphi'$ in die schwach abgeschlossene konvexe Hülle der Menge über, die alle Funktionale $\delta'_{f_0} = f_0 \in Q$ enthält, d. h. in $K(Q)$.

Andererseits läßt sich jedes Funktional $\varphi \in \mathfrak{P}$ in der Form

$$\varphi(\alpha) = \int_Q \alpha(f)\, d\varrho(f)$$

darstellen, wobei $\varrho(f)$ ein geeignetes nichtnegatives Maß auf Q ist. Setzen wir hier $\alpha = \alpha_x$ und $\varphi(\alpha_x) = F(x)$, so erhalten wir

$$F(x) = \int_Q f(x)\, d\varrho(f)$$

für jedes $F \in K(Q)$.

II. *Es sei $\mathfrak{K}$ eine der Norm nach beschränkte schwach abgeschlossene konvexe Menge aus E', $\mathfrak{N}$ die Menge ihrer Extremalpunkte und $\overline{\mathfrak{N}}$ die abgeschlossene Hülle von $\mathfrak{N}$ in der schwachen Topologie. Dann läßt sich jedes Funktional $F \in \mathfrak{K}$ in der Form*

$$F(x) = \int_{\overline{\mathfrak{N}}} f(x)\, d\varrho(f) \tag{2}$$

schreiben, wobei ϱ ein nichtnegatives Maß auf $\overline{\mathfrak{N}}$ mit $\varrho(\overline{\mathfrak{N}}) = 1$ ist.

Beweis. Auf Grund des Krein-Milmanschen Satzes (vgl. § 3, Nr. 9) ist $K(\overline{\mathfrak{N}}) = \mathfrak{K}$; es genügt somit, den Satz I auf die Menge $\overline{\mathfrak{N}}$ statt auf Q anzuwenden.

Bemerkung. Es kann ein und derselbe Raum zu verschiedenen Räumen E konjugiert sein; das Maß ϱ in Formel (2) hängt dann von der Wahl des Raumes E ab.

4. Die Zerlegung reduzibler Funktionale. Wir bezeichnen mit R^H die Gesamtheit aller hermiteschen Operatoren $A \in R$; dann ist R^H ein reeller Banachscher Raum. Ist ferner $(R^H)'$ der zu R^H konjugierte Raum, P die Gesamtheit der normierten (d. h. der Bedingung $f(1) = 1$ genügenden) positiven Funktionale f über R und $\mathfrak{N}$ die Gesamtheit aller unzerlegbaren normierten positiven Funktionale über R, so ist P und demzufolge auch $\mathfrak{N}$ Teilmenge von $(R^H)'$, wobei P konvex und bikompakt in der schwachen Topologie von $(R^H)'$ und $\mathfrak{N}$ die Gesamtheit aller Extremalpunkte von P ist (vgl. § 19, Nr. 3 und 4).

Wenden wir den Satz II aus Nr. 3 auf $\overline{\mathfrak{N}}$ und P an, so gelangen wir zu dem folgenden Ergebnis.

I. *Jedes positive Funktional F über R läßt sich in der Gestalt*

$$F(A) = \int_{\overline{\mathfrak{N}}} f(A)\, d\mu_F(f) \tag{1}$$

darstellen, wobei μ_F ein nichtnegatives Maß auf $\overline{\mathfrak{N}}$ mit $\mu_F(\overline{\mathfrak{N}}) = F(1)$ ist.

Für ein festes $A \in R$ ist die Funktion $x_A = x_A(f) = f(A)$ in der schwachen Topologie von $\overline{\mathfrak{N}}$ stetig. Ist also $p(x)$ ein beliebiges positives Funktional über $C(\overline{\mathfrak{N}})$, so erhalten wir, wenn wir

$$p'(A) = p(x_A) \tag{2}$$

setzen, ein positives Funktional p' über R. Umgekehrt läßt sich jedes positive Funktional $F(A)$ über R in der Form (1) darstellen, und setzen wir

$$p(x) = \int_{\overline{\mathfrak{N}}} x(f)\, d\mu_F(f),$$

so erhalten wir ein positives Funktional $p(x)$ über $C(\overline{\mathfrak{N}})$, für welches $p' = F$ ist. Folglich gilt der Satz[1]):

II. *Zu jedem positiven Funktional F über R existiert ein positives Funktional p über $C(\overline{\mathfrak{N}})$ mit der Eigenschaft $p' = F$.*

Im folgenden wollen wir mit p stets ein festes positives Funktional über $C(\overline{\mathfrak{N}})$ und mit $F = p'$ das ihm auf Grund der Formel (2) entsprechende Funktional über R bezeichnen. Wir nehmen dabei an, daß F reduzibel ist.

III. *Gehört A zu R und B zu Z, so ist*

$$x_{AB}(f) = x_A(f)\, x_B(f) \tag{3}$$

für alle $f \in \overline{\mathfrak{N}}$.

Beweis. Das Funktional $\varphi_B(A) = f(AB)$ ist dem Funktional $f(A)$ untergeordnet (vgl. § 19, Nr. 2) und daher für $f \in \mathfrak{N}$ ein Vielfaches von f:

$$f(AB) = \alpha f(A)$$

(vgl. § 19, Nr. 3). Setzen wir hier $A = 1$, so folgt $\alpha = f(B)$, und wir erhalten $f(AB) = f(B)f(A)$. Die Formel (3) gilt also für $f \in \mathfrak{N}$. Da $\mathfrak{N}$ in $\overline{\mathfrak{N}}$ dicht ist und die linke und die rechte Seite von (3) stetige Funktionen von f sind, gilt (3) auch in ganz $\overline{\mathfrak{N}}$.

Es sei nun $x \in C(\overline{\mathfrak{N}})$, und wir bezeichnen mit p_x das durch die Formel $p_x(y) = p(xy)$ für alle $y \in C(\overline{\mathfrak{N}})$ definierte Funktional.

IV. *Für jede Funktion $x \in C(\overline{\mathfrak{N}})$ existiert ein Operator $B = B_x \in Z$ derart, daß*

$$(p_x)' = (p_y)' \quad \textit{für} \quad y = x_B \tag{4}$$

ist, wobei B_x für $x \geqq 0$ nichtnegativ ist.

Beweis. Für $x \in C(\overline{\mathfrak{N}})$ und $0 \leqq x(f) \leqq 1$ ist $0 \leqq p_x \leqq p$ und $0 \leqq (p_x)' \leqq p'$. Da das Funktional p' reduzibel ist, existiert ein nichtnegativer Operator $B \in Z$ mit der Eigenschaft

$$(p_x)'(A) = p'(BA). \tag{5}$$

[1]) Wir weisen darauf hin, daß es sich hier nicht um eine beliebige, sondern um eine spezielle Fortsetzung des positiven Funktionals F handelt.

Diese Definition des Operators B läßt sich offenbar mit Hilfe von (5) linear auf alle Funktionen $x \in C(\mathfrak{R})$ ausdehnen. Setzen wir $y = x_B$, so erhalten wir aus Satz III

$$(p_x)'(A) = p'(AB) = p(x_{AB}) = p(x_A x_B) = p(x_A y) = p_y(x_A) = (p_y)'(A).$$

Wir setzen nun $x' = x_B$ für $B = B_x$ und bezeichnen mit $C'(\mathfrak{R})$ die Gesamtheit aller Funktionen x' für alle möglichen $x \in C(\mathfrak{R})$.

V. *Es gelten die Beziehungen*

$$\begin{aligned} p(x) &= p(x'), \\ p_{y'}(x x_A) &= p_{y'}(x' x_A) \end{aligned} \tag{6}$$

für alle $A \in R$, $x \in C(\mathfrak{R})$ *und* $y' \in C'(\mathfrak{R})$.

Beweis. Formel (4) bedeutet, daß

$$p_x(x_A) = p_{x'}(x_A) \tag{7}$$

ist. Insbesondere erhalten wir für $A = 1$ die Beziehung $p_x(1) = p_{x'}(1)$ und infolgedessen

$$p(x) = p_x(1) = p_{x'}(1) = p(x').$$

Ferner ist auf Grund von (7)

$$p(x x_A) = p(x' x_A),$$

so daß sich für $y' = x_C$, $C \in Z$,

$$\begin{aligned} p_{y'}(x x_A) &= p(x y' x_A) = p(x x_C x_A) = p(x x_{CA}) = p(x' x_{CA}) \\ &= p(x' x_C x_A) = p(x' y' x_A) = p_{y'}(x' x_A) \end{aligned}$$

ergibt.

Es sei nun $f_0 \in D_p$, wobei D_p der Träger des Funktionals p in $\mathfrak{R}$ ist. Für jede offene Menge U, die f_0 enthält, wählen wir eine nichtnegative Funktion $x_U \in C(\mathfrak{R})$, die außerhalb U gleich Null ist und der Bedingung

$$\int x_U(f)\, d\mu_p(f) = 1$$

genügt.

Wir betrachten nun eine geordnete fallende Menge $\{U\}$ von Umgebungen, die eine Basis von Umgebungen des Punktes f_0 bilden. Dann konvergiert die geordnete Menge der Funktionale p_{x_U} schwach gegen das Funktional $\delta_{f_0}(x) = x(f_0)$, den Wert der Funktion $x(f)$ im Punkt f_0. Nun entspricht jeder Funktion x_U ein nichtnegativer Operator $B_U = B_{x_U} \in Z$ und eine Funktion $x'_U = x_{B_U} \geqq 0$. Auf Grund der Gleichung

$$|p_{x'_U}| = p(x'_U) = p(x_U) = \int x_U(f)\, d\mu_p(f) = 1$$

ist die Menge der Funktionale $p_{x'_U}$ der Norm nach beschränkt. Daher existiert ein Teilnetz[1]) $\{V\}$ der Menge $\{U\}$, für welches $p_{x'_V}$ schwach gegen ein positives Funktional q über $C(\mathfrak{R})$ konvergiert.

---

[1]) Vgl. Anhang II, S. 529.

VI. *Es gelten die Beziehungen*

$$(\delta_{f_0})' = q',$$
$$q(x x_A) = q(x' x_A)$$

für alle $x \in C(\overline{\mathfrak{R}})$ *und alle* $A \in R$.

Beweis. Infolge (7) gilt

$$\delta'_{f_0}(A) = \delta_{f_0}(x_A) = \lim_{V \to f_0} p_{x_V}(x_A) = \lim_{V \to f_0} p_{x'_V}(x_A)$$
$$= q(x_A) = q'(A).$$

Setzen wir hier $A = 1$, so erhalten wir $q(1) = 1$.

Ferner gilt auf Grund von (6) für $x \in C(\overline{\mathfrak{R}})$ und $A \in R$

$$q(x x_A) = \lim_{V \to f_0} p_{x'_V}(x x_A) = \lim_{V \to f_0} p_{x'_V}(x' x_A) = q(x' x_A).$$

VII. *Es ist* $q = \delta_{f_0}$.

Beweis. Es sei $x \in C(\overline{\mathfrak{R}})$ und $A \in R$. Auf Grund von Satz VI ist dann für $B = B_x$

$$q(x x_A) = q(x_B x_A) = q(x_{BA}) = q'(BA) = \delta'_{f_0}(BA)$$
$$= \delta_{f_0}(x_{BA}) = \delta_{f_0}(x_B x_A) = \delta_{f_0}(x_B)\, \delta_{f_0}(x_A).$$

Setzen wir hier $A = 1$, so erhalten wir $q(x) = \delta_{f_0}(x_B)$ und folglich

$$q(x x_A) = q(x)\, \delta_{f_0}(x_A).$$

Insbesondere ist für $x = 1$

$$q(x_A) = \delta_{f_0}(x_A).$$

Dann ist aber für $A_1, A_2, \ldots, A_n \in R$

$$q(x_{A_1} x_{A_2} \cdots x_{A_n}) = q(x_{A_1} \cdots x_{A_{n-1}})\, \delta_{f_0}(x_{A_n})$$
$$= q(x_{A_1} \cdots x_{A_{n-2}})\, \delta_{f_0}(x_{A_{n-1}})\, \delta_{f_0}(x_{A_n})$$
$$= \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$= \delta_{f_0}(x_{A_1})\, \delta_{f_0}(x_{A_2}) \cdots \delta_{f_0}(x_{A_n})$$
$$= \delta_{f_0}(x_{A_1} x_{A_2} \cdots x_{A_n}),$$

so daß $q(x)$ auf der minimalen BANACHschen Teilalgebra $\mathfrak{A}$ von $C(\overline{\mathfrak{R}})$, die alle Funktionen x_A, $A \in R$, enthält, gleich $\delta_{f_0}(x)$ ist. Diese Teilalgebra ist vollsymmetrisch, denn es ist $x_{A^*} = \bar{x}_A$. Außerdem trennt sie die Punkte von $\overline{\mathfrak{R}}$. Ist nämlich $f_1, f_2 \in \overline{\mathfrak{R}}$ und $f_1 \neq f_2$, so existiert ein Operator A, für den $f_1(A) \neq f_2(A)$, also $x_A(f_1) \neq x_A(f_2)$ gilt. Auf Grund des STONEschen Satzes (vgl. § 2, Nr. 10) ist dann $\mathfrak{A} = C(\overline{\mathfrak{R}})$ und $q(x) = \delta_{f_0}(x)$ auf ganz $C(\overline{\mathfrak{R}})$.

VIII. *Für jede Funktion* $x \in C(\overline{\mathfrak{R}})$ *existiert ein Operator* $B \in Z$ *mit der Eigenschaft* $x_B = x$ *auf* D_p.

Beweis. Es sei $f_0 \in D_p$. Auf Grund der Sätze VI und VII ist

$$\delta_{f_0}(xx_A) = \delta_{f_0}(x_B x_A)$$

für $B = B_x$. Setzen wir hier $A = 1$, so erhalten wir $\delta_{f_0}(x) = \delta_{f_0}(x_B)$ und somit $x(f_0) = x_B(f_0)$. Damit ist Satz VIII bewiesen.

Es sei nun wieder f^Z die Einschränkung des Funktionals $f \in \mathfrak{N}$ auf Z. Infolge Satz III ist

$$f^Z(B_1B_2) = f^Z(B_1)f^Z(B_2) \quad \text{für alle} \quad B_1, B_2 \in Z;$$

folglich definiert das Funktional f^Z einen Homomorphismus der Algebra Z in den Körper der komplexen Zahlen und infolgedessen ein maximales Ideal M von Z, wobei

$$f^Z(B) = B(M) \tag{8}$$

ist. Wir erhalten so eine Abbildung $f \to M$ des Raumes $\mathfrak{N}$ in $\mathfrak{M}$. Diese Abbildung ist stetig, wie aus einem Vergleich der Umgebungen in $\mathfrak{N}$ und $\mathfrak{M}$ unmittelbar folgt.

IX. *Die Zuordnung $f \to M$ bildet D_p homöomorph auf eine abgeschlossene Teilmenge $\mathfrak{D}_p$ des Raumes $\mathfrak{M}$ ab.*

Beweis. Es sei $f_1 \neq f_2$ mit $f_1, f_2 \in D_p$. Dann existiert eine Funktion $x \in C(\mathfrak{N})$ mit der Eigenschaft $x(f_1) \neq x(f_2)$. Wir wählen ein $B \in Z$ derart, daß $x = x_B$ auf D_p ist. Dann ist $x_B(f_1) \neq x_B(f_2)$, also $f_1(B) \neq f_2(B)$ oder $B(M_1) \neq B(M_2)$. Folglich ist $M_1 \neq M_2$ und die Abbildung $f \to M$ eineindeutig auf D_p. Dann ist aber diese Abbildung eine Homöomorphie des bikompakten Raumes D_p auf einen bikompakten Raum $\mathfrak{D}_p \subset \mathfrak{M}$.

Wir bezeichnen nun mit Φ die Gesamtheit der über $C(\mathfrak{N})$ positiven Funktionale, deren Träger in D_p enthalten ist. Jedes Funktional aus Φ definiert ein Maß auf $\mathfrak{N}$; die Gesamtheit dieser den Funktionalen aus Φ entsprechenden Maße wollen wir ebenfalls mit Φ bezeichnen. Ferner sei $\tilde{\Phi}$ die Gesamtheit der über $C(\mathfrak{M})$ positiven Funktionale, deren Träger in $\mathfrak{D}_p$ enthalten ist; die Gesamtheit aller diesen Funktionalen entsprechenden Maße auf $\mathfrak{M}$ soll wieder mit $\tilde{\Phi}$ bezeichnet werden.

Die Abbildung $f \to M$ stellt eine Zuordnung $\mu \to \tilde{\mu}$ zwischen den Maßen $\mu \in \Phi$ und den Maßen $\tilde{\mu} \in \tilde{\Phi}$, also eine Zuordnung $\varphi \to \tilde{\varphi}$ zwischen den Funktionalen $\varphi \in \Phi$ und $\tilde{\varphi} \in \tilde{\Phi}$ her. Diese Zuordnung läßt sich durch die Formel

$$\mu(\Delta) = \mu(\Delta \cap D_p) = \tilde{\mu}((\Delta \cap D_p)')$$

ausdrücken, wobei $(\Delta \cap D_p)'$ das Bild der Menge $\Delta \cap D_p$ bei der Abbildung $f \to M$ ist.

X. *Die Zuordnung $\varphi \to \tilde{\varphi}$ besitzt folgende Eigenschaften:*

a) $\tilde{\varphi} = \varphi'^Z$ *für alle* $\varphi \in \Phi$, *insbesondere* $\tilde{p} = p'^Z$;

b) *die Beziehung* $\varphi_1 \leq \varphi_2$ *ist der Ungleichung* $\tilde{\varphi}_1 \leq \tilde{\varphi}_2$ *gleichwertig*;

c) $\mathfrak{D}_p$ *ist der Träger des Funktionals* p'^Z.

Beweis. Für jeden Operator $B \in Z$ gilt

$$\tilde{\varphi}(B) = \int_{\mathfrak{D}_p} B(M)\, d\tilde{\mu}(M) = \int_{D_p} f(B)\, d\mu(f) = \int_{D_p} x_B(f)\, d\mu(f)$$
$$= \varphi(x_B) = \varphi'(B),$$

also $\tilde{\varphi} = \varphi'^Z$; insbesondere ist $\tilde{p} = p'^Z$, so daß $\mathfrak{D}_p$ der Träger des Funktionals p'^Z ist. Die Behauptung b) ist sofort ersichtlich.

XI. *Das Funktional p' ist zentral reduzibel.*

Beweis. Es sei ψ ein dem Funktional p'^Z untergeordnetes Funktional über Z. Dann ist der Träger des Funktionals ψ in $\mathfrak{D}_p$ enthalten, also ist $\psi \in \tilde{\Phi}$. In diesem Fall existiert aber ein Funktional $\varphi \in \Phi$, für das $\psi = \tilde{\varphi}$ ist. Aus den Beziehungen $\tilde{\varphi} = \psi \leqq p'^Z = \tilde{p}$ folgt $\varphi \leqq p$ und infolgedessen $\varphi' \leqq p'$. Da nach Voraussetzung p' reduzibel ist, existiert ein Operator $B \in Z$ mit der Eigenschaft $\varphi'(A) = p'(AB)$ für alle $A \in R$. Dann ist für jedes $C \in Z$

$$\psi(C) = \tilde{\varphi}(C) = \varphi'^Z(C) = \varphi'(C) = p'^Z(BC);$$

also ist p' zentral reduzibel. Damit ist Satz XI bewiesen.

Wir wenden jetzt die eben konstruierte Abbildung $f \to M$ auf die Formel

$$p'(A) = p(x_A) = \int_{D_p} x_A(f)\, d\mu_p(f) = \int_{D_p} f(A)\, d\mu_p(f) \tag{9}$$

an. Auf Grund von $p'^Z = \tilde{p}$ geht bei dieser Abbildung das Maß μ_p mit dem Träger D_p in das Maß $\mu_{\tilde{p}} = \mu_{p'}$ mit dem Träger $\mathfrak{D}_p$ über. Daher läßt sich (9) in der Gestalt

$$p'(A) = \int_{\mathfrak{D}_p} \tilde{f}_M(A)\, d\mu_{p'}(M) \tag{10}$$

schreiben, wenn wir mit f_M das dem Ideal $M \in \mathfrak{D}_p$ bei der Abbildung $f \to M$ entsprechende Funktional f über D_p bezeichnen. Nun ist aber wegen (3) und (8) für $A \in R$ und $B \in Z$

$$\tilde{f}_M(AB) = \tilde{f}_M(A)\tilde{f}_M(B) = \tilde{f}_M(A)B(M),$$

so daß (10) allen Bedingungen aus Theorem 1 von Nr. 2 genügt. Auf Grund der Eindeutigkeit der Zerlegung (2) in diesem Satz müssen die Formeln (2), Nr. 2, und (10) für $f = p'$ übereinstimmen; insbesondere müssen die Beziehungen $f_M(A) = \tilde{f}_M(A)$ und $D_{p'^Z} = \mathfrak{D}_p$ gelten und die Ableitungen $f_M(A)$ in $D_p \subset \overline{\mathfrak{N}}$ enthalten sein.

Somit erhalten wir den folgenden Satz:

Theorem 3. *Jedes reduzible positive Funktional f über R ist auch zentral reduzibel, und seine Ableitungen sind in $\overline{\mathfrak{N}}$ enthalten. Dabei existiert auf $C(\overline{\mathfrak{N}})$ genau ein positives Funktional p, das der Bedingung $p' = f$ genügt.*

5. Ein Satz über die Erweiterung des Integrals. Es sei T ein bikompakter Raum, $B^r(T)$ die Gesamtheit aller beschränkten reellen Funktionen $x = x(t)$

auf T, $C^r(T)$ die Gesamtheit aller stetigen reellen Funktionen $y = y(t)$ auf T und $I = I(y)$ ein Integral auf $C^r(T)$. Wir setzen

$$I^*(x) = \inf_{x \leqq y \in C^r(T)} I(y).$$

Man sieht leicht, daß $I^*(x)$ *ein konvexes Funktional über* $B^r(T)$ *ist.*

I. *Für jede Funktion* $x_0 \in B^r(T)$ *und jede reelle Zahl* c, *die den Ungleichungen*

$$-I^*(-x_0) \leqq c \leqq I^*(x_0)$$

genügen, existiert ein positives Funktional $\tilde{I}(x)$ *über* $B^r(T)$, *das eine Erweiterung des Integrals* $I(x)$ *ist, und zwar so, daß* $\tilde{I}(x_0) = c$ *gilt.*

Beweis. Wenden wir den HAHN-BANACHschen Satz (vgl. § 1, Nr. 9) auf das konvexe Funktional $I^*(x)$ an, so sehen wir, daß ein lineares Funktional $\tilde{I}(x)$ über $B^r(T)$ existiert, das den Bedingungen

$$\tilde{I}(x) \leqq I^*(x) \quad \text{für alle} \quad x \in B^r(T),$$

$$\tilde{I}(x_0) = c$$

genügt. Für $x \in C^r(T)$ erhalten wir

$$I^*(x) = -I^*(-x) = I(x),$$

also $\tilde{I}(x) = I(x)$, so daß $\tilde{I}(x)$ eine Erweiterung des Funktionals $I(x)$ ist. Ferner ist für $y \in B^r(T)$ und $y \geqq 0$

$$I^*(-y) = \inf_{-y \leqq x \in C^r(T)} I(x) \leqq I(0) = 0$$

und demzufolge $\tilde{I}(y) \geqq -I^*(-y) \geqq 0$. Somit ist $\tilde{I}$ ein positives Funktional über $B^r(T)$.

II. *Es sei* μ *das durch das Integral* $I(x)$ *definierte Maß. Genügt die Funktion* $x \in B^r(T)$ *der Bedingung* $I^*(x) = -I^*(-x)$, *so ist sie* μ-*summierbar, also* μ-*meßbar, und es ist* $I(x) = I^*(x)$.

Beweis. Aus der Definition der Zahlen $I^*(x)$ und $-I^*(-x)$ folgt, daß eine nichtwachsende Folge $y_n \in C^r(T)$ und eine nichtfallende Folge $z_n \in C^r(T)$ existieren, für die

$$\lim z_n \leqq x \leqq \lim y_n$$

und

$$I(\lim z_n) = \lim I(z_n) = -I^*(-x) = I^*(x) = \lim I(y_n) = I(\lim y_n)$$

gilt. Somit stimmt x fast überall bezüglich μ mit den μ-meßbaren Funktionen $\lim z_n$ und $\lim y_n$ überein und ist demzufolge selbst μ-meßbar.

6. Die Ableitungen reduzibler positiver Funktionale.

I. *Ist ein positives Funktional* f *über* R *nicht unzerlegbar, so existiert mindestens ein positives Funktional* p *über* $C(\overline{\mathfrak{R}})$, *das der Bedingung* $p' = f$ *genügt und dessen Träger mindestens zwei Punkte enthält.*

Beweis. Es sei f nicht unzerlegbar. Dann gibt es ein Funktional φ_1, das den Bedingungen

$$\varphi_1 \leqq f, \ \varphi_1 \neq \alpha f \tag{1}$$

genügt. Wir setzen $\varphi_2 = f - \varphi_1$ und wählen zwei positive Funktionale p_1, p_2 über $C(\overline{\mathfrak{R}})$ mit der Eigenschaft $p_1' = \varphi_1$, $p_2' = \varphi_2$. Für $p = p_1 + p_2$ ist $p' = f$. Um zu zeigen, daß p die verlangten Eigenschaften besitzt, nehmen wir an, daß D_p nur aus einem Punkt f_0 besteht. Dann ist

$$p(x) = \int\limits_{D_p} f(x)\, d\mu_p(f) = c f_0(x) = c\,\delta_{f_0}(x)$$

mit $c = \mu_p(\{f_0\})$. Nun ist aber $p_1 \leqq p$, also $D_{p_1} \subset D_p$ und $D_{p_1} = \{f_0\}$. Hieraus können wir schließen, daß auch $p_1 = c_1 \delta_{f_0}$ und daher $p_1 = \alpha p$ ist. Dann ist jedoch $\varphi_1 = p_1' = \alpha p' = \alpha f$, was der zweiten Bedingung (1) widerspricht. Damit ist Satz I bewiesen.

Wir ordnen nun jedem Funktional $f \in \overline{\mathfrak{R}}$ ein positives Funktional $f^\wedge$ aus $C(\overline{\mathfrak{R}})$ folgendermaßen zu: Für $f \in \mathfrak{R}$ setzen wir $f^\wedge = \delta_f$; ist jedoch $f \in \overline{\mathfrak{R}} - \mathfrak{R}$, so sei $f^\wedge$ ein normiertes positives Funktional über $C(\overline{\mathfrak{R}})$, dessen Träger mindestens zwei verschiedene Punkte enthält und das der Bedingung $f^{\wedge\prime} = f$ genügt.

Wir bezeichnen mit $B^r(\overline{\mathfrak{R}})$ [bzw. $B(\overline{\mathfrak{R}})$] den Banachschen Raum aller beschränkten reellen (bzw. komplexen) Funktionen $x(f)$ auf $\overline{\mathfrak{R}}$ mit der Norm $|x| = \sup |x(f)|$ und mit $C^r(\mathfrak{R})$ die Gesamtheit aller stetigen reellen Funktionen auf $\mathfrak{R}$. Für jede Funktion $x(f) \in C^r(\mathfrak{R})$ definieren wir eine Funktion $x^\wedge(f)$ auf $\overline{\mathfrak{R}}$ durch die Formel

$$x^\wedge(f) = f^\wedge(x).$$

Da

$$|x^\wedge(f)| = |f^\wedge(x)| \leqq f^\wedge(1)\,|x| = |x|$$

ist, gehört $x^\wedge$ zu $B^r(\overline{\mathfrak{R}})$, und die Zuordnung $x \to x^\wedge$ ist eine beschränkte lineare Abbildung. Offenbar führt sie nichtnegative Funktionen in nichtnegative Funktionen über.

Außerdem gilt

$$x_A^\wedge(f) = f^\wedge(x_A) = f^{\wedge\prime}(A) = f(A) = x_A(f),$$

so daß

$$x_A^\wedge(f) = x_A(f) \quad \text{für alle} \quad f \in \overline{\mathfrak{R}} \tag{2}$$

ist.

Es sei nun F ein festes reduzibles Funktional über R und p ein positives Funktional über $C(\overline{\mathfrak{R}})$, das der Bedingung $p' = F$ genügt.

II. *Gehört x_0 zu $C^r(\overline{\mathfrak{R}})$, so ist $x_0^\wedge$ eine μ_p-meßbare Funktion, und es gilt $p(x_0^\wedge) = p(x_0)$.*

Beweis. Das Funktional $p(x)$ ist ein Integral auf $C(\overline{\mathfrak{R}})$; nach Satz I aus Nr. 5 läßt es sich zu einem Integral $\tilde{p}(x)$ auf $B^r(\overline{\mathfrak{R}})$ mit der Eigenschaft $\tilde{p}(x_0^\wedge) = p^*(x_0^\wedge)$ erweitern. Ist $q(x)$ ein positives Funktional über $C(\overline{\mathfrak{R}})$, das für

alle $x, \ y \in C^r(\mathfrak{N})$ durch die Formel $q(x+iy) = \tilde{p}(x^\wedge) + i\tilde{p}(y^\wedge)$ definiert wird, so gilt wegen (2) für einen hermiteschen Operator $A \in R$

$$q(x_A) = \tilde{p}(x_A^\wedge) = \tilde{p}(x_A) = p(x_A) = F(A),$$

so daß $q' = p' = F$ ist. Da nur ein positives Funktional p über $C(\mathfrak{N})$ existiert, für welches $p' = F$ ist (vgl. Nr. 4, Theorem 3), ist $q = p$ und insbesondere $p^*(x_0^\wedge) = q(x_0) = p(x_0)$.

Analog ist $p^*(-x_0^\wedge) = p(-x_0)$; infolgedessen gilt

$$-p^*(-x_0^\wedge) = p(x_0) = p^*(x_0^\wedge).$$

Auf Grund von Nr. 5, Satz II, folgt hieraus, daß $x_0^\wedge$ eine μ_p-meßbare Funktion ist und $p(x_0^\wedge) = p(x_0)$ gilt.

Es sei nun $x(f)$ ein Element aus $B(\mathfrak{N})$. Da $f^\wedge(x)$ ein Integral auf $C(\mathfrak{N})$ ist, hat $f^\wedge(x)$ nur für diejenigen $f \in \mathfrak{N}$ einen Sinn, für die $x(f)$ zu $L^1(f^\wedge)$ gehört; für diese f setzen wir $x^\wedge(f) = f^\wedge(x)$.

III. *Es sei $x(f)$ eine beschränkte reelle μ_p-meßbare Funktion auf $\mathfrak{N}$. Dann ist*

a) *die Funktion $x(f)$ auch $\mu_{f^\wedge}$-meßbar, eventuell mit Ausnahme von Funktionalen $f^\wedge$, für die die entsprechenden Funktionale f eine Menge vom μ_p-Maß Null bilden;*

b) *die Funktion $x^\wedge(f) = f^\wedge(x)$ ebenfalls μ_p-meßbar, und es gilt $p(x^\wedge) = p(x)$.*

Beweis. Offenbar genügt es zu zeigen, daß diese Behauptungen für nichtnegative Funktionen gelten.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{L}$ die Gesamtheit aller nichtnegativen Funktionen aus $B(\mathfrak{N}) \cap L^1(p)$, für die die Behauptungen a) und b) gelten, und müssen dann zeigen, daß $\mathfrak{L}$ aus allen nichtnegativen Funktionen aus $B(\mathfrak{N}) \cap L^1(p)$ besteht. Den Beweis führen wir in mehreren Schritten.

1. *Gehört x_n zu $\mathfrak{L}$ und ist $x_n(f) \searrow x(f)$ oder $x_n(f) \nearrow x(f) \leq C$, so gehört auch x zu $\mathfrak{L}$.*

Es sei zunächst $x_n(f) \searrow x(f)$. Auf Grund von a) und § 6, Nr. 7, Satz VIII, ist dann $x \in L^1(f^\wedge)$ und $f^\wedge(x_n) \searrow f^\wedge(x)$, also $x_n^\wedge(f) \searrow x^\wedge(f)$ für $f \in \mathfrak{N} - N_p$, wobei $\mu_p(N_p) = 0$ ist. Dann gehört aber $x^\wedge(f)$ wegen b) zu $L^1(p)$, und es ist $p(x_n) = p(x_n^\wedge) \searrow p(x^\wedge)$. Andererseits gilt $p(x_n) \searrow p(x)$, also $p(x^\wedge) = p(x)$.

Analog wird der Fall $x_n(f) \nearrow x(f) \leq C$ untersucht.

2. *Gelten die Ungleichungen*

$$z(f) \leq x(f) \leq y(f) \ \text{für alle} \ f \in \mathfrak{N} \tag{3}$$

mit $z, y \in \mathfrak{L}$, und ist $p(z) = p(y)$, so gehört x zu $\mathfrak{L}$.

In diesem Fall ist nämlich $z^\wedge \leq y^\wedge$ und $p(z) = p(z^\wedge) \leq p(y^\wedge) = p(y) = p(z)$, also $p(z^\wedge) = p(y^\wedge)$ und $y^\wedge(f) = z^\wedge(f)$ auf $\mathfrak{N} - N_p$, wobei $\mu_p(N_p) = 0$ ist. Dies bedeutet, daß $f_0^\wedge(y) = f_0^\wedge(z)$ für $f_0 \in \mathfrak{N} - N_p$ gilt und daher $y = z$ auf $\mathfrak{N} - N_{f_0^\wedge}$ mit $\mu_{f_0^\wedge}(N_{f_0^\wedge}) = 0$ ist. Hieraus und aus (3) können wir schließen, daß x zu $L^1(f_0)$ gehört und $f_0^\wedge(z) \leq f_0^\wedge(x) \leq f_0^\wedge(y)$, also $z^\wedge(f_0) \leq x^\wedge(f_0) \leq y^\wedge(f_0) = z^\wedge(f_0)$ für $f_0 \in \mathfrak{N} - N_p$ ist. Also folgt $x^\wedge \in L^1(p)$ und $p(x^\wedge) = p(z^\wedge) = p(z) = p(x)$.

3. $\mathfrak{L} \supset M^+(\overline{\mathfrak{R}}) \cap B(\overline{\mathfrak{R}})$ (vgl. § 6, Nr. 3, Seite 129).

Es sei $x \in M^+(\overline{\mathfrak{R}}) \cap B(\overline{\mathfrak{R}})$; dann existieren nichtnegative $y_n \in C(\overline{\mathfrak{R}})$ mit den Eigenschaften $y_n \nearrow y \leqq x$ und $p(y_n) \nearrow p(x)$. Infolge von Satz II gehört y_n zu $\mathfrak{L}$, so daß wegen Aussage 1 auch $y \in L$ ist. Dann erhalten wir mit den gleichen Überlegungen wie im Beweis der Behauptung 2, daß x ebenfalls zu $\mathfrak{L}$ gehört.

4. $\mathfrak{L} \supset N^+(\overline{\mathfrak{R}}) \cap B(\overline{\mathfrak{R}})$.

Gehört x zu $N^+(\overline{\mathfrak{R}}) \cap B(\overline{\mathfrak{R}})$, so gibt es in $M^+(\overline{\mathfrak{R}}) \cap B(\overline{\mathfrak{R}})$ solche y_n, daß $y_n \searrow y \geqq x$ und $p(y_n) \searrow p(x)$ ist; wenden wir nun die Behauptung 3 an und schließen wir ferner wie in den Beweisen der Aussagen 2 und 3, so gelangen wir wieder zu dem Ergebnis $x \in \mathfrak{L}$.

Kombinieren wir jetzt die Behauptungen 1 bis 4 mit Satz XI aus § 6, Nr. 7, so können wir uns von der Gültigkeit des Satzes III überzeugen.

IV. *Jede beschränkte μ_p-meßbare Funktion $y(f)$ stimmt mit $y^\wedge(f)$ überein, eventuell mit Ausnahme einer Menge von Punkten f vom μ_p-Maß Null.*

Beweis. Es sei $B \in Z$, $B \geqq 0$. Dann ist $F_B(A) = F(AB)$ ein reduzibles Funktional. Ferner sei $x(f) \in C(\overline{\mathfrak{R}})$ und $x(f) \geqq 0$. Auf Grund von Nr. 4, Satz IV, existiert ein Operator $B = B_x \in Z$ derart, daß $(p_x)' = (p_y)' = F_B$ für $y = x_B$ ist. Daher läßt sich Satz III auf F_B statt F und p_x statt p anwenden. Insbesondere ist für jede beschränkte μ_p-meßbare Funktion $y(f)$

$$p_x(y) = p_x(y^\wedge),$$

d. h.

$$\int x(f)\, y(f)\, d\mu_p(f) = \int x(f)\, y^\wedge(f)\, d\mu_p(f).$$

Da die nichtnegative Funktion $x(f) \in C(\overline{\mathfrak{R}})$ beliebig ist, ergibt sich hieraus die Behauptung.

V. *Für jede μ_p-meßbare Menge $F \subset \overline{\mathfrak{R}}$ gilt*

$$\mu_p[F - \{f : D_{f^\wedge} \subset F\}] = 0. \tag{4}$$

Beweis. Da die charakteristische Funktion $\xi_F(f)$ der Menge F auch μ_p-meßbar ist, gilt

$$\mu_F(f) = \xi_F^\wedge(f) = f^\wedge(\xi_F) = \mu_{f^\wedge}(F),$$

eventuell mit Ausnahme einer Menge N von Punkten f vom μ_p-Maß Null. Gehört f zu $F - N$, so erhalten wir

$$\mu_{f^\wedge}(F) = \xi_F(f) = 1 = \mu_{f^\wedge}(\overline{\mathfrak{R}}),$$

also ist $D_{f^\wedge} \subset F$. Hieraus folgt

$$F - \{f : D_{f^\wedge} \subset F\} \subset N.$$

Damit ist die Formel (4) bewiesen.

VI. *Für jedes $f \in D_p - \mathfrak{R}$ ist*

$$D_{f^\wedge} - D_p \neq \emptyset.$$

Beweis. Es sei $f_0 \in \overline{\mathfrak{N}}$ und $B \in Z$. Setzen wir $\alpha = f_0(B)$ und berücksichtigen wir (2), so erhalten wir

$$f_0^\wedge(|\alpha 1 - x_B|^2) = 0.$$

Somit verschwindet $\alpha 1 - x_B$ auf ganz $D_{f_0^\wedge}$, und es ist $x_B(f) = x_B(f_0)$ für alle $f \in D_{f_0^\wedge}$.

Sind nun f_1 und f_2 zwei verschiedene Punkte aus D_p, so existiert eine Funktion $x(f) \in C(\overline{\mathfrak{N}})$, für die $x(f_1) \neq x(f_2)$ ist. Da es nach Satz VIII aus Nr. 4 einen Operator $B \in Z$ gibt, für den $x_B(f) = x(f)$ ist, wenn f zu D_p gehört, muß $x_B(f_1) \neq x_B(f_2)$ sein. Gehört f zu $D_{f_1^\wedge}$, so ist nach dem oben Bewiesenen $x_B(f) = x_B(f_1) \neq x_B(f_2)$. Also ist $f \neq f_2$ und $f_2 \notin D_{f_1^\wedge}$. Somit kann für jedes $f \in D_p$ der Durchschnitt $D_p \cap D_{f^\wedge}$ keinen von f verschiedenen Punkt enthalten. Da aber $f \in D_p - \mathfrak{N}$ sein sollte, enthält $D_{f^\wedge}$ mindestens zwei verschiedene Punkte; also ist $D_{f^\wedge} - D_p \neq \emptyset$.

VII. *Es ist* $\mu_p(\overline{\mathfrak{N}} - \mathfrak{N}) = 0$.

Beweis. Auf Grund von Satz VI ist

$$D_p - \mathfrak{N} \subset D_p - \{f : D_{f^\wedge} \subset D_p\}$$

und folglich wegen Satz V

$$\mu_p(\overline{\mathfrak{N}} - \mathfrak{N}) = \mu_p(D_p - \mathfrak{N}) \leq \mu_p(D_p - \{f : D_{f^\wedge} \subset D_p\}) = 0.$$

Theorem 4. *Ist F ein reduzibles positives Funktional über R, so sind für fast alle $M \in D_{F^Z}$ (im Sinne des Maßes μ_F) die Ableitungen F_M unzerlegbar.*

Beweis. Ist N die Gesamtheit aller $M \in D_{F^Z}$, für die F_M nicht zerlegbar ist, so gilt $D_p - \mathfrak{N} = \tilde{N} = \{\tilde{f}_M : M \in N\}$ für $p' = F$. Auf Grund von Nr. 4, Satz X, ist $F^Z = p'^Z = \tilde{p}$; daher ist[1])

$$\mu_F(N) = \mu_{\tilde{p}}(N) = \mu_p(\tilde{N}) = \mu_p(D_p - \mathfrak{N}) = 0.$$

Fassen wir die Theoreme 2, 3 und 4 zusammen, so erhalten wir das folgende Resultat:

Theorem 5. *Ein positives Funktional F über R ist genau dann reduzibel, wenn es ein zentral reduzibles Funktional ist, dessen Ableitungen F_M für fast alle $M \in D_{F^Z}$ (im Sinne des Maßes μ_F) unzerlegbar sind.*

§ 41. Zerlegung einer Algebra von Operatoren

1. Die Diagonalzerlegung eines positiven Funktionals. Wir bezeichnen nun mit R' die Gesamtheit der mit allen Operatoren aus R vertauschbaren beschränkten linearen Operatoren eines HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}$ und mit $R_1 \cup R_2$ die minimale BANACHsche symmetrische Teilalgebra von $\mathfrak{B}(\mathfrak{H})$, die R_1 und R_2 enthält.

[1]) Wir erinnern daran, daß μ_F eigentlich μ_{F^Z} bedeutet.

I. *Für jede der Norm nach abgeschlossene symmetrische Algebra* $R \subset \mathfrak{B}(\mathfrak{H})$ *gibt es eine kommutative* BANACH*sche symmetrische Algebra* E *aus Operatoren von* $\mathfrak{H}$, *die die Eigenschaft* $(R \cup E)' = E$ *hat.*

Beweis. Es sei E eine maximale kommutative symmetrische Teilalgebra von R'; wir wollen zeigen, daß dann $(R \cup E)' = E$ gilt.

Es ist $(R \cup E)' = R' \cap E'$. Ist $A \in R' \cap E'$ hermitesch, so ist $E \cup \{A\}$ eine kommutative symmetrische Teilalgebra von R', die E enthält. Da E maximal ist, gilt $E \cup \{A\} = E$ und folglich $A \in E$. Somit liegt $(R \cup E)'$ in E. Andererseits ist offenbar $(R \cup E)' \supset E$, so daß wir zu der Beziehung $(R \cup E)' = E$ gelangen.

Eine Algebra E, die den Bedingungen von Satz I genügt, nennen wir *Diagonalalgebra* der Algebra R.

Offenbar ist E das Zentrum der Algebra $R \cup E$.

Es sei nun F ein beliebiges positives Funktional über R, dem die Darstellung $A \to A_F$ der Algebra R in einem HILBERTschen Raum $\mathfrak{H}_F$ entspricht (vgl. § 17, Nr. 3). Dabei kann $\mathfrak{H}_F$ als der Raum $L^2(F)$ aller bezüglich eines Maßes μ_F quadratisch integrablen Funktionen angenommen werden (vgl. den Beweis von Satz I aus § 17, Nr. 4).

Wir bezeichnen nun mit R_F das Bild der Algebra R bei dieser Darstellung. Dann ist R_F eine BANACHsche symmetrische Algebra von Operatoren aus $\mathfrak{H}_F$ (vgl. die Folgerung aus § 24, Nr. 3). Dabei existiert in $\mathfrak{H}_F$ ein in bezug auf R_F zyklischer Vektor, d. h. ein Vektor ξ_F^0, für den die Gesamtheit aller Vektoren $A_F \xi_F^0$, $A_F \in R_F$, in $\mathfrak{H}_F$ dicht ist. Auf Grund von Satz I gibt es eine Diagonalalgebra E für R_F. Setzen wir $K = R_F \cup E$ und definieren wir das positive Funktional φ über K durch die Formel

$$\varphi(A) = \langle A\,\xi_F^0,\, \xi_F^0 \rangle \quad \text{für} \quad A \in K,$$

so gilt der folgende Satz:

II. *Das Funktional* φ *ist reduzibel.*

Beweis. Ist ψ ein positives Funktional über K, das der Bedingung $\psi \leqq \varphi$ genügt, so existiert ein Operator $B \in K' = E$, für den $\psi(A) = \varphi(BA)$ gilt (vgl. § 19, Nr. 1, Theorem 1). Da E das Zentrum von K ist, ist damit der Satz bewiesen.

Wir bezeichnen nun mit φ^E die Einschränkung des Funktionals φ auf E, mit $\mathfrak{M}$ den Raum der maximalen Ideale von E und mit μ_φ das durch das Funktional φ^E definierte Maß auf $\mathfrak{M}$.

III. *Der Träger des Maßes* μ_φ *stimmt mit* $\mathfrak{M}$ *überein.*

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß

$$\varphi^E(B^*B) = \int |B(M)|^2 d\mu_\varphi(M) > 0$$

für jedes $B \in E$, $B \neq 0$, ist. Dazu nehmen wir an, D sei der Träger des Maßes μ_φ. Ist $\mathfrak{M} - D \neq \emptyset$, so existiert eine stetige Funktion $B(M) \not\equiv 0$, die auf D verschwindet. Für sie gilt

$$\varphi^E(B^*B) = \int |B(M)|^2 d\mu_\varphi(M) = 0.$$

[Wir erinnern daran, daß die Algebren E und $C(\mathfrak{M})$ vollisomorph sind (vgl. § 16, Nr. 2, Theorem 2) und daher die Funktion $B(M)$ durch ein Element $B \in E$ definiert wird.] Ist also $\varphi^E(B^*B) = 0$, so erhalten wir für jedes $A \in R$

$$|BA_F\xi_F^0|^2 = |A_F B\xi_F^0|^2 \leq |A|^2 |B\xi_F^0|^2 = |A|^2 \varphi^E(B^*B) = 0,$$

d. h., es ist $BA_F\xi_F^0 = 0$. Da aber ξ_F^0 ein zyklischer Vektor ist, muß $B = 0$ sein. Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten nun die Spektralzerlegung

$$\varphi(A) = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_M(A)\, d\mu_\varphi(M)$$

des Funktionals φ (vgl. § 40, Nr. 2, Theorem 1).

Jedes Funktional φ_M erzeugt eine Darstellung $A \to A_M$ der Algebra K in einem Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}_M = L^2(\varphi_M)$ mit einem in bezug auf K zyklischen Vektor ξ_M^0.

Sind R_M und K_M die Bilder von R_F bzw. K in dieser Darstellung, so ist

$$K_M = R_M. \tag{1}$$

Die Menge $X = \left\{\sum_k B_k A_k : B_k \in E,\ A_k \in R_F\right\}$ ist nämlich in K bezüglich der Operatornorm dicht, und daher ist die Menge

$$\begin{aligned} X_M &= \left\{\sum_k B_{k,M} A_{k,M} : B_k \in E,\ A_k \in R_F\right\} \\ &= \left\{\sum_k B_k(M) A_{k,M} : A_k \in R_F\right\} = R_M \end{aligned}$$

in K_M dicht; daraus folgt (1), denn K_M und R_M sind abgeschlossen (vgl. die Folgerung aus § 24, Nr. 3).

Aus (1) können wir schließen, daß der Vektor ξ_M^0 auch bezüglich R_F zyklisch ist. Dann erzeugen aber die Darstellungen $A \to A_F$ und $A_F \to A_M$ die Darstellung $A \to A_M$ der Algebra R mit dem zyklischen Vektor ξ_M^0. Diese Darstellung wird durch das positive Funktional

$$\psi_M(A) = \varphi_M(A_F)$$

definiert. Folglich ist

$$L^2(\psi_M) = L^2(\varphi_M), \quad R_{\psi_M} = R_M, \quad \xi_{\psi_M}^0 = \xi_M^0.$$

IV. *Das Funktional ψ_M ist genau dann unzerlegbar, wenn das Funktional φ_M unzerlegbar ist; fast alle ψ_M (im Sinne des Maßes μ_φ) sind unzerlegbar.*

Beweis. Das Funktional ψ_M ist genau dann unzerlegbar, wenn die Algebra $R_{\psi_M} = R_M = K_M$ irreduzibel, d. h., wenn φ_M unzerlegbar ist. Nach Theorem 5 aus § 40 sind fast alle φ_M und infolgedessen auch fast alle ψ_M unzerlegbar.

Damit erhalten wir den folgenden Satz:

Theorem 1. *Gegeben sei ein positives Funktional F über R und eine Diagonalalgebra E für das Bild R_F von R in $L^2(F)$. Dann existiert ein Maß[1]) μ auf dem*

[1]) Wir schreiben hier μ statt μ_φ.

Raum $\mathfrak{M}$ der maximalen Ideale von E und für jedes $M \in \mathfrak{M}$ ein positives Funktional ψ_M über R derart, daß

a) *$\psi_M(A)$ eine stetige Funktion von $M \in \mathfrak{M}$ für jedes feste $A \in R$ ist;*

b) $$\langle A_F B_F \xi_F^0, \xi_F^0 \rangle = \int_{\mathfrak{M}} B(M)\, \psi_M(A)\, d\mu(M) \tag{2}$$

für alle $A \in R$, $B \in E$ ist, wobei ξ_F^0 ein zyklischer Vektor der Darstellung $R \to R_F$ ist;

c) *fast alle Funktionale ψ_M (im Sinne des Maßes μ) unzerlegbar sind.*

Wir übertragen nun die Zerlegung (2) von $\mathfrak{M}$ auf $\overline{\mathfrak{N}}$. Dazu bemerken wir, daß die Zuordnung $M \to \psi_M$ eine in der schwachen Topologie stetige Abbildung des Raumes $\mathfrak{M}$ in P ist.[1]) Da fast alle ψ_M zu $\mathfrak{N}$ gehören und $\mathfrak{M}$ der Träger des Maßes μ ist, ist das Bild $\mathfrak{D}$ des Raumes $\mathfrak{M}$ bei dieser Abbildung in $\overline{\mathfrak{N}}$ enthalten.

Setzen wir $R_M = R_f$, $A_M = A_f$, $\xi_M = \xi_f$ für $f = \psi_M$, so erhalten wir die Algebra R_f, die Operatorfunktionen A_f und die zyklischen Vektoren ξ_f, die für alle $f \in \mathfrak{D}$ definiert sind. Dabei ist $A_f = A(M)$ eine Zahlenfunktion, wenn A zu E gehört.

Für jede Menge $\Delta \subset \mathfrak{D}$ sei Δ' das Urbild von Δ bei der Abbildung $M \to \psi_M$; das Maß μ läßt sich auf $\mathfrak{D}$ übertragen, indem

$$\varrho(\Delta) = \mu(\Delta')$$

gesetzt wird. Offenbar ist ϱ ein Maß auf $\overline{\mathfrak{N}}$ mit dem Träger $\mathfrak{D}$. Mit F_ϱ bezeichnen wir das durch das Maß ϱ definierte Funktional über $C(\overline{\mathfrak{N}})$.

V. *Fast alle Funktionale $f \in \overline{\mathfrak{N}}$ (im Sinne des Maßes ϱ) sind unzerlegbar.*

Beweis. Ist Δ die Gesamtheit aller zerlegbaren positiven Funktionale $f \in \mathfrak{D}$, so bildet Δ' die Gesamtheit derjenigen $M \in \mathfrak{M}$, für die ψ_M zerlegbar ist. Also gilt

$$\varrho(\Delta) = \mu(\Delta') = 0.$$

Es sei nun $B(\overline{\mathfrak{N}})$ die symmetrische Algebra der (im Sinne des Maßes ϱ) wesentlich beschränkten meßbaren Funktionen $x = x(f)$ auf $\overline{\mathfrak{N}}$ mit der Norm[2]) $|x| = \operatorname{ess\,max}_{f \in \overline{\mathfrak{N}}} |x(f)|$ und der Involution $x^*(f) = \overline{x(f)}$, und wir setzen für $x \in B(\overline{\mathfrak{N}})$

$$x^\wedge(M) = x(\psi_M).$$

VI. *Für jede Funktion $x \in B(\overline{\mathfrak{N}})$ existiert ein Operator $C_x \in E$ mit der Eigenschaft, daß*

$$C_x(M) = x^\wedge(M)$$

fast überall im Sinne des Maßes μ gilt. Dabei ist

$$\langle A_F C_x \xi_F^0, \xi_F^0 \rangle = \int_{\overline{\mathfrak{N}}} f(A)\, x(f)\, d(\varrho f).$$

---

1) Wir erinnern daran, daß P die Gesamtheit aller normierten positiven Funktionale über R ist (vgl. § 40, Nr. 4).

2) Vgl. § 6, Nr. 13.

Beweis. Es genügt zu zeigen, daß die Behauptung für $0 \leqq x \leqq 1$ gilt. Bezeichnen wir mit φ_x das durch die Formel[1])

$$\varphi_x(B) = \int_{\mathfrak{M}} x^\wedge(M) B(M) d\mu(M) \tag{3}$$

definierte positive Funktional über $E = C(\mathfrak{M})$, so ist $\varphi_x \leqq \varphi$. Da φ reduzibel ist, folgt hieraus, daß ein Operator $C_x \in E$ existiert, für den

$$\varphi_x(B) = \varphi(C_x B) = \int_{\mathfrak{M}} C_x(M) B(M) d\mu(M) \tag{4}$$

ist. Ein Vergleich von (3) und (4) zeigt, daß fast überall im Sinne des Maßes μ die Beziehung $C_x(M) = x^\wedge(M)$ besteht. Außerdem ist

$$\langle A_F C_x \xi_F^0, \xi_F^0 \rangle = \int_{\mathfrak{M}} \varphi_M(A) x^\wedge(M) d\mu(M)$$
$$= \int_{\mathfrak{D}} f(A) x(f) d\varrho(f).$$

VII. *Die Zuordnung $x \to C_x$ ist ein voller Isomorphismus zwischen $B(\overline{\mathfrak{N}})$ und E.*

Beweis. Für jedes $x \in B(\overline{\mathfrak{N}})$ gilt

$$|x| = \operatorname*{ess\,max}_{M \in \mathfrak{M}} |x^\wedge(M)| = \sup_{M \in \mathfrak{M}} |C_x(M)| = |C_x|,$$

so daß die Zuordnung $x \to C_x$ ein voller Isomorphismus der Algebra $B(\overline{\mathfrak{N}})$ auf eine Teilalgebra E' von E sein muß. Wir müssen nun zeigen, daß $E' = E$ ist; dazu brauchen wir nur zu beweisen, daß für jedes $C \in E$, das der Bedingung $0 \leqq C \leqq 1$ genügt, eine Funktion $x \in B(\overline{\mathfrak{N}})$ existiert, die die Eigenschaft $C_x = C$ hat. Es sei also $C \in E$ und $0 \leqq C \leqq 1$. Betrachten wir das positive Funktional

$$\psi(x) = \int x^\wedge(M) C(M) d\mu(M) \tag{5}$$

über $C(\overline{\mathfrak{N}})$, so ist $0 \leqq \psi \leqq F_\varrho$ wegen $0 \leqq C(M) \leqq 1$. Folglich ist ψ absolut stetig bezüglich F_ϱ (vgl. § 6, Nr. 15). Das bedeutet, daß eine ϱ-meßbare beschränkte Funktion $y(f)$ auf $\mathfrak{D}$ existiert, für die

$$\psi(x) = \int x(f) y(f) d\varrho(f) = \int x^\wedge(M) y^\wedge(M) d\mu(M)$$
$$= \int x^\wedge(M) C_y(M) d\mu(M)$$

ist. Ein Vergleich mit (5) ergibt $C(M) = C_y(M)$, also $C = C_y$.

Durch Zusammenfassen der Sätze V bis VII gelangen wir zu dem folgenden Satz:

Theorem 2. *Gegeben sei ein positives Funktional F über R und eine Diagonalalgebra E auf $L^2(F)$. Dann existiert ein Maß ϱ auf $\overline{\mathfrak{N}}$, das den folgenden Bedingungen genügt:*

a) *$\overline{\mathfrak{N}} - \mathfrak{N}$ ist eine Menge vom ϱ-Maß Null;*

[1]) Wir erinnern daran, daß μ das Maß μ_φ bezeichnet.

b) *für jede Funktion* $x \in B(\overline{\mathfrak{N}})$ *gibt es einen Operator* $C_x \in E$ *mit der Eigenschaft*

$$\langle A_F C_x \xi_F^0, \xi_F^0 \rangle = \int f(A) x(f) d\varrho(f); \tag{6}$$

c) *die Zuordnung* $x \to C_x$ *ist ein voller Isomorphismus der Algebra* $B(\overline{\mathfrak{N}})$ *auf die Algebra* E.

Ist $\mathfrak{D}$ der Träger des Maßes ϱ, so erhalten wir aus (6)

$$F(A) = \langle A_F \xi_F^0, \xi_F^0 \rangle = \int_{\mathfrak{D}} f(A) d\varrho(f). \tag{7}$$

Diese Formel heißt *Diagonalzerlegung* des Funktionals F, die Menge $\mathfrak{D}$ *Kernraum* und die Algebra $P = \{C_x : x \in C(\mathfrak{D})\}$ *Kernalgebra* dieser Zerlegung.

Da die Zuordnung $x \to C_x$ ein voller Isomorphismus der Algebren $C(\mathfrak{D})$ und P ist, können wir $\mathfrak{D}$ als den Raum der maximalen Ideale von P auffassen.

VIII. *Die Algebra* E *ist die schwach abgeschlossene Hülle der Algebra* P.

Beweis. Da E schwach abgeschlossen ist, genügt es zu zeigen, daß P im Sinne der schwachen Topologie dicht in E ist.

Es sei $x(f) \in B(\overline{\mathfrak{N}})$; dann gehört $x(f)$ auch zu $L^1(\overline{\mathfrak{N}}) = L^1(\overline{\mathfrak{D}})$. Wir nehmen zunächst $x(f) \geqq 0$ an. Wegen $x(f) \in B(\overline{\mathfrak{N}})$ ist $x(f) \leqq c$ für ein konstantes positives c. Zur Abkürzung setzen wir $\int x(f) d\varrho(f) = I(x)$. Nach Definition von $I(x)$ gibt es zu jedem $\delta > 0$ eine Funktion $y' \in M^+(\mathfrak{D})$ mit den Eigenschaften $y' \geqq x$ und $I(y' - x) = I(y') - I(x) < \frac{\delta}{2}$ (vgl. § 6, Nr. 4). Ersetzen wir, wenn nötig, y' durch $y' \cap c$, so können wir annehmen, daß y' ebenfalls höchstens gleich c ist. Nach Definition von $I(y')$ existiert eine Funktion $y(f) \in C(\mathfrak{D})$ mit den Eigenschaften $0 \leqq y \leqq y'$ und $I(y' - y) = I(y') - I(y) < \frac{\delta}{2}$. Dann ist $0 \leqq y \leqq c$ und $I(|x - y|) < \delta$.

Gegeben sei nun eine beliebige Funktion $x(f) \in B(\overline{\mathfrak{N}})$ mit der Eigenschaft $|x(f)| \leqq c$. Schreiben wir diese Funktion in der Gestalt

$$x(f) = x(f) - x_2(f) + i(x_3(f) - x_4(f)),$$

wobei $0 \leqq x_k(f) \leqq c$ $(k = 1, 2, 3, 4)$ ist, und wenden wir auf jede der Funktionen $x_k(f)$ das vorhergehende Resultat an, so können wir schließen, daß in $C(\mathfrak{D})$ eine Funktion $y(f)$ existiert, für die $\|y\|_\infty \leqq 4c$ und $\|x - y\|_1 < \delta$ ist. Dann gilt aber für beliebige Funktionen $a_k(f) \in B(\overline{\mathfrak{N}})$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$

$$\left| \int [x(f) - y(f)] a_k(f) d\varrho(f) \right| = \left| \int_{\mathfrak{D}} [x(f) - y(f)] a_k(f) d\varrho(f) \right|$$
$$\leqq \max_{1 \leqq k \leqq n} \|a_k\|_\infty \cdot \|x - y\|_1 < \varepsilon \tag{8}$$

für
$$\delta < \frac{\varepsilon}{\max\limits_{1 \leq k \leq n} \|a_k\|_\infty},$$
wobei
$$\langle C_y A_F \xi_F^0, C_y A_F \xi_F^0 \rangle = \int |y(f)|^2 f(A^* A) d\varrho(f)$$
$$\leq 4c \int f(A^* A) d\varrho(f) = 4c \langle A_F \xi_F^0, A_F \xi_F^0 \rangle$$

ist. Da die Menge der Vektoren $A_F \xi_F^0$, $A \in R$, in $L^2(F)$ dicht ist, gilt $|C_y| \leq 4c$, und die durch (8) definierten Umgebungen bilden eine Basis schwacher Umgebungen in der Kugel $|C| \leq 4c$ der Algebra E; folglich ist C_x ein schwacher Häufungspunkt der Operatoren C_y, $y \in C(\mathfrak{D})$.

2. Anwendung auf die Zerlegung einer Algebra. Wir wollen nun ein festes positives Funktional F über R betrachten. Es sei
$$F(A) = \int_{\mathfrak{D}} f(A) d\varrho(f)$$
seine Diagonalzerlegung, $\mathfrak{D}$ der Kernraum und P die Kernalgebra dieser Zerlegung.

Wir bezeichnen mit $\mathfrak{S}$ die Gesamtheit der Vektoren
$$\xi = \sum B_k A_{k,F} \xi_F^0, \quad B_k \in E, A_k \in R.$$
Dann ist $\mathfrak{S}$ dicht in $L^2(F)$. Jedem Vektor $\xi \in \mathfrak{S}$ ordnen wir eine für alle $f \in \mathfrak{D}$ definierte Vektorfunktion
$$\xi(f) = \sum_k B_k(f) A_{k,f} \xi_f^0$$
zu. Dabei ist $\xi(f) \in \mathfrak{H}_f = L^2(f)$ für jedes $f \in \mathfrak{D}$.

Diese Zuordnung $\xi \to \xi(f)$ besitzt die folgenden Eigenschaften:

I. *Ist* $\xi \to \xi(f)$ *und* $\eta \to \eta(f)$, *so gilt*
$$\alpha\xi + \beta\eta \to \alpha\xi(f) + \beta\eta(f) \tag{1}$$
und
$$\langle \xi, \eta \rangle = \int_{\mathfrak{D}} \langle \xi(f), \eta(f) \rangle d\varrho(f). \tag{2}$$

Beweis. Die erste Behauptung ist klar. Für den Beweis der zweiten setzen wir
$$\xi = \sum_k B_k A_{k,F} \xi_F^0, \quad \eta = \sum_j C_j D_{j,F} \xi_F^0$$
mit B_k, $C_j \in E$ und A_k, $D_j \in R$. Dann ist
$$\langle \xi, \eta \rangle = \sum_{k,j} \langle B_k A_{k,F} \xi_F^0, C_j D_{j,F} \xi_F^0 \rangle$$
$$= \sum_{k,j} \int_{\mathfrak{D}} B_k(f) \overline{C_j(f)} f(D_{j,F}^* A_{k,F}) d\varrho(f)$$
$$= \int \langle \sum_k B_k(f) A_k(f) \xi_f^0, \sum_j C_j(f) D_j(f) \xi_f^0 \rangle d\varrho(f)$$
$$= \int \langle \xi(f), \eta(f) \rangle d\varrho(f).$$

II. *Die Zuordnung* $\xi \to \xi(f)$ *ist eineindeutig.*

Beweis. Es gelte $\xi \to \xi(f)$ und $\xi \to \xi'(f)$. Mit Hilfe von (1) erhalten wir $0 \to \xi(f) - \xi'(f)$, so daß aus (2)

$$0 = \int\limits_{\mathfrak{D}} |\xi(f) - \xi'(f)|^2 \, d\varrho(f)$$

folgt. Da die Funktion $|\xi(f) - \xi'(f)|^2$ stetig ist, folgt hieraus

$$\xi(f) - \xi'(f) = 0, \quad \xi(f) = \xi'(f) \quad \text{auf} \quad \mathfrak{D}.$$

Somit ist die Funktion $\xi(f)$ durch das Element ξ eindeutig definiert. Dabei ist $|\xi|^2 = \int |\xi(f)|^2 d\varrho(f) = 0$ für $\xi(f) \equiv 0$.

Folglich ist die Zuordnung $\xi \to \xi(f)$ eineindeutig.

III. *Für alle* $\xi \in \mathfrak{S}$, $A \in R$ *ist*

$$A_F \xi \in \mathfrak{S} \quad \textit{und} \quad (A_F \xi)(f) = A_f \xi(f).$$

Beweis. Wir setzen

$$\xi = \sum_k B_k A'_{k,F} \xi^0_F, \quad B_k \in E, \ A'_k \in R.$$

Dann ist für $A \in R$

$$A_F \xi = \sum_k A_F B_k A'_{k,F} \xi^0_F = \sum_k B_k (A A'_k)_F \xi^0_F \in \mathfrak{S}$$

und

$$(A_F \xi)(f) = \sum_k B_k(f) (A A'_k)_f \xi^0_f = \sum_k B_k(f) A_f A'_{k,f} \xi^0_f$$
$$= A_f \sum_k B_k(f) A'_{k,f} \xi^0_f = A_f \xi(f).$$

Die Sätze I und II führen naturgemäß zu folgender Definition.

Es sei T ein lokal bikompakter Raum mit dem Maß ϱ, das seinerseits den Träger T hat, und $C(T)$ die Gesamtheit der beschränkten stetigen Funktionen auf T. Wir setzen voraus, daß jedem Punkt $t \in T$ ein Hilbertscher Raum $\mathfrak{H}_t$ entspricht. Eine Menge $\mathfrak{S}$ von Vektorfunktionen $\xi = \xi(t)$ mit Werten aus $\mathfrak{H}_t$ nennen wir eine *Basis des topologischen direkten Integrals*, wenn $\mathfrak{S}$ den folgenden Bedingungen genügt:

1. Für alle $\xi = \xi(t)$, $\eta = \eta(t) \in \mathfrak{S}$ ist das Skalarprodukt $\langle \xi(t), \eta(t) \rangle$ eine stetige und nach ϱ integrierbare Funktion auf T.

2. Die Menge $\mathfrak{S}$ ist linear, d. h., aus $\xi(t), \eta(t) \in \mathfrak{S}$ folgt

$$\alpha \xi(t) + \beta \eta(t) \in \mathfrak{S}.$$

3. Für alle $\xi = \xi(t) \in \mathfrak{S}$ und $x = x(t) \in C(T)$ gehört die Vektorfunktion $x\xi = x(t)\xi(t)$ zu $\mathfrak{S}$.

4. Für jedes feste $t_0 \in T$ ist die Menge der Vektoren $\xi(t_0)$, $\xi(t) \in \mathfrak{S}$, in $\mathfrak{H}_{t_0}$ dicht.

Definieren wir das Skalarprodukt in $\mathfrak{S}$ durch die Formel

$$\langle \xi, \eta \rangle = \int\limits_T \langle \xi(t), \eta(t) \rangle \, d\varrho(t),$$

so haben wir $\mathfrak{S}$ zu einem euklidischen Raum gemacht; die vollständige Hülle dieses Raumes nennen wir das *topologische direkte Integral der Räume* $\mathfrak{H}_t$ *bezüglich* ϱ und schreiben dafür $\int\limits_T \mathfrak{H}_t \sqrt{d\varrho}$.

Wir ordnen nun jedem $t \in T$ einen beschränkten linearen Operator A_t aus $\mathfrak{H}_t$ zu. Gibt es in $\mathfrak{H} = \int\limits_T \mathfrak{H}_t \sqrt{d\varrho}$ einen beschränkten linearen Operator A mit den Eigenschaften $A\mathfrak{S} \subset \mathfrak{S}$ und $(A\xi)(t) = A_t\xi(t)$ für alle $t \in T$, so heißt A das *direkte Integral der Operatoren* A_t, und wir schreiben $A = \int\limits_T \oplus A_t$.

IV. *Ist* $A = \int\limits_T \oplus A_t$, *so gilt* $|A| = \sup\limits_{t \in T} |A_t|$.

Beweis. Für jede Funktion $x = x(t) \in C(T)$ ist

$$|Ax\xi|^2 \leqq |A|^2 |x\xi|^2,$$

also

$$\int |x(t)|^2 |A_t\xi(t)|^2 d\varrho(t) \leqq |A|^2 \int |x(t)|^2 |\xi(t)|^2 d\varrho(t).$$

Hieraus folgt, da $x(t)$ beliebig ist,

$$|A_t\xi(t)|^2 \leqq |A|^2 |\xi(t)|^2$$

und somit

$$|A_t| \leqq |A|. \tag{3}$$

Andererseits haben wir, wenn wir $\alpha = \sup\limits_{t \in T} |A_t|$ setzen,

$$\int |A_t\xi(t)|^2 d\varrho(t) \leqq \alpha^2 \int |\xi(t)|^2 d\varrho(t),$$

also $|A\xi|^2 \leqq \alpha^2 |\xi|^2$. Hieraus folgt $|A| \leqq \alpha$, und ein Vergleich mit (3) ergibt $|A| = \alpha$.

V. *Für jede Funktion* $x = x(t) \in C(T)$ *existiert ein Operator* $C_x = \int\limits_T \oplus x(t) 1_t$, *wobei* 1_t *Einsoperator von* $\mathfrak{H}_t$ *ist, und* $x \to C_x$ *ist ein isometrischer Isomorphismus.*

Beweis. Gehört x zu $C(T)$ und ξ zu $\mathfrak{S}$, so ist nach Bedingung 3 auch $x\xi \in \mathfrak{S}$ und $|x\xi| \leqq |x|\,|\xi|$, so daß der Operator C_x von $\mathfrak{S}$, der durch die Formel $C_x\xi = x\xi$ definiert wird, beschränkt ist. Er läßt sich stetig zu einem beschränkten Operator C_x in $\mathfrak{H}$ fortsetzen. Offenbar ist

$$C_x = \int\limits_T \oplus x(t) 1_t, \quad |C_x| = \sup_{t \in T} |x(t) 1_t| = \sup_{t \in T} |x(t)| = |x|.$$

Die Zuordnung $x \to C_x$ ist also ein isometrischer Isomorphismus.

Bezeichnen wir das Bild der Algebra $C(T)$ bei diesem Isomorphismus mit $\mathfrak{C}$, so ist $\mathfrak{C}$ die *Kernalgebra* des gegebenen direkten Integrals.

VI. *Ist* R *die* Banach*sche symmetrische Algebra der Operatoren* A *auf* $\mathfrak{H} = \int\limits_T \mathfrak{H}_t \sqrt{d\varrho}$, *deren jeder ein direktes Integral* $A = \int\limits_T \oplus A_t$ *ist, so ist die Zuordnung* $A \to A_t$ *eine symmetrische Darstellung der Algebra* R.

Beweis. Wir brauchen nur zu zeigen, daß die Zuordnung $A \to A_t$ symmetrisch ist. Setzen wir

$$A = \int_T \oplus A_t \quad \text{und} \quad A^* = \int_T \oplus B_t,$$

so ist für jede Funktion $x = x(t) \in C(T)$

$$\langle A x \xi, \eta \rangle = \langle x \xi, A^* \eta \rangle,$$

d. h.

$$\int x(t) \langle A_t \xi(t), \eta(t) \rangle \, d\varrho(t) = \int x(t) \langle \xi(t), B_t \eta(t) \rangle \, d\varrho(t).$$

Hieraus ergibt sich $\langle A_t \xi(t), \eta(t) \rangle = \langle \xi(t), B_t \eta(t) \rangle$, also $B_t = A_t^*$.

Diesem Satz können wir entnehmen, daß das Bild R_t der Algebra R bei der Abbildung $A \to A_t$ eine Banachsche symmetrische Algebra in $\mathfrak{H}_t$ ist (vgl. die Folgerung aus § 24, Nr. 3). Diesen Umstand können wir durch die Bezeichnung $R = \int_T \oplus R_t$ ausdrücken und R das *direkte Integral der Algebren* R_t nennen.

Wir wenden uns nun wieder der Algebra R, dem Funktional F und der Menge $\mathfrak{S}$ zu, die wir am Anfang dieser Nummer betrachtet haben.

Die Sätze I und II bedeuten, daß $\mathfrak{S}$ eine Basis des topologischen Integrals $\int_{\mathfrak{D}} L^2(f) \sqrt{d\varrho(f)}$ ist und die Zuordnung $\xi \to \xi(f)$ eine isometrische Abbildung des Raumes $L^2(F)$ auf $\int_{\mathfrak{D}} L^2(f) \sqrt{d\varrho(f)}$ erzeugt. Identifiziert man den Raum $L^2(F)$ mit $\int_{\mathfrak{D}} L^2(f) \sqrt{d\varrho(f)}$, so sind auf Grund von Satz III die Operatoren $A_F \in R_F$ topologische Integrale $A_F = \int_{\mathfrak{D}} \oplus A_f$ und die Algebra R_F ein topologisches Integral $R_F = \int_{\mathfrak{D}} \oplus R_f$. Da hierbei fast alle $f \in \mathfrak{S}$ unzerlegbar sind, sind fast alle R_f irreduzibel. Daraus erhalten wir den folgenden Satz:

VII. *Ist* $F(A) = \int_{\mathfrak{D}} f(A)\, d\varrho(f)$ *die Diagonalzerlegung des positiven Funktionals* F *über* R, *so definiert die Zuordnung* $\xi \to \xi(f)$ *eine isometrische Abbildung des Raumes* $L^2(F)$ *auf das direkte Integral* $\int_{\mathfrak{D}} L^2(f) \sqrt{d\varrho(f)}$. *Bei dieser Abbildung geht jeder Operator* $A_F \in R_F$ *in das direkte Integral* $\int_{\mathfrak{D}} \oplus A_f$, *die Kernalgebra von* $L^2(F)$ *in die Kernalgebra des direkten Integrals* $\int_{\mathfrak{D}} L^2(f) \sqrt{d\varrho(f)}$ *und die Algebra* R_F *in das direkte Integral* $\int_{\mathfrak{D}} \oplus R_f$ *über; dabei sind (im Sinne von* ϱ*) fast alle Algebren* R_f *irreduzibel.*

Wir nehmen nun an, $\mathfrak{H}$ besitze einen in bezug auf die Algebra R zyklischen Vektor ξ_0, und wenden Satz VII auf das positive Funktional $F(A) = \langle A \xi_0, \xi_0 \rangle$ an. Da ξ_0 zyklisch ist, vermittelt das Funktional F eine isometrische Abbildung des Raumes $\mathfrak{H}$ auf $L^2(F)$; dabei gehen ξ_0 in ξ_F^0 und die Operatoren A in die

Operatoren A_F über. Also sind in diesem Fall die Algebren R und R_F raum-isomorph.

Damit haben wir den folgenden Satz:

Theorem 3. *Ist R eine* BANACH*sche symmetrische Algebra von Operatoren eines* HILBERT*schen Raumes $\mathfrak{H}$ mit einem zyklischen Vektor ξ_0, $|\xi_0| = 1$, und einem Einsoperator, so existiert eine isometrische Abbildung des Raumes $\mathfrak{H}$ auf das direkte Integral $\int_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ mit folgenden Eigenschaften:*

a) *$\mathfrak{D}$ ist der Raum der maximalen Ideale der Kernalgebra dieses Integrals;*

b) *R geht in das direkte Integral $\int_{\mathfrak{D}} \oplus R_f$ über, in dem fast alle R_f (im Sinne von ϱ) irreduzibel sind;*

c) *die Basis des Integrals $\int_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ enthält eine Vektorfunktion $\xi_0(f)$, die für R_f und jedes $f \in \mathfrak{D}$ zyklisch ist und der Bedingung $|\xi_0(f)| = 1$ genügt;*

d) *für alle $f_1 \neq f_2$ existiert ein Operator $A \in R$, für den*

$$\langle A_{f_1}\xi_0(f_1), \xi_0(f_1)\rangle \neq \langle A_{f_2}\xi_0(f_2), \xi_0(f_2)\rangle$$

gilt.[1])

Wir gehen nun zum allgemeinen Fall über.

Es sei R eine beliebige BANACHsche symmetrische Algebra von Operatoren eines HILBERTschen Raumes $\mathfrak{H}$. Dann läßt sich $\mathfrak{H}$ in die direkte orthogonale Summe $\mathfrak{H} = \sum_\alpha \oplus \mathfrak{H}^\alpha$ von bezüglich R invarianten Teilräumen $\mathfrak{H}^\alpha$ zerlegen, von denen jeder einen bezüglich R zyklischen Vektor ξ^α besitzt. Mit R^α bezeichnen wir die Einschränkung der Algebra R auf $\mathfrak{H}^\alpha$.

Nach diesen Voraussetzungen können wir auf $\mathfrak{H}^\alpha$ und R^α das Theorem 3 anwenden. Es seien

$$\int_{\mathfrak{D}^\alpha} \mathfrak{H}_f^\alpha \sqrt{d\varrho_\alpha}, \quad \int_{\mathfrak{D}^\alpha} \oplus R_f^\alpha \quad \text{und} \quad \mathfrak{S}^\alpha$$

die entsprechenden direkten Integrale und ihre Basen, und wir bezeichnen mit $\mathfrak{D}$ die diskrete Summe der Räume $\mathfrak{D}^\alpha$, mit $\mathfrak{S}$ die diskrete direkte Summe der Basen $\mathfrak{S}^\alpha$ und mit ϱ das Maß auf $\mathfrak{D}$, das auf den Mengen $\Delta \subset \mathfrak{D}$ mit Hilfe der Formel

$$\varrho(\Delta) = \sum_\alpha \varrho_\alpha(\Delta \cap \mathfrak{D}^\alpha)$$

definiert wird. Jedes Element $\xi \in \mathfrak{S}$ ist eine endliche Summe $\xi = \sum_\alpha \xi_\alpha$, $\xi_\alpha \in \mathfrak{S}^\alpha$. Wir setzen

$$\xi(f) = \xi_\alpha(f) \quad \text{für} \quad f \in \mathfrak{D}^\alpha.$$

Gehören ξ und η zu $\mathfrak{S}$ und ist $\xi = \sum_\alpha \xi_\alpha$, $\eta = \sum_\alpha \eta_\alpha$, so sind ξ_α und η_α nur für endlich viele Indizes α von Null verschieden; folglich ist

$$\langle \xi, \eta\rangle = \sum_\alpha \langle \xi_\alpha, \eta_\alpha\rangle = \sum_\alpha \int_{\mathfrak{D}^\alpha} \langle \xi_\alpha(f), \eta_\alpha(f)\rangle \, d\varrho_\alpha(f) = \int_{\mathfrak{D}} \langle \xi(f), \eta(f)\rangle \, d\varrho(f).$$

---

[1]) Die Behauptung d) bedeutet, daß für $f_1 \neq f_2$ ein Operator $A \in R$ existiert, für den $f_1(A)$ von $f_2(A)$ verschieden ist.

Wir sehen sofort, daß die Gesamtheit der Funktionen $\xi(f)$, $\xi \in \mathfrak{S}$, auch allen übrigen Basisaxiomen des topologischen Integrals $\int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H} \sqrt{d\varrho}$ genügt, wobei $\mathfrak{H}_f = \mathfrak{H}_f^\alpha$ für $f \in \mathfrak{D}^\alpha$ ist. Setzen wir ferner $R_f = R_f^\alpha$ für $f \in \mathfrak{D}^\alpha$, so erhalten wir $R = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus R_f$. Damit haben wir den folgenden Satz bewiesen:

Theorem 4. *Ist R eine* Banach*sche symmetrische Algebra von Operatoren eines* Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}$, die den Einheitsoperator enthält, so gibt es eine isometrische Abbildung des Raumes $\mathfrak{H}$ auf das direkte topologische Integral $\int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ über einem lokal bikompakten Raum $\mathfrak{D}$, bei der die Algebra R in das direkte Integral $\int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus R_f$ übergeht, wobei lokal fast alle Algebren R_f (im Sinne des Maßes ϱ) irreduzibel sind.*

3. Die Zerlegung einer Algebra in Faktoren. Wir setzen voraus, R sei eine Banachsche symmetrische Algebra von Operatoren eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ und $R^{(1)}$ eine Banachsche symmetrische Teilalgebra von R', die in R' im Sinne der schwachen Topologie dicht ist[1]), und wenden Theorem 4 aus Nr. 2 auf die Algebra $K = R \cup R^{(1)}$ an.

Auf Grund dieses Satzes können wir $\mathfrak{H}$ als topologisches direktes Integral $\mathfrak{H} = \int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ und die Algebra K als direktes Integral $K = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus K_f$ auffassen, wobei lokal fast alle K_f irreduzibel sind. Insbesondere ist $R = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus R_f$ und $R^{(1)} = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus R_f^{(1)}$. Dabei gilt infolge der Stetigkeit des Homomorphismus $K \to K_f$

$$K_f = R_f \cup R_f^{(1)}.$$

Hieraus folgt, wenn K_f eine irreduzible Algebra ist,

$$R_f' \cap R_f^{(1)\prime} = (R_f \cup R_f^{(1)})' = K_f' = (\alpha\, 1_f).$$

Da $R_f^{(1)} \subset R_f'$, also $R_f'' \subset R_f^{(1)\prime}$ ist, erhalten wir ebenfalls

$$R_f'' \cap R_f' = (\alpha\, 1_f) \tag{1}$$

und analog

$$R_f^{(1)\prime\prime} \cap R_f^{(1)\prime} = R_f'' \cap R_f^{(1)\prime\prime} = (\alpha\, 1_f). \tag{2}$$

Ein den Bedingungen (1) bzw. (2) genügendes Paar von schwach abgeschlossenen Algebren nennen wir *faktorisiertes Paar* (vgl. § 34, Nr. 4); offenbar sind die Elemente eines faktorisierten Paares Faktoren.

Hiermit ergibt sich der folgende Satz, der einen Satz von v. Neumann[2]) [9] verallgemeinert.

---

[1]) Insbesondere kann $R^{(1)}$ mit R' übereinstimmen.

[2]) v. Neumann betrachtete nur eine schwach abgeschlossene Algebra eines separablen Hilbertschen Raumes.

Theorem 5. *Es sei R eine* Banachsche *symmetrische Algebra von Operatoren eines* Hilbertschen *Raumes $\mathfrak{H}$ und $R^{(1)}$ eine* Banachsche *symmetrische Teilalgebra von R', die im Sinne der schwachen Topologie in R' dicht ist. Dann läßt sich $\mathfrak{H}$ derart als topologisches direktes Integral $\mathfrak{H} = \int_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ auffassen, daß $R = \int_{\mathfrak{D}} \oplus R_f$ und $R^{(1)} = \int_{\mathfrak{D}} \oplus R_f^{(1)}$ ist und die Algebren R_f' und $R_f^{(1)\prime\prime}$ für lokal fast alle $f \in \mathfrak{D}$ (im Sinne des Maßes ϱ) ein faktorisiertes Paar bilden.*

4. Die Mautnersche Zerlegung. Es sei wieder R eine Banachsche symmetrische Algebra von Operatoren eines Hilbertschen Raumes $\mathfrak{H}$ und E eine Diagonalalgebra zu R, d. h.

$$(R \cup E)' = E$$

(vgl. Nr. 1, Satz I). Wenden wir nun Theorem 4 aus Nr. 2 auf die Algebra $R \cup E$ an, so können wir $\mathfrak{H}$ auf Grund dieses Satzes als direktes Integral $\mathfrak{H} = \int_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ auffassen, so daß $R \cup E = \int_{\mathfrak{D}} \oplus (R \cup E)_f$ ist, wobei lokal fast alle $(R \cup E)_f$ irreduzibel sind. Für jede Funktion $x = x(f) \in C(\mathfrak{D})$ ist der Operator $\int_{\mathfrak{D}} \oplus x(f) 1_f$ mit allen Operatoren $A = \int_{\mathfrak{D}} \oplus A_f$ aus der Algebra $R \cup E$ vertauschbar und gehört demzufolge zur Algebra $(R \cup E)' = E$. Somit ist jeder Operator aus der Kernalgebra des Integrals $\int_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ in der Diagonalalgebra E enthalten.

Ist umgekehrt B ein Operator aus E, so läßt sich B in der Form $B = \int_{\mathfrak{D}} \oplus B_f$ darstellen. Wegen $B \in (R \cup E)'$ gehört B_f zu $((R \cup E)_f)' = (\alpha 1_f)$ für lokal fast alle $f \in \mathfrak{D}$, so daß für lokal fast alle $f \in \mathfrak{D}_f$ die Beziehung $B_f = x(f) 1_f$ gilt.

Wir bezeichnen die Basis des direkten Integrals $\int_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ mit $\mathfrak{S}$. Nach Definition der Basis existiert für jedes $f_0 \in \mathfrak{D}$ ein Vektor $\xi_0 \in \mathfrak{S}$ mit der Eigenschaft $\xi_0(f_0) \neq 0$. Dann gibt es aber infolge der Stetigkeit der Funktion $|\xi_0(f)|^2$ eine offene Menge $U \subset \mathfrak{D}$, die f_0 enthält und auf der $\xi_0(f) \neq 0$ ist. Andererseits haben wir für lokal fast alle $f \in \mathfrak{D}$

$$\langle B_f \xi_0(f), \xi_0(f) \rangle = x(f) \, |\xi_0(f)|^2,$$

so daß auf einer in U dichten Menge V die Funktion $x(f)$ mit der auf U stetigen Funktion

$$y_0(f) = \frac{\langle B_f \xi_0(f), \xi_0(f) \rangle}{|\xi_0(f)|^2}$$

übereinstimmt. Daher ist auf V

$$\langle B_f \xi(f), \eta(f) \rangle = y_0(f) \langle \xi(f), \eta(f) \rangle \tag{1}$$

für alle $\xi, \eta \in \mathfrak{S}$. Da beide Seiten von (1) überall auf U stetig sind, gilt (1) auf ganz U. Aus (1) folgt außerdem, daß $B_f = y_0(f) 1_f$ für alle $f \in U$ ist, da für jedes f die Vektoren $\xi(f)$ und $\eta(f)$ in $\mathfrak{H}_f$ dichte Mengen bilden. Da $\mathfrak{D}$ von

solchen Mengen U überdeckt werden kann, ist $B_f = y_0(f)\,1_f$, wobei $y_0(f)$ eine stetige Funktion ist; dabei gilt $|B| = \sup |B_f| = \sup |y_0(f)|$, so daß $y_0(f)$ beschränkt ist.

Es ist also $B = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus\, y_0(f)\,1_f$ mit $y_0(f) \in C(\mathfrak{D})$, so daß B dem Kern des Integrals $\int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ angehört. Damit ist bewiesen, daß E mit dem Kern dieses Integrals übereinstimmt.

Da die Menge $T = \left\{\sum\limits_k B_k A_k : B_k \in E,\ A_k \in R\right\}$ in $R \cup E$ dicht ist, bildet auch

$$\left\{\sum_k B_{k,f} A_{k,f} : B_k \in E,\ A_k \in R\right\} = \left\{\sum_k x_k(f)\, A_{k,f} : x_k \in C(\mathfrak{D}),\ A_k \in R\right\} = R_f$$

eine in $(R \cup E)_f$ dichte Menge; daher ist $R_f = (R \cup E)_f$, und fast alle R_f sind irreduzibel.

Diese Überlegungen lassen sich in dem folgenden Satz zusammenfassen:

Theorem 6. *Ist R eine* Banach*sche symmetrische Algebra von Operatoren eines* Hilbert*schen Raumes $\mathfrak{H}$ und E die Diagonalalgebra zu R, so läßt sich $\mathfrak{H}$ derart als topologisches direktes Integral $\mathfrak{H} = \int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ auffassen, daß*

a) *der Kern dieses Integrals mit E übereinstimmt;*

b) *$R = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus\, R_f$ ist, wobei lokal fast alle R_f (im Sinne des Maßes ϱ) irreduzibel sind.*

5. Die Zerlegung der Darstellung einer symmetrischen Algebra in irreduzible Darstellungen. Gegeben sei eine symmetrische Darstellung $x \to A_x$ einer symmetrischen Algebra R in einem Hilbertschen Raum $\mathfrak{H}$. Enthält R nicht das Einselement, so bezeichnen wir mit R_1 diejenige Algebra, die wir aus R durch Adjunktion des Einselements erhalten. Enthält jedoch R schon das Einselement, so setzen wir $R_1 = R$. Die Darstellung $x \to A_x$ läßt sich auf natürliche Weise zu der Darstellung $x \to A_x$ der Algebra R_1 fortsetzen. Wir bezeichnen nun mit $\mathfrak{R}_1$ das Bild der Algebra R_1 bei dieser Darstellung und mit K die abgeschlossene Hülle der Algebra $\mathfrak{R}_1$ bezüglich ihrer Operatornorm. Wenden wir auf K Theorem 4 aus Nr. 2 an, so können wir $\mathfrak{H}$ als topologisches direktes Integral $\mathfrak{H} = \int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ auffassen, so daß $K = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus\, K_f$ ist, wobei fast alle K_f irreduzibel sind. Insbesondere läßt sich jeder Operator $A_x \in \mathfrak{R}_1$ in der Gestalt $A_x = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus\, A_{x,f}$ darstellen. Die Darstellungen $x \to A_x$ und $A_x \to A_{x,f}$ erzeugen eine Darstellung $x \to A_{x,f}$ der Algebra R_1 und demzufolge der Algebra R.

Bezeichnen wir nun mit $\mathfrak{R}_{1,f}$ und $\mathfrak{R}_f$ die Bilder der Algebren R_1 bzw. R bei der Darstellung $x \to A_{x,f}$, so erhalten wir $\mathfrak{R}_{1,f}$ offenbar aus $\mathfrak{R}_f$ durch Adjunktion des Einsoperators. Außerdem ist, da $\mathfrak{R}_1$ bezüglich der Operatornorm von $\mathfrak{H}$ in K dicht ist, $\mathfrak{R}_{1,f}$ bezüglich der Operatornorm von $\mathfrak{H}_f$ in K_f dicht. Also gilt $(\mathfrak{R}_f)' = (\mathfrak{R}_{1,f})' = (K_f)'$ auch für lokal fast alle $f \in \mathfrak{D}$, d. h., es ist

$(\mathfrak{R}_f)' = (\alpha 1_f)$ und somit $\mathfrak{R}_f$ irreduzibel. Das bedeutet, daß auch die Darstellung $x \to A_{x,f}$ irreduzibel ist.

Aus diesen Überlegungen folgt der Satz:

Theorem 7. *Gegeben sei eine symmetrische Darstellung $x \to A_x$ einer symmetrischen Algebra R in einem* HILBERT*schen Raum $\mathfrak{H}$. Dann können wir $\mathfrak{H}$ als topologisches direktes Integral $\mathfrak{H} = \int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ auffassen, so daß $A_x = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus A_{x,f}$ und für lokal fast alle $f \in \mathfrak{D}$ (im Sinne des Maßes ϱ) die Darstellung $x \to A_{x,f}$ irreduzibel ist.*

Wir wollen sagen, daß *die Darstellung $x \to A_x$ in das topologische direkte Integral der Darstellungen $x \to A_{x,f}$ zerlegt ist.*

6. Die Zerlegung der unitären Darstellungen einer lokal bikompakten Gruppe in irreduzible Darstellungen.

Theorem 8. *Gegeben sei eine stetige unitäre Darstellung $g \to U_g$ einer lokal bikompakten Gruppe $\mathfrak{G}$ in einem* HILBERT*schen Raum $\mathfrak{H}$. Dann läßt sich der Raum $\mathfrak{H}$ als topologisches direktes Integral $\mathfrak{H} = \int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ auffassen, das den folgenden Bedingungen genügt:*

a) *Es ist $U_g = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus U_g^f$;*

b) *in $\mathfrak{D}$ existiert eine bezüglich ϱ lokale Nullmenge N derart, daß $\mathfrak{H}_f$ für jedes $f \in \mathfrak{D} - N$ von (0) verschieden ist, und $g \to U_g^f$ ist eine irreduzible stetige unitäre Darstellung der Gruppe $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_f$.*

Beweis. Offenbar brauchen wir diesen Satz nur für eine zyklische Darstellung zu beweisen, denn danach können wir dasselbe Verfahren wie im Beweis von Theorem 4 aus Nr. 2 anwenden.

Es sei also $g \to U_g$ eine zyklische Darstellung und ξ^0 ein zyklischer Vektor. Dieser Darstellung entspricht eine zyklische Darstellung $x \to A_x$ der Gruppenalgebra $R(\mathfrak{G})$ von $\mathfrak{G}$. Ist R die minimale BANACHsche symmetrische Algebra von Operatoren aus $\mathfrak{H}$, die alle A_x, $x \in R(\mathfrak{G})$, enthält, so ist offenbar ξ^0 ein bezüglich R zyklischer Vektor. Wenden wir auf R das Theorem 3 aus Nr. 2 an, so erhalten wir den Raum $\mathfrak{H}$ als direktes Integral $\mathfrak{H} = \int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f' \sqrt{d\varrho}$, so daß $R = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus R_f$ ist. Dabei gilt:

1. Die Basis $\mathfrak{S}'$ dieses Integrals enthält eine Funktion $\xi^0 = \xi^0(f)$, für die jeder Wert $\xi^0(f)$ ein zyklischer Vektor der Algebra R_f von $\mathfrak{H}_f'$ ist, der der Bedingung $|\xi^0(f)| = 1$ genügt.

2. Es existiert eine Menge N_1 vom ϱ-Maß Null derart, daß R_f für $f \in \mathfrak{D} - N_1$ irreduzibel ist.

Wegen $A_x \in R$ ist $A_x = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus A_x^f$, und für jedes feste $f \in \mathfrak{D}$ ist die Zuordnung $x \to A_x^f$ eine für $f \in \mathfrak{D} - N_1$ irreduzible Darstellung der Algebra $R(\mathfrak{G})$.

Es sei N_2 die Menge derjenigen $f \in \mathfrak{D}$, für die die Darstellung $x \to A_x^f$ eine ausgeartete Darstellung enthält, und Q^f derjenige Teilraum von $\mathfrak{H}_f'$, auf dem die Darstellung $x \to A_x^f$ ausartet.

Wir setzen

$$\mathfrak{H}_f = \mathfrak{H}'_f \quad \text{für} \quad f \in \mathfrak{D} - N_2,$$
$$\mathfrak{H}_f = \mathfrak{H}'_f - Q^f \quad \text{für} \quad f \in N_2$$

und betrachten die Zuordnung $x \to A^f_x$ als Darstellung in $\mathfrak{H}_f$. Für $\mathfrak{H}_f \neq (0)$ entspricht der Darstellung $x \to A^f_x$ die stetige unitäre Darstellung $g \to U^f_g$ der Gruppe $\mathfrak{G}$ in $\mathfrak{H}_f$, die für $f \in \mathfrak{D} - N_1$ irreduzibel ist. Setzen wir $U^f_g = 0$ für $\mathfrak{H}_f = (0)$, so ist der Operator U^f_g für alle $f \in \mathfrak{D}$ definiert.

Aus der Definition der Räume $\mathfrak{H}_f$ folgt, daß die Menge aller Vektoren $A_x \xi^0$, $x \in L^1(\mathfrak{G})$, eine Basis des topologischen Integrals $\int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$ ist. Da $\mathfrak{S}$ eine in $\mathfrak{H}$ dichte Menge bildet, gilt also $\mathfrak{H} = \int\limits_{\mathfrak{D}} \mathfrak{H}_f \sqrt{d\varrho}$. Außerdem ist[1] $U_g A_x \xi^0 = A_{x_g} \xi^0$, und damit haben wir

$$U_g \mathfrak{S} \subset \mathfrak{S},$$
$$(U_g A_x \xi^0)(f) = (A_{x_g} \xi^0)(f) = A^f_{x_g} \xi^0(f) = U^f_g A_x \xi^0(f). \tag{1}$$

Die Beziehung (1) besagt, daß $U_g = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus \, U^f_g$ ist.

Es bleibt noch zu zeigen, daß $N = N_1 \cup N_2$ eine ϱ-meßbare Menge vom ϱ-Maß Null ist. Setzen wir $N'_2 = N_2 - N_1 \cap N_2$, so ist $N = N_1 \cup N'_2$, und wir brauchen nur zu beweisen, daß $\varrho(N'_2) = 0$ ist.

Es sei $f \in N'_2$; dann ist die Darstellung $x \to A^f_x$ irreduzibel und enthält eine ausgeartete Darstellung, so daß sie eine eindimensionale ausgeartete Darstellung ist. Hieraus folgt

$$A^f_x \xi^0(f) = 0 \quad \text{für alle} \quad x \in L^1(\mathfrak{G}). \tag{2}$$

Somit ist N'_2 die Gesamtheit derjenigen $f \in \mathfrak{D}$, für welche die Beziehung $|A^f_x \xi^0(f)| = 0$, $x \in L^1(\mathfrak{G})$, erfüllt ist. Da $|A^f_x \xi^0(f)|$ für jedes $x \in L^1(\mathfrak{G})$ eine stetige Funktion von f ist, muß N'_2 abgeschlossen und daher meßbar sein. Wir wollen nun noch zeigen, daß $\varrho(N'_2) = 0$ ist.

Dazu wählen wir ein x aus $L^1(\mathfrak{G})$, das die Ungleichung $|A_x \xi^0 - \xi^0| < \varepsilon$ für ein gegebenes $\varepsilon > 0$ erfüllt. Diese Ungleichung ist gleichbedeutend mit

$$\int\limits_{\mathfrak{D}} |A^f_x \xi^0(f) - \xi^0(f)|^2 \, d\varrho(f) < \varepsilon^2$$

und hat die Ungleichung

$$\int\limits_{N'_2} |A^f_x \xi^0(f) - \xi^0(f)|^2 \, d\varrho(f) < \varepsilon^2$$

zur Folge. Hieraus erhalten wir mit Hilfe von (2) und der Bedingung $|\xi_0(f)| = 1$

$$\varrho(N'_2) = \int\limits_{N'_2} d\varrho(f) = \int\limits_{N'_2} |\xi^0(f)|^2 \, d\varrho(f) < \varepsilon^2,$$

[1] Wir erinnern daran, daß x_{g_0} die durch die Formel $x_{g_0}(g) = x(g_0^{-1} g)$ definierte Funktion ist.

und da ε eine willkürliche positive Zahl ist, gilt $\varrho(N_2') = 0$.

Somit läßt sich die unitäre Darstellung $g \to U_g$ in das direkte Integral der irreduziblen unitären Darstellungen $g \to U_g^f$ zerlegen.

Für eine diskrete abzählbare Gruppe wurde das Problem der Zerlegung einer unitären Darstellung in irreduzible Darstellungen zuerst von A. N. Kolmogoroff gelöst.[1])

In der darauffolgenden Zeit wurde die Zerlegung einer gegebenen Darstellung einer Algebra oder Gruppe Gegenstand der Untersuchungen von Adelson-Welski [1], Godement [7], von Neumann [9], Mautner [2], Neumark und Fomin [1] sowie Segal [11] (vgl. hierzu den zusammenfassenden Artikel von Mackey [2])

Die vollständige Lösung dieses Problems gelang unlängst dem japanischen Mathematiker Tomita [2, 3], dessen Darlegungen wir in § 40 und in § 41, Nr. 1 bis 4, folgten. Theorem 8 aus § 41, Nr. 6, stammt von Neumark und wurde schon früher publiziert. In den oben zitierten Arbeiten von Godement, Mautner sowie Neumark und Fomin werden der Gruppe und dem Raum der Darstellung zusätzliche Beschränkungen auferlegt, und es wird nur behauptet, daß in einer Zerlegung vom Typ $U_g = \int\limits_{\mathfrak{D}} \oplus\, U_g^f$ für fast jedes $f \in \mathfrak{D}$ die Beziehung $U_g^f = V_g^f$ fast überall auf $\mathfrak{G}$ gilt, wobei $g \to V_g^f$ eine irreduzible unitäre Darstellung der Gruppe ist.

---

[1]) A. N. Kolmogoroff trug seine Ergebnisse auf der Sitzung der Moskauer Mathematischen Gesellschaft am 4. Februar 1944 vor.

ANHANG I

HALBGEORDNETE MENGEN. ZORNSCHES LEMMA

Eine Menge X von Elementen $x, y, z \ldots$ heißt *halbgeordnet*, wenn für gewisse Paare x, y dieser Elemente eine Beziehung $x < y$ mit den folgenden Eigenschaften erklärt ist:

a) $x < x$;

b) aus $x < y$ und $y < x$ folgt $x = y$;

c) aus $x < y$ und $y < z$ folgt $x < z$.

Eine halbgeordnete Menge X heißt *nach unten gerichtet*, wenn für $x, y \in X$ stets ein Element $z \in X$ existiert, für das $z < x$ und $z < y$ ist; analog wird eine *nach oben gerichtete* Menge definiert. Eine halbgeordnete Menge ist linear geordnet, wenn für je zwei voneinander verschiedene $x, y \in X$ entweder $x < y$ oder $y < x$ ist.

Das folgende Lemma, das dem ZERMELOschen Auswahlaxiom (vgl. BIRKHOFF [1], Kap. III, § 6) äquivalent ist, wird oft in der Funktionalanalysis und in anderen Gebieten der Mathematik angewendet.

ZORNsches Lemma. *Hat jede linear geordnete Teilmenge einer halbgeordneten Menge X eine obere Grenze in X, so enthält X ein maximales Element.*

In dieser Formulierung läßt sich offenbar die obere Grenze durch die untere und das maximale Element durch ein minimales ersetzen.

ANHANG II

TEILNETZE IN EINEM BIKOMPAKTEN RAUM

Eine Funktion x_α mit Werten aus einem Raum X, deren Argument α eine beliebige (nach oben) gerichtete Indexmenge $\mathfrak{A}$ durchläuft, nennen wir *Netz* (oder *gerichtetes System*) in X. Ist $\mathfrak{B}$ eine andere (nach oben) gerichtete Indexmenge, so ist die Menge $\{x_{\varphi(\beta)}, \beta \in \mathfrak{B}\}$ ein *Teilnetz* des Netzes $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$, wenn $\varphi(\beta)$ für alle $\beta \in \mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{A}$ gehört und für jedes $\alpha_0 \in \mathfrak{A}$ ein solches $\beta_0 \in \mathfrak{B}$ existiert, daß $\varphi(\beta) > \alpha_0$ für alle $\beta > \beta_0$ ist.

Satz (KELLEY [1]). *Jedes Netz $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ eines bikompakten Raumes X enthält ein konvergentes Teilnetz.*

Beweis. Wir setzen $X_\alpha = \{x_{\alpha'}, \alpha' > \alpha,\ \alpha' \in \mathfrak{A}\}$; die Mengen X_α bilden ein zentriertes System und haben daher einen gemeinsamen Berührungspunkt x. Wir wählen als Menge $\mathfrak{B}$ die Gesamtheit der Paare $\beta = \{\alpha, V\}$, wobei α zu $\mathfrak{A}$ gehört und V eine Umgebung des Punktes x ist, und ordnen die Menge $\mathfrak{B}$, indem wir $\{\alpha_1, V_1\} > \{\alpha_2, V_2\}$ setzen, wenn gleichzeitig $\alpha_1 > \alpha_2$ und $V_1 \subset V_2$ ist; für $\beta = \{\alpha, V\}$ setzen wir $\varphi(\beta) = \alpha'$, wobei $\alpha' > \alpha$ ein Element der Menge $\mathfrak{A}$ ist, für welches $x_{\alpha'}$ zu V gehört. Damit ist $x_{\varphi(\beta)} \in V$ für $\beta = \{\alpha, V\}$. Das Teilnetz $\{x_{\varphi(\beta)}, \beta \in \mathfrak{B}\}$ des Netzes $\{x_\alpha, \alpha \in \mathfrak{A}\}$ konvergiert dann gegen x, denn für jede Umgebung V_0 des Punktes x und jedes $\beta = \{\alpha, V\} > \beta_0 = \{\alpha_0, V_0\}$ gilt die Beziehung $x_{\varphi(\beta)} \in V \subset V_0$.

BEZEICHNUNGEN

1. *Mengentheoretische Bezeichnungen*:

$a \in A$	a ist ein Element der Menge A
$A \subset B$	die Menge A ist in der Menge B enthalten
$B - A$	Differenz der Mengen A und B
$A_1 \cup A_2 \cup \ldots \cup A_n$ oder $\bigcup_\alpha A_\alpha$	Vereinigung der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ bzw. A_α
$A_1 \cap A_2 \cap \ldots \cap A_n$ oder $\bigcap_\alpha A_\alpha$	Durchschnitt der Mengen $A_1, \ldots, A_n$ bzw. A_α
$\emptyset$	leere Menge

2. *Bezeichnungen von Funktionen*:

$\{a : a \in A,\ f(a) \in B\}$	Die Gesamtheit aller Punkte a der Menge A, für welche $f(a) \in B$ ist; insbesondere ist $\{a : f(a) < b\}$ für reelle Zahlenfunktionen die Gesamtheit aller reellen Zahlen a, für welche $f(a) < b$ ist (analog werden die Symbole $\{a : f(a) \leqq b\}, \{a : f(a) > b\}, \ldots$ definiert).
$f^{-1}(A)$	vollständiges Urbild der Menge A bei der Abbildung f

3. *Topologische Bezeichnungen*:

$\overline{A}$	abgeschlossene Hülle der Menge A
$U(x_0)$	Umgebung des Punktes x_0
int A	Inneres der Menge A
$X_1 \times X_2 \times \cdots \times X_n$ oder $\prod_\alpha X_\alpha$	direktes Produkt der Räume $X_1, \ldots, X_n$ bzw. X_α

LITERATUR

ACHIESER, N. I., und I. M. GLASMANN

[1] Theorie der linearen Operatoren im Hilbertschen Raum, Akademie-Verlag, Berlin 1954 (Übersetzung aus dem Russischen).

ADELSON-WELSKI, G. M. (Адельсон-Вельский, Г. М.)

[1] Spektralanalyse einer Algebra von beschränkten linearen Operatoren (Спектральный анализ кольца ограниченных линейных операторов), Dissertation, Moskau 1948.

[2] Spektralanalyse einer Algebra von beschränkten linearen Operatoren eines Hilbertschen Raumes (Спектральный анализ кольца ограниченных линейных операторов гильбертова пространства), Doklady 67, 957—959 (1949).

AMBROSE, W.

[1] Spectral resolutions of groups of unitary operators, Duke Math. Journ. 2, 589—595 (1944).

[2] Structure theorems for a special class of Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 57, 364—386 (1945).

[3] The L^2-system of a unimodular group, Trans. Amer. Math. Soc. 65, 27—48 (1949).

ANZAI, H.

[1] On compact topological rings, Proc. Imp. Acad. Japan 19, 613—615 (1943).

ARENS, R.

[1] On a theorem of Gelfand and Neumark, Proc. Nat. Acad. Sci. 32, 237—239 (1946).

[2] Representation of *-algebras, Duke Math. Journ. 14, 269—282 (1947).

[3] Linear topological division algebras, Bull. Amer. Math. Soc. 53, 623—630 (1947).

[4] Approximation in, and representation of, certain Banach algebras, Amer. Journ. Math. 71, 763—790 (1949).

[5] A generalization of normed rings, Pacific Journ. Math. 2, 455—471 (1952).

ARENS, R., and I. KAPLANSKY

[1] Topological representation of algebras, Trans. Amer. Math. Soc. 63, 457—481 (1948).

ARENS, R., and I. M. SINGER

[1] Function values as boundary integrals, Proc. Amer. Math. Soc. 5, 735—745 (1954).

BANACH, S. S.

[1] Sur les fonctionelles linéaires, I—II, Studia Math. 1, 211—216, 223—239 (1929).

[2] Théorie des opérations linéaires, Warschau 1932.

BERESANSKI, J. M. (Березанский, Ю. М.)

[1] Einige Klassen von stetigen Algebren (Некоторые классы континуальных алгебр), Doklady 72, 237—240 (1950).

[2] Über das Zentrum der Gruppenalgebra einer kompakten Gruppe (О центре группового кольца компактной группы), Doklady 72, 825—828 (1950).

[3] Hyperkomplexe Systeme mit diskreter Basis (Гиперкомплексные системы с дискретным базисом), Doklady 81, 329—332 (1951).

[4] Zur Theorie der fastperiodischen Levitanschen Folgen (К теории почти периодических последовательностей Б. М. Левитана), Doklady **81**, 493—496 (1951).
[5] Hyperkomplexe Systeme mit kompakter Basis (Гиперкомплексные системы с компактным базисом), Ukrain. Math. Journ. **3**, 184—203 (1951).
[6] Über einige mit Hilfe orthogonaler Polynome konstruierte normierte Algebren (О некоторых нормированных кольцах, построенных по ортогональным полиномам), Ukrain. Math. Journ. **3**, 412—432 (1951).

Beresanski, J. M., und S. G. Krein (Березанский, Ю. М., и С. Г. Крейн)
[1] Stetige Algebren (Континуальные алгебры), Doklady **72**, 5—8 (1950).

Birkhoff, G.
[1] Lattice theory, Amer. Math. Soc., New York 1948.

Blum, E. K.
[1] A theory of analytic functions in Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **78**, 343—370 (1955).

Bochner, S.
[1] Vorlesungen über Fouriersche Integrale, Akad. Verlagsgesellschaft, Leipzig 1932.
[2] Completely monotone functions in partially ordered spaces, Duke Math. Journ. **9**, 519—526 (1942).
[3] On a theorem of Tannaka and Krein, Ann. Math. **43**, 56—58 (1942).

Bochner, S., and R. S. Phillips
[1] Absolutely convergent Fourier expansions for non-commutative normed rings, Ann. Math. **43**, 409—418 (1942).

Bohnenblust, H., and A. Sobczyk
[1] Extensions of functionals on complex linear spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **44**, 91—93 (1938).

Bonsall, F. F.
[1] A minimal property of the norm in some Banach algebras, Journ. London Math. Soc. **29**, 156—164 (1954).

Bonsall, F. F., and A. W. Goldie
[1] Algebras which represent their linear functionals, Proc. Cambridge Phil. Soc. **49**, 1—14 (1953).
[2] Annihilator algebras, Proc. London Math. Soc. **4**, 154—167 (1954).

Bourbaki, N.
[1] Eléments des mathématiques, XIII, livre VI: Intégration, Act. Sci. et Ind., No. 1175, Hermann & Cie., Paris 1952.

Bourgin, D. G.
[1] Approximately isometric and multiplicative transformations on continuous function rings, Duke Math. Journ. **16**, 387—397 (1949).

Buck, R.
[1] Generalized group algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. **36**, 747—749 (1950).

Calkin, J. W.
[1] Two-sided ideals and congruences in the ring of bounded operators in Hilbert space, Ann. Math. **42**, 839—873 (1941).

Cameron, R. H.
[1] Analytic functions of absolutely convergent generalized trigonometric sums, Duke Math. Journ. **3**, 682—688 (1937).

Cartan, H.
[1] Sur la mesure de Haar, C. R. Paris **211**, 759—762 (1940).

CARTAN, H., et R. GODEMENT

[1] Théorie de la dualité et analyse harmonique dans les groupes abéliens localement compacts, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **64**, 79—99 (1947).

ČECH, E.

[1] On bicompact spaces, Ann. Math. **38**, 823—844 (1937).

CHALILOW, S. I. (Халилов, З. И.)

[1] Lineare singuläre Gleichungen in normierten Algebren (Линейные сингулярные уравнения в нормированных кольцах), Doklady **58**, 1613—1616 (1947).

CHARLES, B.

[1] Sur certains anneaux commutatifs d'opérateurs linéaires, C. R. Paris **236**, 990 (1953).

[2] Sur l'algèbre des opérateurs linéaires, Journ. Math. pures et appl. **33**, 81—145 (1954).

CHEVALLEY, C., and O. FRINK

[1] Bicompactness of cartesian products, Bull. Amer. Math. Soc. **47**, 612—614 (1941).

CHURGIN, J. I. (Хургин, Я. И.)

[1] Über Teilalgebren der Algebra der im Kreis stetigen Funktionen (О подкольцах кольца непрерывных функций в круге), Wiss. Abh. Univ. Moskau, Ser. Math., **3**, 165—167 (1950).

CHURGIN, J. I., und N. I. STSCHETININ (Хургин, Я. И., и Н. И. Щетинин)

[1] Über abgeschlossene Teilalgebren der Algebra der n-mal stetig differenzierbaren Funktionen (О замкнутых подкольцах кольца функций с n непрерывными производными), Doklady **29**, 288—291 (1940).

COURANT, R., und D. HILBERT

[1] Methoden der mathematischen Physik, Bd. I, Springer, Berlin 1937.

DANIELL, P. J.

[1] A general form of integral, Ann. Math. **29**, 279—294 (1917/1918).

[2] Further properties of the general integral, Ann. Math. **31**, 203—220 (1919/1920).

[3] The integral and its generalizations, Rice Institute Pamphlet 8, 34—62 (1921).

VAN DANTZIG, D.

[1] Zur topologischen Algebra, I, Math. Ann. **107**, 587—626 (1932).

DARSOW, W. F.

[1] Positive definite functions and states, Ann. Math. **60**, 447—453 (1954).

DIEUDONNÉ, J. A.

[1] Une généralisation des espaces compacts, Journ. Math. pures et appl. **23**, 65—76 (1944).

[2] Recent developments in the theory of locally convex vector spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **59**, 495—512 (1953).

DITKIN, W. A. (Диткин, В. А.)

[1] Untersuchung der Struktur der Ideale normierter Algebren (Исследование строения идеалов в некоторых нормированных кольцах), Wiss. Abh. Univ. Moskau **30**, 83—130 (1939).

DIXMIER, J.

[1] Mésure de Haar et trace d'un opérateur, C. R. Paris **228**, 152—154 (1949).

[2] Les anneaux d'opérateurs de classe finie, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **66**, 209—261 (1949).

[3] Les fonctionnelles linéaires sur l'ensemble des opérateurs bornés d'un espace de Hilbert, Ann. Math. **51**, 387—408 (1950).

[4] Applications $\natural$ dans les anneaux d'opérateurs, C. R. Paris **230**, 607—608 (1950).

[5] Sur la réduction des anneaux d'opérateurs, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **68**, 185—201 (1951).

[6] Sur certains espaces considérés par M. H. Stone, Sum. Bras. Math. **11**, 151—182 (1951).

[7] Applications ♮ dans les anneaux d'opérateurs, Compositio Math. **10**, 1—55 (1952).

[8] Remarques sur les applications ♮, Arch. Math. **3**, 290—297 (1952).

[9] Algèbres quasi-unitaires, Comm. Math. Helv. **26**, 275—322 (1952).

[10] Formes linéaires sur un anneau d'opérateurs, Bull. Soc. Math. France **81**, 9—39 (1953).

[11] Sur les anneaux d'opérateurs dans les espaces hilbertiens, C. R. Paris **238**, 439—441 (1954).

[12] Les algèbres d'opérateurs dans l'espace hilbertien (Algèbres de von Neumann), Gauthier-Villars, Paris 1957.

Dunford, N.

[1] Resolutions of the identity for commutative B^*-algebras of operators, Acta Szeged **12**, 51—56 (1950).

[2] Spectral operators, Pacific Journ. Math. **4**, 321—354 (1954).

Dye, H. A.

[1] The Radon-Nikodym theorem for finite rings of operators, Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 243—280 (1952).

[2] The unitary structure in finite rings of operators, Duke Math. Journ. **20**, 55—70 (1953).

[3] On the geometry of projections in certain operator algebras, Ann. Math. **61**, 73—89 (1955).

Edwards, R. E.

[1] Multiplicative norms on Banach algebras, Proc. Cambridge Phil. Soc. **47**, 473—474 (1951).

Ehrenpreis, L., and F. Mautner

[1] Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups, I, Ann. Math. **61**, 406—439 (1955).

Eidelheit, M.

[1] On isomorphisms of rings of linear operators, Studia Math. **9**, 97—105 (1940).

Fage, M. K. (Фаге, М. К.)

[1] Spektralmannigfaltigkeiten eines beschränkten linearen Operators im Hilbertschen Raum (Спектральные многообразия ограниченного линейного оператора в гильбертовом пространстве), Doklady **58**, 1609—1612 (1947).

Fell, J. M. G., and J. L. Kelley

[1] An algebra of unbounded operators, Proc. Nat. Acad. Sci. **38**, 592—598 (1952).

Freundlich, M.

[1] Completely continuous elements of a normed ring, Duke Math. Journ. **16**, 273—283 (1949).

Fuglede, B., and R. V. Kadison

[1] On determinants and a property of the trace in finite factors, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 425—431 (1951).

[2] On a conjecture of Murray and von Neumann, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 420—425 (1951).

[3] Determinant theory in finite factors, Ann. Math. **55**, 520—530 (1952).

Fukamiya, M.

[1] On a theorem of Gelfand and Neumark and the B^*-algebra, Kumamoto Journ. Sci., Ser. A, **1**, 17—22 (1952).

Fukamiya, M., Y. Misonou and Z. Takeda

[1] On order and commutativity of B^*-algebra, Tôhoku Math. Journ. (2) **6**, 38—52 (1954).

Gelfand, I. M. (Гельфанд, И. М.)

[1] Über normierte Algebren (О нормированных кольцах), Doklady **23**, 430—432 (1939).

[2] Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale (Об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах), Doklady **25**, 571—574 (1939).

[3] Über eine Algebra fastperiodischer Funktionen (О кольце почти периодических функций), Doklady **25**, 575—577 (1939).

[4] Normierte Algebren (Нормированные кольца), Mat. Sbornik **9** (51), 3—24 (1941).

[5] Ideale und primäre Ideale in normierten Algebren (Идеалы и примарные идеалы в нормированных кольцах), Mat. Sbornik **9** (51), 41—48 (1941).

[6] Zur Theorie der Charaktere abelscher topologischer Gruppen (К теории характеров абелевых топологических групп), Mat. Sbornik **9** (51), 49—50 (1941).

[7] Über absolut konvergente trigonometrische Reihen und Integrale (Об абсолютно сходящихся тригонометрических рядах и интегралах), Mat. Sbornik **9** (51), 51—66 (1941).

[8] Kugelfunktionen auf symmetrischen Riemannschen Räumen (Сферические функции на симметрических римановых пространствах), Doklady **70**, 5—8 (1950).

[9] Das Zentrum einer infinitesimalen Gruppenalgebra (Центр инфинитезимального группового кольца), Mat. Sbornik **26** (68), 103—112 (1950).

Gelfand, I. M., und M. I. Grajew (Гельфанд, И. М., и М. И. Граев)

[1] Ein Analogon der Plancherelschen Formel für die klassischen Gruppen (Аналог формулы Планшереля для классических групп), Arb. Mosk. Math. Ges. **4**, 375—404 (1955).

Gelfand, I. M., und A. N. Kolmogoroff (Гельфанд, И. М., и А. Н. Колмогоров)

[1] Über Algebren stetiger Funktionen auf topologischen Gruppen (О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах), Doklady **22**, 11—15 (1939).

Gelfand, I. M., und M. A. Neumark (Гельфанд, И. М., и М. А. Наймарк)

[1] Über die Einbettung einer normierten Algebra in die Algebra der Operatoren eines Hilbertschen Raumes (О включении нормированного кольца в кольцо операторов в гильбертовом пространстве), Mat. Sbornik **12** (54), 197—213 (1943).

[2] Unitary representations of the Lorentz group, Journ. Phys. **10**, 93—94 (1946).

[3] Unitäre Darstellungen der Gruppe der linearen Transformationen einer Geraden (Унитарные представления группы линейных преобразований прямой), Doklady **55**, 571—574 (1947).

[4] Unitäre Darstellungen der Lorentzgruppe (Унитарные представления группы Лоренца), Iswestija, ser. mat., **11**, 411—504 (1947).

[5] Ein Analogon zur Plancherelschen Formel für komplexe unimodulare Gruppen (Аналог формулы Планшереля для комплексной унимодулярной группы), Doklady **63**, 609—612 (1948).

[6] Algebren mit Involution und ihre Darstellungen (Кольца с инволюцией и их представления), Iswestija, ser. mat., **12**, 445—480 (1948).

[7] Unitäre Darstellungen der klassischen Gruppen, Akademie-Verlag, Berlin 1957 (Übersetzung aus dem Russischen).

[8] Unitäre Darstellungen von unimodularen Gruppen, die die Einheitsdarstellung der unitären Untergruppe enthalten (Унитарные представления унимодулярной группы, содержащие единичное представление унитарной подгруппы), Arb. Mosk. Math. Ges. **1**, 423—475 (1952).

GELFAND, I. M., und D. A. RAIKOW (Гельфанд, И. М., и Д. А. Райков)
[1] Zur Theorie der Charaktere kommutativer topologischer Gruppen (К теории характеров коммутативных топологических групп), Doklady 28, 195—198 (1940).
[2] Irreduzible unitäre Darstellungen lokal bikompakter Gruppen (Неприводимые унитарные представления локально бикомпактных групп), Mat. Sbornik 13 (55), 301—316 (1943).

GELFAND, I. M., D. A. RAIKOW und G. E. SCHILOW (Гельфанд, И. М., Д. А. Райков и Г. Е. Шилов)
[1] Kommutative normierte Algebren (Коммутативные нормированные кольца), Uspechi mat. nauk 1: 2, 48—146 (1946).

GELFAND, I. M., und G. E. SCHILOW (Гельфанд, И. М., и Г. Е. Шилов)
[1] Über verschiedene Methoden, in der Menge der maximalen Ideale einer normierten Algebra eine Topologie einzuführen (О различных методах введения топологии в множестве максимальных идеалов нормированного кольца), Mat. Sbornik 9 (51), 25—38 (1941).

GILLMAN, L., H. HENRIKSEN and M. JERISON
[1] On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. 5, 447—455 (1954).

GODEMENT, R.
[1] Extension à un groupe abélien quelconque des théorèmes taubériens de N. Wiener et d'un théorème de A. Beurling, C. R. Paris 223, 16—18 (1946).
[2] Théorèmes taubériens et théorie spectrale, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) 64, 119—138 (1947).
[3] Les fonctions de type positif et la théorie des groupes, Trans. Amer. Math. Soc. 63, 1—84 (1948).
[4] Théorie générale des sommes continues d'espaces de Banach, C. R. Paris 228, 1321—1323 (1949).
[5] L'analyse harmonique dans les groupes non abéliens, Analyse Harmonique, Colloques Intern. 15, supplement, Centre National de la Recherche Scientifique, Paris 1949.
[6] Some unsolved problems in the theory of group representations, Proc. Internat. Congr. Math. Cambridge 2, 106—111 (1950).
[7] Sur la théorie des représentations unitaires, Ann. Math. 53, 68—124 (1951).
[8] Mémoire sur la théorie des caractères dans les groupes localement compacts unimodulaires, Journ. Math. pures et appl. 30, 1—110 (1951).
[9] A theory of spherical functions, I, Trans. Amer. Math. Soc. 73, 496—556 (1952).
[10] Théorie des caractères, I: Algèbres unitaires, Ann. Math. 59, 47—62 (1954).
[11] Théorie des caractères, II: Définition et propriétés générales des caractères, Ann. Math. 59, 63—85 (1954).

GRIFFIN, E.
[1] Some contributions to the theory of rings of operators, Trans. Amer. Math. Soc. 75, 471—504 (1953).

GUREVITCH, A.
[1] Unitary representation in Hilbert space of a compact topological group, Mat. Sbornik 13 (55), 79—86 (1943).

HAAR, A.
[1] Der Maßbegriff in der Theorie der kontinuierlichen Gruppen, Ann. Math. 34, 137—169 (1933).

HAHN, H.
[1] Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen, Journ. reine u. angew. Math. 157, 214—229 (1926).

HARISH-CHANDRA

[1] Representations of semisimple Lie groups on a Banach space, I—VI, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 170—173, 362—365, 366—369, 691—694 (1951); **40**, 1076—1077, 1078—1080 (1954).

[2] Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 813—818 (1951).

[3] Plancherel formula for the 2×2 real unimodular group, Proc. Nat. Acad. Sci. **38**, 337—342 (1952).

[4] Representations of semisimple Lie groups, I—III, Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 185—243 (1953); **76**, 26—65, 234—253 (1954).

[5] The Plancherel formula for complex semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 485—528 (1954).

HAUSDORFF, F.

[1] Mengenlehre, 3. Aufl., W. de Gruyter, Berlin 1934.

HELGASON, S.

[1] The derived algebra of a Banach algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. **40**, 994—999 (1954).

HELSON, H.

[1] On the ideal structure of group algebras, Ark. Mat. **2**, 83—86 (1952).

HENRIKSEN, M.

[1] On the ideal structure of the ring of entire functions, Pacific Journ. Math. **2**, 179—184 (1952).

HERGLOTZ, G.

[1] Über Potenzreihen mit positivem reellem Teil im Einheitskreis, Ber. Akad. Wiss. Leipzig **63**, 501—511 (1911).

HERSTEIN, I. N.

[1] Group-rings as *-algebras, Publ. Math. Debrecen **1**, 201—204 (1950).

[2] Une note sur un article de M. Turumaru, Portugaliae Math. **12**, 113—114 (1953).

[3] A theorem on rings, Canadian Journ. Math. **5**, 174—175 (1953).

HEWITT, E.

[1] Rings of real-valued continuous functions, I, Trans. Amer. Math. Soc. **64**, 45—99 (1948).

[2] A note on normed algebras, Anais Acad. Brasil. Ci. **22**, 171—174 (1950).

HILLE, E.

[1] On the theory of characters of groups and semi-groups in normed vector rings, Proc. Nat. Acad. Sci. **30**, 58—60 (1944).

HILLE, E., and R. S. PHILLIPS

[1] Functional analysis and semigroups, Amer. Math. Soc., New York 1957.

ISEKI, K.

[1] On B^*-algebras, Nederl. Akad. Wetensch. Proc., Ser. A, **15**, 12—14 (1953).

ITÔ, S.

[1] Positive definite functions on homogeneous spaces, Proc. Japan Acad. **26**, 17—28 (1950).

[2] Unitary representations of some linear groups, I—II, Nagoya Math. Journ. **4**, 1—13 (1952); **5**, 79—96 (1953).

IWASAWA, K.

[1] On group rings of topological groups, Proc. Imp. Acad. Japan **20**, 67—70 (1944).

JACOBSON, N.

[1] The radical and semisimplicity for arbitrary rings, Amer. Journ. Math. **67**, 300—320 (1945).

[2] A topology for the set of primitive ideals in an arbitrary ring, Proc. Nat. Acad. Sci. **31**, 333—338 (1945).
[3] On the theory of primitive rings, Ann. Math. **48**, 8—21 (1947).

JACOBSON, N., and C. RICKART
[1] Jordan homomorphisms of rings, Trans. Amer. Math. Soc. **69**, 479—502 (1950).

KADISON, R.
[1] A representation theory for commutative topological algebra, Mem. Amer. Math. Soc. **7** (1951).
[2] Isometries of operator algebras, Ann. Math. **54**, 325—338 (1951).
[3] A generalized Schwarz inequality and algebraic invariants for operator algebras, Ann. Math. **56**, 494—503 (1952).
[4] Infinite unitary groups, Trans. Amer. Math. Soc. **72**, 386—395 (1952).
[5] Infinite general linear groups, Trans. Amer. Math. Soc. **76**, 66—91 (1954).
[6] The general linear group of infinite factors, Duke Math. Journ. **22**, 119—122 (1955).
[7] Multiplicity theory for operator algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. **41**, 169—173 (1955).

KAPLANSKY, I.
[1] Topological rings, Amer. Journ. Math. **69**, 153—183 (1947).
[2] Topological rings, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 809—826 (1948).
[3] Dual rings, Ann. Math. **49**, 689—701 (1948).
[4] Rings with polynomial identity, Bull. Amer. Math. Soc. **54**, 575—580 (1948).
[5] Regular Banach algebras, Journ. Indian Math. Soc., N. S., **12**, 57—62 (1948).
[6] Locally compact rings, Amer. Journ. Math. **70**, 447—459 (1948).
[7] Groups with representations of bounded degree, Canadian Journ. Math. **1**, 105 bis 112 (1949).
[8] Primary ideals in group algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. **35**, 133—136 (1949).
[9] Normed algebras, Duke Math. Journ. **16**, 399—418 (1949).
[10] Topological representation of algebras, II, Trans. Amer. Math. Soc. **68**, 62—75 (1950).
[11] Quelques résultats sur les anneaux d'opérateurs, C. R. Paris **231**, 485—486 (1950).
[12] Topological algebras, Proc. Internat. Congr. Math. Cambridge **2**, 112—113 (1950).
[13] The structure of certain operator algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **70**, 219—255 (1951).
[14] Locally compact rings, II, Amer. Journ. Math. **73**, 20—24 (1951).
[15] Group algebras in the large, Tôhoku Math. Journ. (2) **3**, 249—256 (1951).
[16] Projections in Banach algebras, Ann. Math. **53**, 235—249 (1951).
[17] A theorem on rings of operators, Pacific Journ. Math. **1**, 227—232 (1951).
[18] Symmetry of Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **3**, 396—399 (1952).
[19] Algebras of type I, Ann. Math. **56**, 460—472 (1952).
[20] Modules over operator algebras, Amer. Journ. Math. **75**, 839—858 (1953).
[21] Ring isomorphisms of Banach algebras, Canadian Journ. Math. **6**, 374—381 (1954).

KAWADA, Y.
[1] Über den Dualitätssatz der Charaktere nichtkommutativer Gruppen, Proc. Math. Phys. Japan **24**, 97—109 (1942).
[2] On the group ring of a topological group, Math. Japonicae **1**, 1—5 (1948).
[3] Über die Erweiterung der maximalen Ideale in normierten Ringen, Proc. Imp. Acad. Japan **19**, 267—268 (1943).
[4] Über den Operatorenring Banachscher Räume, Proc. Imp. Acad. Japan **19**, 616—621 (1943).

KELLEY, J. L.
[1] Convergence in topology, Duke Math. Journ. **17**, 277—283 (1950).
[2] Commutative operator algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. **38**, 598—605 (1952).

KELLEY, J. L., and R. L. VAUGHT

[1] The positive cone in Banach algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **74**, 44–55 (1953).

KODAIRA, K., and S. KAKUTANI

[1] Normed ring of a locally compact abelian group, Proc. Imp. Acad. Japan **19**, 360—365 (1943).

KOEHLER, F.

[1] Note on a theorem of Gelfand and Šilov, Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 541—543 (1951).

KÖTHE, G.

[1] Abstrakte Theorie nichtkommutativer Ringe mit einer Anwendung auf die Darstellungstheorie kontinuierlicher Gruppen, Math. Ann. **103**, 545—572 (1930).

KOLMOGOROFF, A. N.

[1] Zur Normierbarkeit eines allgemeinen topologischen linearen Raumes, Studia Math. **5**, 29—33 (1934).

KONDÓ, M.

[1] Les anneaux des opérateurs sur un espace de S. Banach et quelques problèmes qui s'y rattachent, I, Journ. Math. Tokyo **1**, 35—54 (1951).

KORNBLUM, B. I. (Коренблюм, Б. И.)

[1] Über einige spezielle kommutative normierte Algebren (О некоторых специальных коммутативных нормированных кольцах), Doklady **64**, 281—284 (1949).

KOWALSKY, H.

[1] Beiträge zur topologischen Algebra, Math. Nachr. **3**, 143—145 (1954).

KREIN, M. G. (Крейн, М. Г.)

[1] Über positive additive Funktionale in linearen normierten Räumen (Про позитивні адитивні функціонали в лінійних нормованих просторах), Commun. Soc. Math. Charkow (4) **14**, 227—237 (1937).

[2] Grundeigenschaften normaler konischer Mengen in einem Banachschen Raum (Основные свойства нормальных конических множеств в пространстве Банаха), Doklady **28**, 13—17 (1940).

[3] Über Algebren von Funktionen, die auf einer topologischen Gruppe definiert sind (Об одном кольце функций, определенных на топологической группе), Doklady **29**, 275—280 (1940).

[4] Über eine spezielle Algebra von Funktionen (Об одном специальном кольце функций), Doklady **29**, 355—359 (1940).

[5] Zur Theorie der fastperiodischen Funktionen auf einer topologischen Gruppe (К теории почти периодических функций на топологической группе), Doklady **30**, 5—8 (1941).

[6] Über positive Funktionale auf fastperiodischen Funktionen (О положительных функционалах на почти периодических функциях), Doklady **30**, 9—12 (1941).

[7] Über eine Verallgemeinerung des Plancherelschen Satzes auf Fouriersche Integrale auf einer kommutativen topologischen Gruppe (Об одном обобщении теоремы Планшереля на случай интегралов Фурье на коммутативной топологической группе), Doklady **30**, 482—486 (1941).

[8] Das Dualitätsprinzip für eine bikompakte Gruppe und eine quadratische Blockmatrix (Принцип двойственности для бикомпактной группы и квадратной блок-матрицы), Doklady **69**, 725—728 (1949).

[9] Hermitesch-positive Kerne auf homogenen Räumen (Эрмитово-положительные ядра на однородных пространствах), I—II, Ukrain. Math. Journ. **1**, 64—98 (1949); **2**, 10—59 (1950).

KREIN, M. G., and D. P. MILMAN

[1] On extreme points of regularly convex sets, Studia Math. **9**, 133—138 (1940).

Krein, M. G., und M. A. Rutman (Крейн, М. Г., и М. А. Рутман)

[1] Lineare Operatoren, die einen Kegel im Banachschen Raum invariant lassen (Линейные операторы, оставляющие инвариантным конус в пространстве Банаха), Uspechi mat. nauk 3: 1, 3—95 (1948).

Krein, M. G., and W. L. Schmuljan

[1] On regularly convex sets in the space conjugate to a Banach space, Ann. Math. 41, 556—583 (1940).

Leibenson, S. L. (Лейбензон, З. Л.)

[1] Über die Algebra der auf einem Kreis stetigen Funktionen (О кольце непрерывных функций на окружности), Uspechi mat. nauk 7: 4, 163—164 (1952).

Lévy, P.

[1] Sur la convergence absolue des séries de Fourier, Compositio Math. 1, 1—14 (1924).

Lewitan, B. M. (Левитан, Б. М.)

[1] Normierte Algebren, die von dem verallgemeinerten Verschiebungsoperator erzeugt werden (Нормированные кольца, порожденные обобщенной операцией сдвига), Doklady 47, 3—6 (1945).

[2] Ein Satz über die Darstellungen positiv definiter Funktionen für den verallgemeinerten Verschiebungsoperator (Теорема о представлении положительно определенных функций для обобщенной операции сдвига), Doklady 47, 163—165 (1945).

[3] Der Plancherelsche Satz für den verallgemeinerten Verschiebungsoperator (Теорема Plancherel'я для обобщенной операции сдвига), Doklady 47, 323—326 (1945).

[4] Der Dualitätssatz für den verallgemeinerten Verschiebungsoperator (Закон двойственности для обобщенной операции сдвига), Doklady 47, 401—403 (1945).

[5] A generalization of the operation of translation and infinite hypercomplex systems, I—III, Mat. Sbornik 16 (58), 259—280 (1945); 17 (59), 9—44, 163—192 (1945).

[6] Algebren von Operatoren und die Operationen der verallgemeinerten Verschiebung (Кольца операторов и операции обобщенной сдвига), Doklady 52, 99—102 (1946).

[7] Zur Theorie der unitären Darstellungen lokal kompakter Gruppen (К теории унитарных представлений локально компактных групп), Mat. Sbornik 19 (61), 407—428 (1946).

[8] Berichtigung zur Arbeit „Verallgemeinerte Verschiebungsoperatoren und unendliche hyperkomplexe Systeme" (Исправление к статье »Обобщенные операции сдвига и бесконечные гиперкомплексные системы), Mat. Sbornik 24 (66), 501—502 (1949).

Lewitan, B. M., und A. J. Powsner (Левитан, Б. М., и А. Я. Повзнер)

[1] Sturm-Liouvillesche Differentialgleichungen auf einer Halbachse und der Plancherelsche Satz (Дифференциальные уравнения Штурма-Лиувилля на полуоси и теорема Планшереля), Doklady 52, 483—486 (1946).

Loomis, L. H.

[1] An introduction to abstract harmonic analysis, D. van Nostrand Comp., Inc., New York-Toronto-London 1953.

Lorch, E. R.

[1] The spectrum of linear transformations, Trans. Amer. Math. Soc. 52, 238—248 (1942).

[2] The theory of analytic functions in normed abelian vector rings, Trans. Amer. Math. Soc. 54, 414—425 (1943).

[3] The structure of normed abelian rings, Bull. Amer. Math. Soc. 50, 447—463 (1944).

Lubarski, G. J. (Любарский, Г. Я.)

[1] Harmonische Analyse auf einer topologischen Mannigfaltigkeit mit transitiver Gruppe (Гармонический анализ на топологическом многообразии с транзитивной группой), Dissertation, Kasan 1945.

LUSTERNIK, L. A., und W. I. SOBOLEW

[1] Elemente der Funktionalanalysis, Akademie-Verlag, Berlin 1955 (Übersetzung aus dem Russischen).

MACKEY, G.

[1] The Laplace transform for locally compact abelian groups, Proc. Nat. Acad. Sci. **34**, 156—162 (1948).

[2] Functions on locally compact groups, Bull. Amer. Math. Soc. **56**, 385—412 (1950).

MAEDA, F.

[1] Relative dimensionality in operators rings, Journ. Sci. Hiroshima Univ. **11**, 1—6 (1941).

MARKOW, A. A.

[1] On mean values and exterior densities, Mat. Sbornik 4 (46), 165—191 (1938).

MARKUSCHEWITSCH, A. I. (Маркушевич, А. И.)

[1] Theorie der analytischen Funktionen (Теория аналитических функций), Gostechisdat, Moskau-Leningrad 1950.

MATSUSHITA, S.

[1] Positive linear functionals on self-adjoint B-algebras, Proc. Japan Acad. **29**, 427—430 (1953).

MAUTNER, F. I.

[1] The completeness of the irreducible unitary representations of a locally compact group, Proc. Nat. Acad. Sci. **34**, 52—54 (1948).

[2] Unitary representations of locally compact groups, I—II, Ann. Math. **51**, 1—25 (1950); **52**, 528—556 (1950).

[3] On the decomposition of unitary representations of Lie groups, Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 490—496 (1951).

[4] A generalization of the Frobenius reciprocity theorem, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 431—435 (1951).

[5] Fourier analysis and symmetric spaces, Proc. Nat. Acad. Sci. **37**, 529—533 (1951).

[6] Induced representations, Amer. Journ. Math. **74**, 737—757 (1952).

[7] Note on the Fourier inversion formula for groups, Trans. Amer. Math. Soc. **78**, 371—384 (1955).

MAZUR, S.

[1] Sur les anneaux linéaires, C. R. Paris **207**, 1025—1027 (1938).

MICHAEL, E.

[1] Locally multiplicatively-convex topological algebras, Mem. Amer. Math. Soc. **11** (1952).

MIKUSIŃSKI, J. G.

[1] L'anneau algébrique et ses applications dans l'analyse fonctionelle, I—II, Ann. Univ. Marie Curie-Sklodowska, Ser. A, **2**, 1—48 (1947); **3**, 1—84 (1949).

[2] Sur les fondements du calcul opératoire, Studia Math. **11**, 41—70 (1949).

[3] Une nouvelle justification du calcul de Heaviside, Atti Accad. Naz. Lincei, Mem. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat. (8), Sez. I, **2**, 113—121 (1950).

[4] Operatorenrechnung, VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften, Berlin 1957 (Übersetzung aus dem Polnischen).

MILMAN, D. P. (Мильман, Д. П.)

[1] Normierbarkeit topologischer Algebren (Нормируемость топологических колец), Doklady **47**, 166—168 (1945).

[2] Charakteristik der Extremalpunkte einer regulär konvexen Menge (Характеристика экстремальных точек регулярно выпуклого множества), Doklady **57**, 119—121 (1947).

[3] Zur Theorie der Algebren mit Involution (К теории колец с инволюцией), Doklady **76**, 349—352 (1951).

MISONOU, Y.

[1] A weakly central operator algebra, Tôhoku Math. Journ (2) **4**, 194—202 (1952).

[2] Operator algebras of type I, Kôdai Math. Sem. Rep. **3**, 87—90 (1953).

MISONOU, Y., and M. NAKAMURA

[1] Centering of an operator algebra, Tôhoku Math. Journ. (2) **3**, 243—248 (1951).

MOSTOW, G. D.

[1] On the L^2-space of Lie group, Amer. Journ. Math. **74**, 920—928 (1952).

MURRAY, F. J.

[1] Linear transformations between Hilbert spaces and the application of this theory to linear partial differential equations, Trans. Amer. Math. Soc. **37**, 301—338 (1935).

MURRAY, F. J., and J. VON NEUMANN

[1] On rings of operators, I, Ann. Math. **37**, 116—229 (1936); II, Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 208—248 (1937); IV, Ann. Math. **44**, 716—808 (1943).

MYERS, S. B.

[1] Algebras of differentiable functions, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 917—922 (1954).

NAGUMO, M.

[1] Einige analytische Untersuchungen in linearen metrischen Ringen, Jap. Journ. Math. **13**, 61—80 (1936).

NAKAMURA, M.

[1] The two-sided representations of an operator algebra, Proc. Japan Acad. **27**, 172—176 (1951).

NAKAMURA, M., and Z. TAKEDA

[1] Normal states of commutative operator algebras, Tôhoku Math. Journ. (2) **5**, 109—121 (1953).

NAKAMURA, M., and H. UMEGAKI

[1] A remark on theorems of Stone and Bochner, Proc. Japan Acad. **27**, 506—507 (1951).

NAKANO, H.

[1] Hilbert algebras, Tôhoku Math. Journ. (2) **2**, 4—23 (1950).

NAKAYAMA, T.

[1] Remark on the duality for noncommutative compact groups, Proc. Amer. Math. Soc. **2**, 849—854 (1951).

VON NEUMANN, J.

[1] Zur Algebra der Funktionaloperationen und Theorie der normalen Operatoren, Math. Ann. **102**, 370—427 (1929).

[2] Über adjungierte Funktionaloperatoren, Ann. Math. **33**, 294—310 (1932).

[3] Almost periodic functions in a group, Trans. Amer. Math. Soc. **36**, 445—492 (1934).

[4] On a certain topology for rings of operators, Ann. Math. **37**, 111—115 (1936).

[5] On regular rings, Proc. Nat. Acad. Sci. **22**, 707—713 (1936).

[6] On infinite direct products, Compositio Math. **6**, 1—77 (1938).

[7] On rings of operators, III, Ann. Math. **41**, 94—161 (1940).

[8] On some algebraic properties of operator rings, Ann. Math. **44**, 709—715 (1943).

[9] On rings of operators, Reduction theory, Ann. Math. **50**, 401—485 (1949).

NEUMARK, M. A. (Наймарк, М. А.)

[1] Positiv definite Operatorfunktionen auf einer kommutativen Gruppe (Положительно определенные операторные функции на коммутативной группе), Iswestija, ser. mat., **7**, 237—244 (1943).

[2] Involutive Algebren, aus „Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis“, Verlag Kultur und Fortschritt, Berlin 1954 (Übersetzung aus dem Russischen).

[3] Operatorenalgebren im Hilbertschen Raum, aus „Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis“, Verlag Kultur und Fortschritt, Berlin 1954 (Übersetzung aus dem Russischen).
[4] Über ein Problem aus der Theorie der Algebren mit Involution (Об одной задаче теории колец с инволюцией), Uspechi mat. nauk **6**: 6, 160—164 (1951).
[5] Beschreibung aller irreduziblen unitären Darstellungen der klassischen Gruppen (Описание всех неприводимых представлений классических групп), Doklady **84**, 883—886 (1952).
[6] Über die irreduziblen linearen Darstellungen der eigentlichen Lorentzgruppe (О неприводимых линейных представлениях собственной группы Лоренца), Doklady **97**, 969—972 (1954).
[7] Ein kontinuierliches Analogon zum Schurschen Lemma (О континуальном аналоге леммы Шура), Doklady **98**, 185—188 (1954).
[8] Die linearen Darstellungen der Lorentzgruppe (Линейные представления группы Лоренца), Uspechi mat. nauk **9**: 4, 19—93 (1954).
[9] Über die Beschreibung aller unitären Darstellungen der komplexen klassischen Gruppen (Об описании всех унитарных представлений комплексных классических групп), I, Mat. Sbornik **35** (77), 317—356 (1954).

NEUMARK, M. A., und S. W. FOMIN (Наймарк, М. А., и С. В. Фомин)
[1] Stetige direkte Summen Hilbertscher Räume und einige ihrer Anwendungen (Непрерывные суммы гильбертовых пространств и некоторые их применения), Uspechi mat. nauk **10**: 2, 111—142 (1955).

ORIHARA, M., and T. TSUDA
[1] The two-sided regular representations of a locally compact group, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A, **6**, 21—29 (1951).

OTOBE, Y.
[1] Note on locally compact simple rings, Proc. Imp. Acad. Japan **20**, 283 (1944).
[2] On locally compact fields, Jap. Journ. Math. **19**, 189—202 (1945).

PALEY, R., and N. WIENER
[1] Fourier transformations in the complex domain, Amer. Math. Soc., New York 1934.

PALLU DE LE BARRIÈRE, R.
[1] Algèbres auto-adjointes faiblement fermées et algèbres hilbertiennes de classe finie, C. R. Paris **232**, 1994—1995 (1951).
[2] Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose, C. R. Paris **233**, 997—999 (1951).
[3] Isomorphisme des *-algèbres faiblement fermées d'opérateurs, C. R. Paris **234**, 795—797 (1952).
[4] Algèbres unitaires et espaces d'Ambrose, Ann. Sci. École Norm. Sup. (3) **70**, 381—401 (1953).
[5] Sur les algèbres d'opérateurs dans les espaces hilbertiens, Bull. Soc. Math. France **82**, 1—52 (1954).

PETER, F., und H. WEYL
[1] Die Vollständigkeit der primitiven Darstellungen einer geschlossenen kontinuierlichen Gruppe, Math. Ann. **97**, 737—757 (1927).

PITCHER, T.
[1] Sets of "positive" functions in H-systems, Trans. Amer. Math. Soc. **77**, 481—489 (1954).

PITT, H.
[1] General Tauberian theorems, Proc. London Math. Soc. (2) **44**, 243—288 (1938).
[2] A theorem on absolutely convergent trigonometric series, Journ. Math. and Phys. **16**, 191—195 (1938).

Plessner, A. I. (Плеснер, А. И.)

[1] Spektraltheorie der linearen Operatoren (Спектральная теория линейных операторов), I, Uspechi mat. nauk **9**, 3—125 (1941).

Plessner, A. I., und W. L. Rochlin (Плеснер, А. И., и В. Л. Рохлин)

[1] Spektraltheorie der linearen Operatoren (Спектральная теория линейных операторов), II, Uspechi mat. nauk **1**: 1, 71—191 (1946).

Pontrjagin, L. S. (Понтрягин, Л. С.)

[1] Über stetige algebraische Körper, Ann. Math. **33**, 163—174 (1932).

[2] The theory of topological commutative groups, Ann. Math. **35**, 361—388 (1934).

[3] Linear representations of compact topological groups, Mat. Sbornik **1** (43), 267 bis 271 (1936).

[4] Topologische Gruppen, Bd. I, II, B. G. Teubner, Leipzig 1957 bzw. 1958 (Übersetzung aus dem Russischen).

Powsner, A. J. (Повзнер, А. Я.)

[1] Über positive Funktionen auf einer abelschen Gruppe (О позитивных функциях на абелевой группе), Doklady **28**, 294—295 (1940).

[2] Über die Gleichungen vom Sturm-Liouvilleschen Typ und positive Funktionen (Об уравнениях типа Штурма-Лиувилля и позитивных функциях), Doklady **43**, 387—391 (1944).

[3] Über die Gleichungen vom Sturm-Liouvilleschen Typ auf der Halbachse (Об уравнениях типа Штурма-Лиувилля на полуоси), Doklady **53**, 299—302 (1946).

[4] Über eine allgemeine Transformationsformel vom Plancherelschen Typ (Об одной общей формуле обращения типа Планшереля), Doklady **57**, 123—125 (1947).

[5] Über das Spektrum beschränkter Funktionen (О спектре ограниченных функций), Doklady **57**, 755—758 (1947).

[6] Über das Spektrum beschränkter Funktionen und die Laplacetransformation (О спектре ограниченных функций и преобразовании Лапласа), Doklady **57**, 871—874 (1947).

[7] Über Differentialgleichungen vom Sturm-Liouvilleschen Typ auf der Halbachse (О дифференциальных уравнениях типа Штурма-Лиувилля на полуоси), Mat. Sbornik **23** (65), 3—52 (1948).

Raikow, D. A. (Райков, Д. А.)

[1] Über positiv definite Funktionen (О положительно определенных функциях), Doklady **26**, 857—862 (1940).

[2] Positiv definite Funktionen auf diskreten kommutativen Gruppen (Положительно определенные функции на дискретных коммутативных группах), Doklady **27**, 325—329 (1940).

[3] Positiv definite Funktionen auf kommutativen Gruppen mit invariantem Maß (Положительно определенные функции на коммутативных группах с инвариантной мерой), Doklady **28**, 296—300 (1940).

[4] Der verallgemeinerte Dualitätssatz für kommutative Gruppen mit invariantem Maß (Обобщенный закон двойственности для коммутативных групп с инвариантной мерой), Doklady **30**, 583—585 (1941).

[5] Die harmonische Analyse auf kommutativen Gruppen mit Haarschem Maß und die Theorie der Charaktere, aus „Sowjetische Arbeiten zur Funktionalanalysis", Verlag Kultur und Fortschritt, Berlin 1954 (Übersetzung aus dem Russischen).

[6] Zur Theorie der normierten Algebren mit Involution (К теории нормированных колец с инволюцией), Doklady **54**, 391—394 (1946).

[7] Über verschiedene Arten der Konvergenz positiv definiter Funktionen (О различных типах сходимости положительно определенных функций), Doklady 58, 1279—1282 (1947).

Ramaswami, V.
[1] Normed algebras, isomorphism and the associative postulate, Journ. Indian Math. Soc. **14**, 47—64 (1950).
[2] On a theorem of Gelfand and Hille, Journ. Indian Math. Soc. **14**, 129—138 (1950).
Reiter, H.
[1] Investigations in harmonic analysis, Trans. Amer. Math. Soc. **73**, 401—427 (1952).
[2] On a certain class of ideals in the L^1-algebra of a locally compact abelian group, Trans. Amer. Math. Soc. **75**, 505—509 (1953).
[3] Über L^1-Räume auf Gruppen, I—II, Monatsh. f. Math. **58**, 73—76, 172—180 (1954).
Rickart, C. E.
[1] Banach algebras with an adjoint operation, Ann. Math. **47**, 528—550 (1946).
[2] The singular elements of a Banach algebra, Duke Math. Journ. **14**, 1066—1077 (1947).
[3] The uniqueness of norm problem in Banach algebras, Ann. Math. **51**, 615—628 (1950).
[4] Representations of certain Banach algebras on Hilbert space, Duke Math. Journ. **18**, 27—39 (1951).
[5] On spectral permanence for certain Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 191—196 (1953).
Rochlin, W. A. (Рохлин, В. А.)
[1] Unitäre Algebren (Унитарные кольца), Doklady **59**, 643—649 (1948).
Rosenberg, A.
[1] The number of irreducible representations of simple rings with no minimal ideals, Amer. Journ. Math. **75**, 523—530 (1953).
Rumschiski, L. S. (Румшиский, Л. З.)
[1] Über einige Klassen positiver Funktionen (О некоторых классах позитивных функций), Doklady **33**, 105—108 (1941).
Sakai, S.
[1] A remark on Mautner's decomposition, Kôdai Math. Sem. Rep. **2**, 107—108 (1952).
Schilow, G. E. (Шилов, Г. Е.)
[1] Ideale und Teilalgebren einer Algebra stetiger Funktionen (Идеалы и подкольца кольца непрерывных функций), Doklady **22**, 7—10 (1939).
[2] Zur Theorie der Ideale in normierten Algebren von Funktionen (К теории идеалов в нормированных кольцах функций), Doklady **27**, 900—903 (1940).
[3] Über die Erweiterungen der maximalen Ideale (О расширениях максимальных идеалов), Doklady **29**, 83—85 (1940).
[4] Über einige normierte Algebren (О некоторых нормированных кольцах), Samml. wiss. stud. Arb. Univ. Moskau **18**, 5—25 (1940).
[5] Über reguläre normierte Algebren (О регулярных нормированных кольцах), Arb. Math. Steklow-Inst. **21** (1947).
[6] Über normierte Algebren mit einer Erzeugenden (О нормированных кольцах с одной образующей), Mat. Sbornik **21** (63), 25—47 (1947).
[7] Über eine Randeigenschaft der analytischen Funktionen (Об одном граничном свойстве аналитических функций), Wiss. Abh. Univ. Moskau **146**, 126—128 (1949).
[8] Über eine Eigenschaft von Funktionenalgebren (Об одном свойстве колец функций), Doklady **58**, 985—988 (1947).
[9] Algebren vom Typ C (Кольца типа C), Doklady **66**, 813—816 (1949).
[10] Algebren vom Typ C auf einer Geraden und auf einem Kreis (Кольца типа C на прямой и на окружности), Doklady **66**, 1063—1066 (1949).
[11] Über einen Satz von Gelfand und seine Verallgemeinerungen (Об одной теореме И. М. Гельфанда и ее обобщениях), Doklady **72**, 641—644 (1950).

[12] Die Beschreibung einer Klasse normierter Funktionenalgebren (Описание одног класса нормированных колец функций), Mat. Sbornik **26** (68), 291—310 (1950).

[13] Über stetige Summen endlichdimensionaler Algebren (О непрерывных суммах конечномерных колец), Mat. Sbornik **27** (69), 471—484 (1950).

[14] Homogene Algebren von Funktionen (Однородные кольца функций), Uspechi mat. nauk **6**: 1, 91—137 (1951).

[15] Über Algebren von Funktionen mit gleichmäßiger Konvergenz (О кольцах функций с равномерной сходимостью), Ukrain. Math. Journ. **3**, 404—411 (1951).

[16] Über homogene Algebren von Funktionen auf einem Torus (Об однородных кольцах функций на торе), Doklady **87**, 681—684 (1952).

[17] Über Algebren von Funktionen auf einem n-dimensionalen Torus (О кольцах функций на n-мерном торе), Mat. Sbornik Kiew **6**, 17—23 (1952).

[18] Über die Zerlegung einer kommutativen normierten Algebra in die direkte Summe von Idealen (О разложении коммутативного нормированного кольца в прямую сумму идеалов), Mat. Sbornik **32** (74), 353—364 (1953).

Schmuljan, W. L. (Шмульян, В. Л.)

[1] Über multiplikative lineare Funktionale in einigen speziellen normierten Algebren (О мультипликативных линейных функционалах в некоторых специальных нормированных кольцах), Doklady **26**, 13—16 (1940).

Schnol, I. E. (Шноль, И. Е.)

[1] Die Struktur der Ideale in den Algebren R_α (Структура идеалов в кольцах R_α), Mat. Sbornik **27** (69), 143—146 (1950).

[2] Abgeschlossene Ideale in der Algebra der stetig differenzierbaren Funktionen (Замкнутые идеалы в кольце непрерывно дифференцируемых функций), Mat. Sbornik **27** (69), 281—284 (1950).

Schreider, J. A. (Шрейдер, Ю. А.)

[1] Untersuchung der maximalen Ideale der Algebra der Funktionen von endlicher Variation (Исследование максимальных идеалов кольца функций о ограниченной вариацией), Mat. Sbornik **27** (69), 297—318 (1950).

Schwartz, L.

[1] Sur une propriété spectrale dans les groups non compacts, C. R. Paris **227**, 424—426 (1948).

[2] Théorie des distributions, t. I, II, Hermann & Cie., Paris 1950 bzw. 1951.

Segal, I. E.

[1] The group ring of a locally compact group, I, Proc. Nat. Acad. Sci. **27**, 348—352 (1941).

[2] Representation of certain commutative Banach algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **52**, 421 (1946).

[3] Irreducible representations of operator algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 73—88 (1947).

[4] The group algebra of a locally compact group, Trans. Amer. Math. Soc. **61**, 69—105 (1947).

[5] Postulates for general quantum mechanics, Ann. Math. **48**, 930—948 (1947).

[6] Two-sided ideals in operator algebras, Ann. Math. **50**, 856—865 (1949).

[7] A kind of abstract integration pertinent to locally compact groups, Bull. Amer. Math. Soc. **55**, 46 (1949).

[8] A generalization of the Plancherel formula to separable unimodular locally compact groups, Ann. Math. **52**, 272—292 (1950).

[9] The two-sided regular representations of a unimodular locally compact group, Ann. Math. **51**, 293—298 (1950).

[10] A class of operator algebras which are determined by groups, Duke Math. Journ. **18**, 221—265 (1951).
[11] Decompositions of operator algebras, I—II, Mem. Amer. Math. Soc. **9** (1951).
[12] A non commutative extension of abstract integration, Ann. Math. **57**, 401—457 (1953).

SEGAL, I. E., and J. VON NEUMANN
[1] A theorem on unitary representations of semisimple Lie groups, Ann. Math. **52**, 509—517 (1950).

SHERMAN, S.
[1] The second adjoint of a C^*-algebra, Proc. Internat. Congr. Math. Cambridge 1, 470 (1950).
[2] Order in operator algebra, Amer. Journ. Math. **73**, 227—232 (1951).

SINGER, I. M.
[1] Uniformly continuous representations of Lie groups, Ann. Math. **56**, 242—247 (1952).
[2] Automorphisms of finite factors, Amer. Journ. Math. **77**, 117—133 (1955).

SMILEY, M. F.
[1] Right H^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 1—5 (1953).

SMIRNOW, J. M. (Смирнов, Ю. М.)
[1] Eine notwendige und hinreichende Bedingung für die Metrisierbarkeit eines topologischen Raumes (Необходимое и достаточное условие метризуемости топологического пространства), Doklady **77**, 197—200 (1951).

SMIRNOW, W. I. (Смирнов, В. И.)
[1] Lehrgang der höheren Mathematik, Teil V (Курс высшей математики, т. V), 2. Aufl., Fismatgis, Moskau 1959. (Deutsche Übersetzung beim VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften in Vorbereitung.)

STONE, M. H.
[1] Linear transformations in Hilbert space and their applications to analysis, reprinted, Amer. Math. Soc., New York 1948.
[2] On one parameter unitary groups in Hilbert space, Ann. Math. **33**, 643—648 (1932).
[3] Applications of the theory of Boolean rings to general topology, Trans. Amer. Math. Soc. **41**, 375—481 (1937).
[4] A general theorem of spectra, I, Proc. Nat. Acad. Sci. **26**, 280—283 (1940).
[5] The generalized Weierstrass approximation theorem, Math. Mag. **21**, 167—184, 237—254 (1948).
[6] Notes on integration, Proc. Nat. Acad. Sci. **34**, 447—455 (1948).
[7] On a theorem of Pólya, Journ. Indian Math. Soc. **12**, 1—7 (1948).
[8] On the theorem of Gelfand-Mazur, Ann. Soc. Polon. Math. **25**, 238—240 (1952).

SUCHOMLINOW, G. A. (Сухомлинов, Г. А.)
[1] Über die Fortsetzung linearer Funktionale im komplexen linearen Raum und im linearen Raum der Quaternionen (О продолжении линейных функционалов в комплексном и кватернионном линейном пространстве), Mat. Sbornik **3** (45), 353—358 (1938).

TAKEDA, Z.
[1] On a theorem of R. Pallu de la Barrière, Proc. Japan Acad. **28**, 558—563 (1952).
[2] Conjugate spaces of operator algebras, Proc. Japan Acad. **30**, 90—95 (1954).

TAKENOUCHI, O.
[1] On the maximal Hilbert algebras, Tôhoku Math. Journ. (2) **3**, 123—135 (1951).

TANNAKA, S.
[1] Dualität der nicht-kommutativen Gruppen, Tôhoku Math. Journ. **45**, 1—12 (1938).

TOMITA, M.

[1] On rings of operators in non-separable Hilbert spaces, Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A, **7**, 129—168 (1953).

[2] On the regularly convex hull of a set in a conjugate Banach space, Math. Journ. Okayama Univ. **3**, 143—145 (1954).

[3] Representations of operator algebras, Math. Journ. Okayama Univ. **3**, 147—173 (1954).

[4] Banach algebras generated by a bounded linear operator, Math. Journ. Okayama Univ. **4**, 97—102 (1955).

TURUMARU, T.

[1] On the commutativity of the C^*-algebra, Kôdai Math. Sem. Rep. **1**, 51 (1951).

[2] On the direct product of operator algebras, I—II, Tôhoku Math. Journ. (2) **4**, 242—251 (1952); **5**, 1—7 (1953).

TYCHONOFF, A. N. (Тыхонов, А. Н.)

[1] Über die topologische Erweiterung von Räumen, Math. Ann. **102**, 544—561 (1929).

UMEGAKI, H.

[1] On some representation theorems in an operator algebra, I—III, Proc. Japan Acad. **27**, 328—333, 501—505 (1951); **28**, 29—31 (1952).

[2] Operator algebras of finite class, I—II, Kôdai Math. Sem. Rep. **2**, 123—129 (1952); **3**, 61—63 (1953).

WAELBROECK, L.

[1] Le calcul symbolique dans les algèbres commutatives, Journ. Math. pures et appl. **33**, 147—186 (1954).

WADELL, C. M.

[1] Properties of regular rings, Duke Math. Journ. **19**, 623—627 (1952).

WEIERSTRASS, K.

[1] Über die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Functionen einer reellen Veränderlichen, Sitzungsber. Akad. Wiss. Berlin, 633—640, 789—806 (1885).

WEIL, A.

[1] L'intégration dans les groupes topologiques et ses applications, Act. Sci. et Ind., No. 869, Hermann & Cie., Paris 1938.

WENDEL, J.

[1] On isometric isomorphisms of group algebras, Pacific Journ. Math. **1**, 305—311 (1951).

[2] Left centralizers and isomorphisms of group algebras, Pacific Journ. Math. **2**, 251—261 (1952).

WERMER, J.

[1] On algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. **4**, 866—869 (1953).

[2] On a class of normed rings, Ark. Mat. **2**, 537—551 (1954).

[3] Algebras with two generators, Amer. Journ. Math. **76**, 853—859 (1954).

WERNIKOW, I. CH., S. G. KREIN und A. W. TOWBIN (Верников, И. Х., С. Г. Крейн и А. В. Товбин)

[1] Über halbgeordnete Algebren (О полуупорядоченных кольцах), Doklady **30**, 778—780 (1941).

WHITNEY, H.

[1] On ideals of differentiable functions, Amer. Journ. Math. **70**, 635—658 (1948).

WIENER, N.

[1] Tauberian theorems, Ann. Math. **33**, 1—100 (1932).

[2] The Fourier integral and certain of its applications, Cambridge University Press, Cambridge 1933.

WIENER, N., and H. R. PITT
[1] On absolutely convergent Fourier-Stieltjes transforms, Duke Math. Journ. **4**, 420—436 (1938).
WOLFSON, K.
[1] The algebra of bounded operators on Hilbert space, Duke Math. Journ. **20**, 533 bis 588 (1953).
[2] The algebra of bounded functions, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 8—14 (1954).
WRIGHT, F. B.
[1] A reduction for algebras of finite type, Ann. Math. **60**, 560—569 (1954).
YOOD, B.
[1] On ideals in operator rings over Banach spaces, Bull. Amer. Math. Soc. **53**, 281 (1947).
[2] Banach algebras of bounded functions, Duke Math. Journ. **16**, 151—163 (1949).
[3] Transformations between Banach spaces in the uniform topology, Ann. Math. **50**, 486—503 (1949).
[4] Banach algebras of continuous functions, Amer. Journ. Math. **73**, 30—42 (1951).
[5] Topological properties of homomorphisms between Banach algebras, Amer. Journ. Math. **76**, 155—167 (1954).
[6] Periodic mappings on Banach algebras, Amer. Journ. Math. **77**, 17—28 (1955).
YOSHIZAWA, H.
[1] Unitary representations of locally compact groups, Osaka Math. Journ. **1**, 81—89 (1949).
YOSIDA, K.
[1] On the group embedded in the metrical complete ring, I—II, Jap. Journ. Math. **13**, 7—26, 459—472 (1936).
[2] On the exponential formula in the metrical complete ring, Proc. Imp. Acad. Japan **13**, 301—304 (1937).
[3] On the duality theorem on non-commutative compact groups, Proc. Imp. Acad. Japan **19**, 181—183 (1943).
[4] Normed rings and spectral theorems, I—VI, Proc. Imp. Acad. Japan **19**, 356—359, 466—470 (1943); **20**, 71—73, 183—185, 269—273, 580—583 (1943).
YOSIDA, K., and T. NAKAYAMA
[1] On the semiordered rings and its application to the spectral theorem, I—II, Proc. Imp. Acad. Japan **18**, 555—560 (1942); **19**, 144—147 (1943).

Aus der seit Erscheinen der russischen Ausgabe dieses Buches veröffentlichten Literatur seien ergänzend genannt

ALLEN, H. S.
[1] Commutative rings of linear transformations and infinite matrices, Quart. Journ. Math. 8, 39—53 (1957).
ARENS, R.
[6] A Banach algebra generalization of conformal mappings of the disc, Trans. Amer. Math. Soc. **81**, 501—513 (1956).
ARENS, R. F., and A. P. CALDERÓN
[1] Analytic functions of Fourier transforms, Segundo symposium sobre algunos problemas matemáticos que seestán estudiando en Latino América, Julio 1954, 39—52, Centro de Coop. Cient. Unesco América Latina, Montevideo 1954.

[2] Analytic functions of several Banach algebra elements, Ann. Math. **62**, 204—216 (1955).

Aurora, S.

[1] Multiplicative norms for metric rings, Pacific Journ. Math. **7**, 1279—1304 (1957).

Bade, W. G.

[1] Weak and strong limits of spectral operators, Pacific Journ. Math. **4**, 393—413 (1954).

Bargman, V.

[1] On unitary ray representations of continuous groups, Ann. Math. **59**, 1—46 (1954).

Baum, L. E.

[1] Note on a paper of Civin and Yood, Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 207—208 (1958).

Becker, H.

[1] Über einen Satz der Darstellungstheorie topologischer Gruppen, Wiss. Z. Humboldt-Univ. Berlin, math.-nat. Reihe, **2**, 61—66 (1952/53).

Berberian, S. K.

[1] The regular ring of a finite AW^*-algebra, Ann. Math. **65**, 224—240 (1957).

[2] $N\times N$ matrices over an AW^*-algebra, Amer. Journ. Math. **80**, 37—44 (1958).

Beresanski, J. M., und S. G. Krein (Березанский, Ю. М., и С. Г. Крейн)

[2] Hyperkomplexe Systeme mit stetiger Basis (Гиперкомплексные системы с континуальным базисом), Uspechi mat. nauk **12**: 1, 147—152 (1957).

Beresin, F. A. (Березин, Ф. А.)

[1] Laplace-Operatoren in halbeinfachen Lieschen Gruppen (Операторы Лапласа на полупростых группах Ли), Doklady **107**, 9—12 (1956).

[2] Darstellungen komplexer halbeinfacher Liescher Gruppen im Banachschen Raum (Представления комплексных полупростых групп Ли в Банаховом пространстве), Doklady **110**, 897—900 (1956).

[3] Laplace-Operatoren in halbeinfachen Lieschen Gruppen (Операторы Лапласа на полупростых группах Ли), Arb. Mosk. Math. Ges. **6**, 371—463 (1957).

[4] Laplace-Operatoren in halbeinfachen Lieschen Gruppen und in symmetrischen Räumen (Операторы Лапласа на полупростых группах Ли и некоторых симметрических пространствах), Uspechi mat. nauk **12**: 1, 152—156 (1957).

Beresin, F. A., I. M. Gelfand, M. I. Grajew und M. A. Neumark (Березин, Ф. А., И. М. Гельфанд, М. И. Граев и М. А. Наймарк)

[1] Darstellungen von Gruppen (Представления групп), Uspechi mat. nauk **11**: 6, 13—40 (1956).

Blair, A.

[1] Continuity of multiplication in operator algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 209—210 (1955).

Bohnenblust, H. F., and S. Karlin

[1] Geometrical properties of the unit sphere of Banach algebras, Ann. Math. **62**, 217—229 (1955).

Broconnier, J.

[1] L'analyse harmonique dans les groupes abéliens, I—II, Enseign. Math. **2**, 12—41, 257—273 (1956).

Bruhat, F.

[1] Sur certaines représentations unitaires des groupes de Lie semi-simples, C. R. Paris **240**, 2196—2198 (1955).

[2] Sur les représentations induites des groupes de Lie, Bull. Soc. Math. France **84**, 97—205 (1956).

CARLESON, L.
[1] On generators of normed rings, 12. Skand. Math.-Kongr. Lund 1953, 16—17 (1954).
CARTIER, P., et J. DIXMIER
[1] Vecteurs analytiques dans les représentations de groupes de Lie, Amer. Journ. Math. **80**, 131—145 (1958).
CIVIN, P., and B. YOOD
[1] Regular Banach algebras with a countable space of maximal regular ideals, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 1005—1010 (1956).
CODDINGTON, E. A.
[1] Some Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 258—261 (1957).
CORRELL, E., and M. HENRIKSEN
[1] On rings of bounded continuous functions with values in a division ring, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 194—198 (1956).
COTLAR, M., and R. RICABARRA
[1] On the existence of characters in topological groups, Amer. Journ. Math. **76**, 375—388 (1954).
DAVIS, C.
[1] Generators of the ring of bounded operators, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 970—972 (1955).
DIEUDONNÉ, J.
[3] Champs de vecteurs non localement triviaux, Arch. Math. **7**, 6—10 (1956).
[4] Sur la théorie spectrale, Journ. Math. pures et appl. **35**, 175—187 (1956).
DIXMIER, J.
[13] Sous-anneaux abéliens maximaux dans les facteurs de type fini, Ann. Math. **59**, 279—286 (1954).
[14] On unitary representations of nilpotent Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. **43**, 985—986 (1957).
[15] Sur les représentations unitaires des groupes de Lie nilpotents, II, Bull. Soc. Math. France **85**, 325—328 (1957).
DOMAR, Y.
[1] Harmonic analysis based on certain commutative Banach algebras, Acta Math. **96**, 1—66 (1956).
DOMRATSCHEWA, G. I (Домрачева, Г. И.)
[1] Ideale in normalen Teilalgebren einer Algebra stetiger Funktionen (Идеалы в нормальных подкольцах кольца непрерывных функций), Wiss. Abh. päd. A. I. Herzen-Inst. Leningrad **166**, 29—38 (1958).
DONOGHUE, W. F.
[1] The Banach algebra l^1 with an application to linear transformations, Duke Math. Journ. **23**, 533—537 (1956).
DO-SCHIN, S. (До-Шин, С.)
[1] Positive Funktionale auf Algebren (Положительные функционалы на алгебрах), Doklady **121**, 233—235 (1958).
DYE, H. A., and R. S. PHILLIPS
[1] Groups of positive operators, Canadian Journ. Math. **8**, 462—486 (1956).
EBERLEIN, W. F.
[1] A note on Fourier-Stieltjes transforms, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 310—312 (1955).
[2] Spectral theory and harmonic analysis, Proc. Symp. Spectral Theory and Differential Problems, 209—219, Oklahoma 1955.

EDWARDS, R. E.
[2] On functions which are Fourier transforms, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 71—78 (1954).
[3] Note on two theorems about function algebras, Mathematika London **4**, 138—139 (1957).
[4] Bounded functions and Fourier transforms, Proc. Amer. Math. Soc. **9**, 440—446 (1958).
EHRENPREIS, L., and F. MAUTNER
[2] Uniformly bounded representations of groups, Proc. Nat. Acad. Sci. **41**, 231—233 (1955).
[3] Some properties of the Fourier transform on semi-simple Lie groups, II, Trans. Amer. Math. Soc. **84**, 1—55 (1957).
FANTAPPIÈ, L.
[1] Calcolo degli autovalori e delle autofunzioni degli operatori osservabili su un gruppo compatto, Arch. Math. **5**, 292—300 (1954).
[2] Calcola degli autovalori e autofunzioni degli operatori „fisici“ su un gruppo topologico compatto, Proc. Internat. Congr. Math. Amsterdam **2**, 98—100 (1954).
FELDMAN, J.
[1] Some connections between topological and algebraic properties in rings of operators, Duke Math. Journ. **23**, 365—370 (1956).
[2] Embedding of AW^*-algebras, Duke Math. Journ. **23**, 303—307 (1956).
[3] Isomorphisms of finite type II rings of operators, Ann. Math. **63**, 565—571 (1956).
[4] Nonseparability of certain finite factors, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 23—26 (1956).
FELDMAN, J., and J. M. G. FELL
[1] Separable representations of rings of operators, Ann. Math. **65**, 241—249 (1957).
FELDMAN, J., and R. KADISON
[1] The closure of the regular operators in a ring of operators, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 909—916 (1954).
FELL, J. M. G.
[1] Representations of weakly closed algebras, Math. Ann. **133**, 118—126 (1957).
FOIAŞ, C.
[1] Elementi completamente continui e quasi completamente continui di un'algebra di Banach, Atti Accad. Naz. Lincei, Rend. Cl. Sci. Fis. Mat. Nat., **20**, 155—160 (1956).
FØLNER, E.
[1] Besicovitch almost periodic functions in arbitrary groups, Math. Scand. **5**, 47—53 (1957).
FUJIWARA, K.
[1] Sur les anneaux des fonctions continues à support compact, Math. Journ. Okayama Univ. **3**, 175—184 (1954).
GELFAND, I. M. (Гельфанд, И. М.)
[10] Über einige Probleme der Funktionalanalysis (О некоторых проблемах функционального анализа), Uspechi mat. nauk **11**: 6, 3—12 (1956).
[11] Über Teilalgebren einer Algebra stetiger Funktionen (О подкольцах кольца непрерывных функций), Uspechi mat. nauk **12**: 1, 249—251 (1957).
GELFAND, I. M., und M. I. GRAJEW (Гельфанд, И. М., и М. И. Граев)
[2] Spuren unitärer Darstellungen einer reellen unimodularen Gruppe (Следы унитарных представлений вещественной унимодулярной группы), Doklady **100**, 1037—1040 (1955).
GELFAND, I. M., M. I. GRAJEW, M. A. NEUMARK und F. A. BERESIN (Гельфанд, И. М. М. И. Граев, М. А. Наймарк и Ф. А. Березин)
[1] Darstellungen Liescher Gruppen (Представления групп Ли), Arb. 3. Math. Allunionskongreß 37 (1956).

GHIKA, A.
[1] Algebre de transformări liniare și continue ale unui spațiu hilbertian în altul, Comun. Acad. Rep. Pop. Rom. **7**, 831—834 (1957).
GILLMAN, L., and M. HENRIKSEN
[1] Concerning rings of continuous functions, Trans. Amer. Math. Soc. **77**, 340—362 (1954).
GILLMAN, L., M. HENRIKSEN and M. JERISON
[2] On a theorem of Gelfand and Kolmogoroff concerning maximal ideals in rings of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. **5**, 447—455 (1954).
GLAESER, G.
[1] Sur le théorème du prolongement de Whitney, C. R. Paris **245**, 617—619 (1957).
GOLDHABER, J. K., and E. S. WOLK
[1] Maximal ideals in rings of bounded continuous functions, Duke Math. Journ. **21**, 565—569 (1954).
GOLDMAN, M.
[1] Structure of AW^*-algebras, Duke Math. Journ. **23**, 23—34 (1956).
GRAJEW, M. I. (Граев, M. И.)
[1] Über eine allgemeine Methode zur Berechnung der Spuren der unendlichdimensionalen unitären Darstellungen reeller einfacher Liescher Gruppen (Об одном общем методе вычисления следов бесконечномерных унитарных представлений вещественных простых групп Ли), Doklady **103**, 357—360 (1955).
[2] Unitäre Darstellungen reeller einfacher Liescher Gruppen (Унитарные представления вещественных простых групп Ли), Uspechi mat. nauk **12**: 1, 179—182 (1957).
[3] Irreduzible unitäre Darstellungen der Gruppe von Matrizen 3. Ordnung, die eine indefinite hermitesche Form invariant lassen (Неприводимые унитарные представления группы матриц третьего порядка, сохраняющих индефинитную Эрмитову форму), Doklady **113**, 966—969 (1957).
GRIFFIN, E.
[2] Some contributions to the theory of rings of operators, II, Trans. Amer. Math. Soc. **79**, 389—400 (1955).
GROTHENDIECK, A.
[1] Un résultat sur le dual d'une C^*-algèbre, Journ. Math. pures et appl. **36**, 97—108 (1957).
HARISH-CHANDRA
[6] On the Plancherel formula for the right-invariant functions on a semisimple Lie group, Proc. Nat. Acad. Sci. **40**, 200—204 (1954).
[7] On the characters of a semisimple Lie group, Bull. Amer. Math. Soc. **61**, 389—396 (1955).
[8] Integrable and square-integrable representations of a semisimple Lie group, Proc. Nat. Acad. Sci. **41**, 314—317 (1955).
[9] The characters of semisimple Lie groups, Trans. Amer. Math. Soc. **83**, 98—163 (1956).
[10] A formula for semisimple Lie groups, Proc. Nat. Acad. Sci. **42**, 538—540 (1956).
[11] Invariant differential operators on a semisimple Lie algebra, Proc. Nat. Acad. Sci. **42**, 252—253 (1956).
[12] Representations of semisimple Lie groups, VI: Integrable and square-integrable representations, Amer. Journ. Math. **78**, 564—628 (1956).
[13] Fourier transforms on a semisimple Lie algebra, I—II, Amer. Journ. Math. **79**, 193—257, 653—686 (1957).

[14] Spherical functions on a semisimple Lie group, Proc. Nat. Acad. Sci. **43**, 408—409 (1957).
[15] Differential operators on a semisimple Lie algebra, Amer. Journ. Math. **79**, 87—120 (1957).

HARTMAN, S.
[1] Quelques remarques sur les expansions de Fourier, Studia Math. **14**, 200—208 (1954).

HAUSNER, A.
[1] Ideals in certain Banach algebra, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 246—249 (1957).

HEIDER, L. J.
[1] Directed limits on rings of continuous functions, Duke Math. Journ. **23**, 293—296 (1956).

HELGASON, S.
[2] Multipliers of Banach algebras, Ann. Math. **64**, 240—254 (1956).

HELSON, H., and F. QUIGLEY
[1] Maximal algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 111—114 (1957).
[2] Existence of maximal ideals in algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 115—119 (1957).

HEWITT, E.
[3] Fourier transforms of the class $\mathfrak{L}_p$, Ark. Mat. **2**, 571—574 (1954).
[4] A survey of abstract harmonic analysis, in „Some aspects of analysis and probability", Surveys in Applied Mathematics, Vol. 4, John Wiley & Sons, New York 1958, p. 107—170.

HEWITT, E., and E. P. WIGNER
[1] On a theorem of Magnus, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 740—744 (1957).

HEWITT, E., and H. ZUCKERMAN
[1] The l_1-algebra of a commutative semigroup, Trans. Amer. Math. Soc. **83**, 70—97 (1956).

HILLE, E.
[2] On roots and logarithms of elements of a complex Banach algebra, Math. Ann. **136**, 46—57 (1958).

HIRSCHFELD, R.
[1] Sur l'analyse harmonique dans les groupes localement compacts, C. R. Paris **246**, 1138—1140 (1958).

HOFFMAN, K., and I. M. SINGER
[1] Maximal subalgebras of $C(\Gamma)$, Amer. Journ. Math. **79**, 295—305 (1957).

HOLLADAY, J. C.
[1] A note on the Stone-Weierstrass theorem for quaternions, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 656—657 (1957).

HONGO, E.
[1] On quasi-unitary algebras with semi-finite left rings, Bull. Kyusyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci., Nr. 3, 1—10 (1957).

HONGO, E., and M. ORIHARA
[1] A remark on a quasi-unitary algebra, Yokohama Math. Journ. **2**, 69—72 (1954).

VAN HOVE, L.
[1] L'ensemble des fonctions analytiques sur un compact en tant qu'algèbre topologique, Bull. Soc. Math. Belgique, 8—17 (1952).

IONESCU, T. C.
[1] Fonctions de type positif, C. R. Paris **243**, 1389—1392 (1956).

ISHII, T.

[2] On homomorphisms of the ring of continuous functions onto the real numbers, Proc. Japan Acad. **33**, 419—423 (1957).

KADISON, R.

[8] On the additivity of the trace in finite factors, Proc. Nat. Acad. Sci. **41**, 385—387 (1955).

[9] On the orthogonalization of operator representations, Amer. Journ. Math. **77**, 600—620 (1955).

[10] Report on operator algebras, Publ. Nat. Acad. Sci. Nat. Res. Council, Nr. 387, 4—10 (1955).

[11] Irreducible operator algebras, Proc. Nat. Acad. Sci. **43**, 273—276 (1957).

[12] Theory of operators, II: Operator algebras, Bull. Amer. Math. Soc. **64**, 61—85 (1958).

KAPLANSKY, I.

[22] Functional analysis, in „Some aspects of analysis and probability", Surveys in Applied Mathematics, Vol. 4, John Wiley & Sons, New York 1958, p. 3—36.

KEOWN, E. R.

[1] Reflexive Banach algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 252—259 (1955).

KLEINECKE, D. G.

[1] On operator commutators, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 535—536 (1957).

KOOSIS, P.

[1] An irreducible unitary representation of a compact group is finite dimensional, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 712—715 (1957).

KORNBLUM, B. I. (Коренблюм, Б. И.)

[2] Über eine normierte Algebra von Funktionen mit Faltung (Об одном нормированном кольце функций со свертыванием), Doklady **115**, 226—229 (1957).

KOSHI, Sh.

[1] On Weierstrass-Stone's theorem, Journ. Math. Soc. Japan **5**, 351—352 (1953).

KRABBE, G. L.

[1] Abelian rings and spectra of operators on l_p, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 783—790 (1956).

[2] Spectral isomorphisms for some rings of infinite matrices on a Banach space, Amer. Journ. Math. **78**, 42—50 (1956).

[3] Spectra of convolution operators on L^p and rings of factor-sequences, Quart. Journ. Math. **8**, 1—12 (1957).

DE LEEUW, K., and H. MIRKIL

[1] Intrinsic algebras on the torus, Trans. Amer. Math. Soc. **81**, 320—330 (1956).

LEIBENSON, S. L. (Лейбензон, З. Л.)

[2] Über eine Algebra von Funktionen mit absolut-konvergenten Fourier-Reihen (О кольце функций с абсолютно сходящимися рядами Фурье), Uspechi mat. nauk **9**: 3, 157—162 (1954).

LEPTIN, H.

[1] Reduktion linearer Funktionale auf Operatorenringen, Abh. Math. Sem. Univ. Hamburg **22**, 98—113 (1958).

[2] Zur Reduktionstheorie Hilbertscher Räume, Math. Z. **69**, 40—58 (1958).

LOOMIS, L. H.

[2] The lattice theoretic background of the dimension theory of operator algebras, Mem. Amer. Math. Soc. **18** (1955).

LORCH, E. R.

[4] L'integrazione e gli ideali massimi, Rend. Sem. Mat. Univ. Torino **13**, 33—38 (1953/54).

[5] Normed rings — the first decade, Proc. Symp. Spectral Theory and Differential Problems, 249—258, Oklahoma 1955.

LUMER, G.

[1] The range of the exponential function, Publ. Inst. Mat. y Estadist. Fac. Ingr. y Agrimens. **3**, 53—55 (1957).

[2] Commutadores en álgebras de Banach, Publ. Inst. Mat. y Estadist. Fac. Ingr. y Agrimens. **3**, 57—63 (1957).

MAAK, W.

[1] Darstellungstheorie unendlicher Gruppen und fastperiodische Funktionen, Enzyklopädie Math. Wiss., Bd. I, 1. Teil, Heft 7, Artikel 16, B. G. Teubner, Leipzig 1953.

[2] Fastperiodische Funktionen auf der Modulgruppe, Math. Scand. **3**, 44—48 (1955).

MACDOWELL, R.

[1] Banach spaces and algebras of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 67—78 (1955).

MACKEY, G.

[3] Imprimitivity for representations of locally compact groups, I, Proc. Nat. Acad. Sci. **35**, 537—545 (1949).

[4] Imprimitivité pour les représentations des groupes localement compacts, II: Nombres d'entrelacement pour les représentations imprimitives; III: Produits de Kronecker et nombres d'entrelacement fortes, C. R. Paris **230**, 808—809, 908—909 (1950).

[5] On induced representations of groups, Amer. Journ. Math. **73**, 576—592 (1951).

[6] Induced representations of locally compact groups, I, II: The Frobenius reciprocity theorem, Ann. Math. **55**, 101—139 (1952); **58**, 193—231 (1953).

[7] Borel structure in groups and their duals, Trans. Amer. Math. Soc. **85**, 134—165 (1957).

[8] Unitary representations of groups extensions, I, Acta Math. **99**, 265—311 (1958).

MAEDA, SH.

[1] Lengths of projections in rings of operators, Journ. Sci. Hiroshima Univ., A, **20**, 5—11 (1956).

MALLIAVIN, P.

[1] Théorèmes d'adhérence pour certaines séries de Dirichlet. Procédés d'extrapolation en analyse fonctionelle, C. R. Paris **239**, 20—22 (1954).

MATSUSHITA, S.

[2] Analyse harmonique dans les groupes localement compacts, I—II, C. R. Paris **237**, 955—957, 1056—1057 (1953).

[3] Über einen Satz von K. Iwasawa, Journ. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., A, **4**, 59—61 (1953).

[4] Plancherel's theorem on general locally compact groups, Journ. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., A, **4**, 63—70 (1953).

[5] Sur le théorème de Plancherel, Proc. Japan Acad. **30**, 557—561 (1954).

[6] Positive functionals and representation theory on Banach algebras, I, Journ. Inst. Polytechn. Osaka City Univ., A, **6**, 1—18 (1955).

MATTHES, K.

[1] Über eine Verallgemeinerung eines Satzes von Gelfand und Kolmogoroff, Math. Nachr. **15**, 117—121 (1956).

MAUTNER, F. I.

[8] Geodesic flows and unitary representations, Proc. Nat. Acad. Sci. **40**, 33—36 (1954).

MISONOU, Y.
[3] Unitary equivalence of factors of type III, Proc. Japan Acad. **29**, 482—485 (1953).
[4] On the direct product of W^*-algebras, Tôhoku Math. Journ. **6**, 189—204 (1954).
[5] Generalized approximately finite W^*-algebras, Tôhoku Math. Journ. **7**, 192—205 (1955).
[6] On divisors of factors, Tôhoku Math. Journ. **8**, 63—69 (1956).

MIYANAGA, Y.
[1] A note on Banach algebras, Proc. Japan Acad. **32**, 176 (1956).

NACHBIN, L.
[1] A generalization of Whitney's theorem on ideals of differentiable functions, Proc. Nat. Acad. Sci. **43**, 935—937 (1957).

NAKAMURA, M.
[2] On the direct product of finite factors, Tôhoku Math. Journ. **6**, 205—207 (1954).

NAKAMURA, M., and T. TURUMARU
[1] On extensions of pure states of an abelian operator algebra, Tôhoku Math. Journ. **6**, 253—257 (1954).

NAKAMURA, M., and H. UMEGAKI
[2] On a proposition of von Neumann, Kôdai Math. Sem. Rep. **8**, 142—144 (1956).

VON NEUMANN, J.
[10] The non-isomorphism of certain continuous rings, Ann. Math. **67**, 485—496 (1958).

NEUMARK, M. A. (Наймарк, M. A.)
[10] Über irreduzible Darstellungen der vollständigen Lorentz-Gruppe (О неприводимых представлениях полной группы Лоренца), Doklady **112**, 583—586 (1957).
[11] Lineare Darstellungen der Lorentz-Gruppe (Линейные представления группы Лоренца), Fismatgis, Moskau 1958. (Deutsche Übersetzung beim VEB Deutscher Verlag der Wissenschaften in Vorbereitung.)
[12] Über die Zerlegung des Tensorprodukts der Darstellungen der Hauptserie der eigentlichen Lorentz-Gruppe in irreduzible Darstellungen (О разложении тензорного произведения представлений основной серии собственной группы Лоренца на неприводимые представления), Doklady **119**, 872—876 (1958).
[13] Über die Zerlegung der irreduziblen Darstellungen der Hauptserie einer komplexen unimodularen Gruppe n-ter Ordnung in Darstellungen einer komplexen unimodularen Gruppe 2. Ordnung (О разложение неприводимых представленний основной серии комплексной унимодулярной группы n-го порядка на представления комплексной унимодулярной группы второго порядка), Doklady **121**, 590—593 (1958).

OGASAWARA, T.
[1] Finite-dimensionality of certain Banach algebras, Journ. Sci. Hiroshima Univ., A, **17**, 359—364 (1954).
[2] A structure theorem for complete quasi-unitary algebras, Journ. Sci. Hiroshima Univ., A, **19**, 79—85 (1955).
[3] A theorem on operator algebras, Journ. Sci. Hiroshima Univ., A, **18**, 307—309 (1955).
[4] Topologies on rings of operators, Journ. Sci. Hiroshima Univ., A, **19**, 255—272 (1955).

OGASAWARA, T., and K. YOSHINAGA
[1] Weakly completely continuous Banach *-algebras, Journ. Sci. Hiroshima Univ., A, **18**, 15—36 (1954).
[2] A non-commutative theory of integration for operators, Journ. Sci. Hiroshima Univ., A, **18**, 311—347 (1955).

OLUBUMMO, A.

[1] Left completely continuous B^*-algebras, Journ. London Math. Soc. **32**, 270—276 (1957).

ONO, T.

[1] A generalization of the Hahn Banach theorem, Nagoya Math. Journ. **6**, 171—176 (1953).

ORIHARA, M.

[1] Correction to my paper „Rings of operators and their traces", Mem. Fac. Sci. Kyusyu Univ., Ser. A, **8**, 89—91 (1953).

PEŁZYŃSKY, A.

[1] A generalization of Stone's theorem on approximation, Bull. Acad. Polon. Sci., Cl. 3, **5**, 105—107 (1957).

POLISTSCHUK, E. M. (Полищук, E. M.)

[1] Volterra-Komposition und normierte Algebren (Композиции Вольтерра и нормированные кольца), Wiss. Abh. d. Arkt. Seefahrtsschule, 263—269 (1954).

PRÉKOPA, A.

[1] Extension of multiplicative set functions with values in a Banach algebra, Acta Math. Acad. Sci. Hung. **7**, 201—213 (1956).

PRICE, J. J.

[1] Some duality theorems, Illinois Journ. Math. **1**, 433—445 (1957).

PUKÁNSZKY, L.

[1] The theorem of Radon-Nikodym in operator-rings, Acta Sci. Math. **15**, 149—156 (1954).

[2] On a theorem of Mautner, Acta Sci. Math. **15**, 145—148 (1954).

[3] On the theory of quasi-unitary algebras, Acta Sci. Math. **16**, 103—121 (1955).

PURSELL, L. E.

[1] A note on isomorphism of $C(X, R)$ and $C^*(X, R)$, Bull. Calcutta Math. Soc. **49**, 47—48 (1957).

[2] The ring $C(X, R)$ considered as the subring of the ring of all real-valued functions, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 820—821 (1957).

RABINOWITSCH, W. S. (Рабинович, B. C.)

[1] Über Gruppen unitärer Operatoren im Hilbertschen Raum (O группах унитарных операторов в пространстве Гильберта), Arb. d. mittelasiat. Univ. (Taschkent), Nr. 37, 125—130 (1954).

REITER, H.

[4] Contributions to harmonic analysis, Acta Math. **96**, 253—263 (1956).

[5] Beiträge zur harmonischen Analyse, II, Math. Ann. **133**, 298—302 (1957).

[6] Contributions to harmonic analysis, III, Journ. London Math. Soc. **32**, 477—483 (1957).

ROSENBLUM, M.

[1] On the operator equation $BX - XA = Q$, Duke Math. Journ. **23**, 263—269 (1956).

RUDIN, W.

[1] The automorphisms and the endomorphisms of the group algebra of the unit circle, Acta Math. **95**, 39—55 (1956).

[2] Subalgebras of spaces of continuous functions, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 825—830 (1956).

[3] Factorization in the group algebra of the real line, Proc. Nat. Acad. Sci. **43** 339—340 (1957).

[4] Continuous functions on compact spaces without perfect subsets, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 39—42 (1957).

SAKAI, S.

[2] On the representations of semi-simple Lie groups, Proc. Japan Acad. **30**, 14—18 (1954).

[3] On infinite-dimensional representations of semi-simple Lie algebras and some functionals on the universal enveloping algebras, I, Proc. Japan Acad. **30**, 305—312 (1954).

[4] On the group isomorphism of unitary groups in AW^*-algebras, Tôhoku Math. Journ. **7**, 87—95 (1955).

[5] A characterization of W^*-algebras, Pacific Journ. Math. **6**, 763—773 (1956).

[6] The absolute value of W^*-algebras of finite type, Tôhoku Math. Journ. **8**, 70—85 (1956).

[7] On the σ-weak topology of W^*-algebras, Proc. Japan Acad. **32**, 329—332 (1956).

[8] On topological properties of W^*-algebras, Proc. Japan Acad. **33**, 439—444 (1957).

SÂMBOAN, G.

[1] Asupra integralei produs, Bul. ştiinţ. Acad. Rep. Pop. Rom., Secţ. Mat. Fiz., **9**, 241—246 (1957).

SASAKI, U.

[1] Lattice of projections in AW^*-algebras, Journ. Sci. Hiroshima Univ., A, **19**, 1—30 (1955).

SAWOROTNOW, P. P.

[1] On a generalization of the notion of H^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 49—55 (1957).

[2] On the imbedding of a right complemented algebra into Ambrose's H^*-algebra, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 56—62 (1957).

SCHATZ, J. A.

[1] Representation of Banach algebras with involution, Canadian Journ. Math. **9**, 435—442 (1957).

SCHILOW, G. E. (Шилов, Г. Е.)

[19] Ein Kompaktheitskriterium im homogenen Funktionenraum (Критерий компактности в однородном пространстве функций), Doklady **92**, 11—12 (1953).

[20] Über einige Aufgaben der allgemeinen Theorie der stetigen normierten Algebren (О некоторых задачах общей теории коммутативных нормированных колец), Uspechi mat. nauk **12**: 1, 246—249 (1957).

SEGAL, I. E.

[13] Tensor algebras over Hilbert spaces, I—II, Trans. Amer. Math. Soc. **81**, 106—134 (1956); Ann. Math. **63**, 160—175 (1956).

[14] The structure of a class of representations of the unitary group on a Hilbert space, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 197—203 (1957).

SHIGA, K.

[1] Representations of a compact group on a Banach space, Journ. Math. Soc. Japan **7**, 224—248 (1955).

[2] Bounded representations on a topological vector space and weak almost periodicity, Jap. Journ. Math. **25**, 21—35 (1955).

SHIROTA, T.

[1] On ideals in rings of continuous functions, Proc. Japan Acad. **30**, 85—89 (1954).

SINGER, I. M.

[3] Report on group representations, Publ. Nat. Acad. Sci. Nat. Res. Council, Nr. 387, 11—26 (1955).

SINGER, I. M., and J. WERMER

[1] Derivations on commutative normed algebras, Math. Ann. **129**, 260—264 (1955).

SMILEY, M. F.
[2] Right annihilator algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 698—701 (1955).
STINESPRING, W. F.
[1] Positive functions on C^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 211—216 (1955).
SUNOUCHI, H.
[1] A characterization of the maximal ideal in a factor of the case (II_∞), Kôdai Math. Sem. Rep. **6**, 7 (1954).
[2] A characterization of the maximal ideal in a factor, II, Kôdai Math. Sem. Rep. **7**, 65—66 (1955).
[3] Infinite Lie rings, Tôhoku Math. Journ. **8**, 291—307 (1956).
SUZUKI, N.
[1] On the automorphisms of W^*-algebras leaving the center elementwise invariant, Tôhoku Math. Journ. **7**, 186—191 (1955).
[2] On the invariants of W^*-algebras, Tôhoku Math. Journ. **7**, 177—185 (1955).
SZ.-NAGY, B.
[1] Note on sums of almost orthogonal operators, Acta Sci. Math. **18**, 189—191 (1957).
[2] Transformations de l'espace de Hilbert, fonctions de type positif sur un groupe, Acta Sci. Math. **15**, 104—114 (1954).
TAKEDA, Z.
[3] Note on Fourier-Stieltjes integral, II, Kôdai Math. Sem. Rep. **2**, 33—36 (1953).
[4] On the representations of operator algebras, Proc. Japan Acad. **30**, 299—304 (1954).
[5] On the representations of operator algebras, II, Tôhoku Math. Journ. **6**, 212—219 (1954).
TAKENOUCHI, O.
[2] Sur une classe de fonctions continues de type positif sur un groupe localement compact, Math. Journ. Okayama Univ. **4**, 143—173 (1955).
[3] Families of unitary operators defined on groups, Math. Journ. Okayama Univ. **6**, 171—179 (1957).
TELEMAN, S.
[1] Sur les algèbres de J. von Neumann, Bull. Sci. Math. **82**, 117—126 (1958).
THOMA, E.
[1] Zur Reduktionstheorie in allgemeinen Hilbert-Räumen, Math. Z. **68**, 153—188 (1957).
[2] Zur Reduktionstheorie in separablen Hilbert-Räumen, Math. Z. **67**, 1—9 (1957).
[3] Die unitären Darstellungen der Bewegungsgruppe des R^2, Abst. Short Comm. Internat. Congr. Math. Univ. Edinburgh, 24—25 (1958). Siehe auch: Math. Ann. **134**, 428—452 (1958).
TOMIYAMA, J.
[1] On the projection of norm one in W^*-algebras, Proc. Japan Acad. **33**, 608—612 (1957).
[2] Generalized dimension function for W^*-algebras of infinite type, Tôhoku Math. Journ. **10**, 121—129 (1958).
TSUJI, K.
[1] N^*-algebras and finite class groups, Bull. Kyusyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci., Nr. **1**, 1—9 (1955).
[2] Representation theorems of operator algebra and their applications, Proc. Japan Acad. **31**, 272—277 (1955).
[3] Harmonic analysis on locally compact groups, Bull. Kuysyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci., Nr. **2**, 16—32 (1956).

[4] W^*-algebras and abstract (L)-spaces, Bull. Kuysyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci., Nr. **3**, 11—13 (1957).
[5] ω-almost periodic functions on arbitrary groups, Bull. Kyusyu Inst. Technol., Math. Nat. Sci., Nr. **4**, 7—14 (1958).

TURUMARU, T.
[3] On the direct product of operator algebras, III—IV, Tôhoku Math. Journ. **6**, 208—211 (1954); **8**, 281—285 (1956).

UMEGAKI, H.
[3] Decomposition theorems of operator algebra and their applications, Jap. Journ. Math. **22**, 27—50 (1952/53).
[4] Ergodic decomposition of stationary linear functional, Proc. Japan Acad. **30**, 358—362 (1954).
[5] Note on irreducible decomposition of a positive linear functional, Kôdai Math. Sem. Rep. **4**, 25—32 (1954).
[6] Positive definite functions and direct product Hilbert space, Tôhoku Math. Journ. **7**, 206—211 (1955).
[7] Conditional expectation in an operator algebra, II, Tôhoku Math. Journ. **8**, 86—100 (1956).
[8] Weak compactness in an operator space, Kôdai Math. Sem. Rep. **8**, 145—151 (1956).

URBANIK, K.
[1] On quotient-fields generated by pseudonormed rings, Studia Math. **15**, 31—33 (1955).

VIDAV, I.
[1] Über eine Vermutung von Kaplansky, Math. Z. **62**, 330 (1955).
[2] Quelques propriétés de la norme dans les algèbres de Banach, Publ. Inst. Math. Acad. Serbe Sci. **10**, 53—58 (1956).
[3] Über die Darstellung der positiven Funktionale, Math. Z. **68**, 362—366 (1958).

WAELBROECK, L.
[2] Les algèbres à inverse continu, C. R. Paris **238**, 640—641 (1954).
[3] Structure des algèbres à inverse continu, C. R. Paris **238**, 762—764 (1954).

WARNER, S.
[1] Weak locally multiplicatively-convex algebras, Pacific Journ. Math. **5**, Suppl. 2, 1025—1032 (1955).
[2] Inductive limits of normed algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **82**, 190—216 (1956).
[3] Polynomial completeness in locally multiplicatively-convex algebras, Duke Math. Journ. **23**, 1—11 (1956).
[4] Weakly topologized algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 314—316 (1957).

WERMER, J.
[4] Maximal subalgebras of group-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **6**, 692—694 (1955).
[5] Subalgebras of the algebra of all complex-valued continuous functions on the circle, Amer. Journ. Math. **78**, 225—242 (1956).

WIDOM, H.
[1] Approximately finite algebras, Trans. Amer. Math. Soc. **83**, 170—178 (1956).
[2] Nonisomorphic approximately finite factors, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 537—540 (1957).

WILENKIN, N. J. (Виленкин, Н. Я.)
[1] Zur Theorie der zugeordneten Kugelfunktionen (К теории присоединенных сферических функций), Doklady **111**, 742—744 (1956).

[2] Matrixelemente der irreduziblen unitären Darstellungen der Gruppe der reellen orthgonalen Matrizen und der Drehungsgruppe des $(n-1)$-dimensionalen euklidischen Raumes (Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы вещественных ортогональных матриц и группы движений $(n-1)$-мерного евклидова пространства), Doklady **113**, 16—19 (1957).

WILENKIN, N. J., E. L. AKIM und A. A. LEWIN (Виленкин, Н. Я., Э. Л. Аким и А. А. Левин)

[1] Matrixelemente irreduzibler unitärer Darstellungen der Gruppe der euklidischen Drehungen des dreidimensionalen Raumes und ihre Eigenschaften (Матричные элементы неприводимых унитарных представлений группы евклидовых движений трехмерного пространства и их свойства), Doklady **112**, 987—989 (1957).

WILLEON, A. B.

[1] Note on certain group algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 874—879. (1956).

WOLFSON, K.

[3] A class of primitive rings, Duke Math. Journ. **22**, 157—163 (1955).

[4] A note on the algebra of bounded functions, Proc. Amer. Math. Soc. **7**, 852—855 (1956).

WULICH, B. S. (Вулих, Б. З.)

[1] Halbgeordnete Algebren (Полупорядоченные кольца), Arb. 3. Math. Allunionskongreß, 20—21 (1956).

YEN TI

[1] Trace on finite AW^*-algebras, Duke Math. Journ. **22**, 207—222 (1955).

[2] Isomorphism of unitary groups in AW^*-algebras, Tôhoku Math. Journ. **8**, 275—280 (1956).

[3] Quotient algebra of a finite AW^*-algebra, Pacific Journ. Math. **6**, 389—395 (1956).

[4] Isomorphism of AW^*-algebras, Proc. Amer. Math. Soc. **8**, 345—349 (1957).

YOSHIZAWA, H.

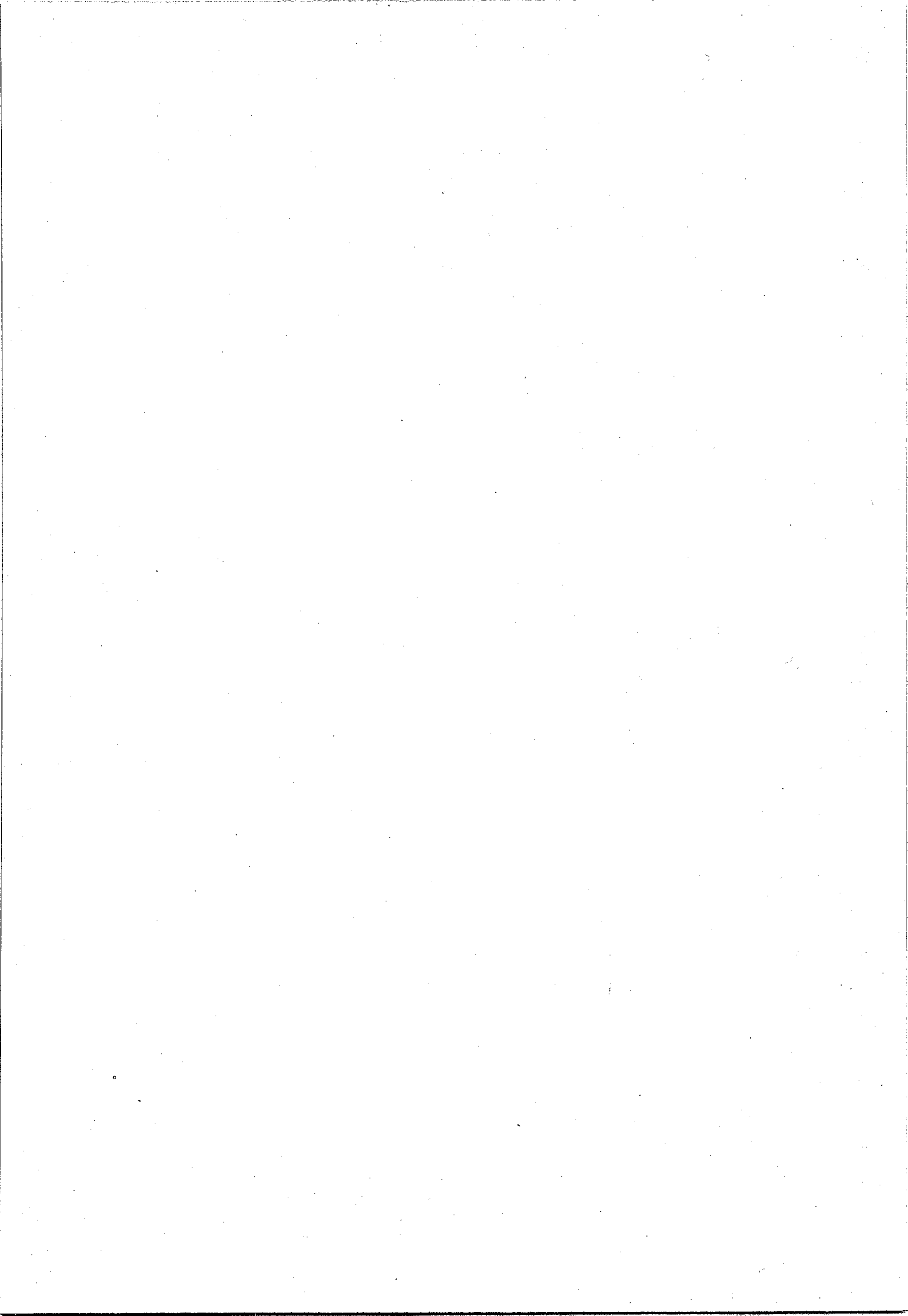
[2] A proof of the Plancherel theorem, Proc. Japan Acad. **30**, 276—281 (1954).

ZAMFORESCU, I.

[1] Une généralization du théorème de Weierstrass-Stone, C. R. Paris **246**, 524—525 (1958).

NAMENREGISTER

SACHREGISTER



M. A. NEUMARK · NORMIERTE ALGEBREN